ELENCO DEI PRESIDENTI

DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

1862. Costa Oronzio Gabriele
1863. Capocci Ernesto
1864. Gasparrini Guglielmo
1865. Padula Fortunato
1866. De Luca Sebastiano
1867. De Gasparis Annibale
1868. Palmieri Luigi
1869. Trudi Nicola
1870. De Martini Antonio
1871. Padula Fortunato
1872. Guiscardi Guglielmo
1873. Fergola Emanuele
1874. Palmieri Luigi
1875. Padula Fortunato
1876. Panceri Paolo
1877. Trudi Nicola
1878. Cesati Vincenzo
1879. De Gasparis Annibale
1880. Costa Achille
1881. Padula Fortunato
1882. Albini Giuseppe
1883. Trudi Nicola
1884. De Martini Antonio
1885. Fergola Emanuele
1886. Govi Gilberto
1887. Battaglini Giuseppe
1888. De Martini Antonio
1889. Padelletti Dino
1890. Costa Achille
1891. Fergola Emanuele
1892. Palmieri Luigi
1893. Battaglini Giuseppe
1894. Trinchese Salvatore
1895. Fergola Emanuele
1896. Villari Emilio
1897. Siacci Francesco
1898. Albini Giuseppe
1899. Fergola Emanuele
1900. Nicolucci Giustiniano
1901. Capelli Alfredo
1902. Delpino Federico
1903. Fergola Emanuele
1904. Paladino Giovanni
1905. Pinto Luigi
1906. Bassani Francesco
1907. Fergola Emanuele
1908. Paladino Giovanni
1909. Del Pezzo Pasquale
1910. Bassani Francesco
1911. Pinto Luigi
1912. Paladino Giovanni
1913. Del Pezzo Pasquale
1914. Della Valle Antonio

ELENCO DEI SOCI

NEL GENNAJO DEL 1914

con la data della loro nomina

UFFICIO DI PRESIDENZA

Presidente — DELLA VALLE ANTONIO

Vice-Presidente — TORELLI GABRIELE

Segretario — DE LORENZO GIUSEPPE

Tesoriere — OGLIALORO-TODARO AGOSTINO

SOCI ORDINARI

SEZIONE DELLE SCIENZE FISICHE

Soci residenti

1. Oglialoro-Todaro Agostino; 12 agosto 1882.
2. Bassani Francesco; 10 dicembre 1887.
3. Paladino Giovanni; 10 giugno 1893.
4. Grassi Guido; 20 febbraio 1897.
5. Della Valle Antonio; 12 febbraio 1898.

6. De Lorenzo Giuseppe; 12 novembre 1904.

7. Piutti Arnaldo; 12 novembre 1904.

8. Cantone Michele; 17 giugno 1905.

9. Cavara Fridiano; 12 gennaio 1907.

10. Monticelli Francesco Saverio; 13 novembre 1909.

11. Scacchi Eugenio; 13 novembre 1909.

12. Bakunin Marussia; 6 maggio 1911.

Soci non residenti

13. Taramelli Torquato; 10 dicembre 1892.

14. Paternò Emanuele; 11 febbraio 1905.

15. Capellini Giovanni; 17 giugno 1911.

16. . . . .

SEZIONE DELLE SCIENZE MATEMATICHE

Soci residenti

17. Fergola Emanuele; 19 novembre 1861.

18. Pinto Luigi; 8 giugno 1889.

19. Del Pezzo Pasquale; 20 novembre 1897.

20. Torelli Gabriele; non resid. 12 dic. 1903; resid. 16 ott. 1907.

21. Pascal Ernesto; 20 novembre 1909.

22. Montesano Domenico; 10 dicembre 1910.

Soci non residenti

23. D'Ovidio Enrico; 12 giugno 1909.

24. Dini Ulisse; 8 aprile 1911.

SOCI STRANIERI

SEZIONE DELLE SCIENZE FISICHE

1. Weismann Augusto; 1 aprile 1893.

2. Retzius Gustavo; 13 luglio 1901.

3. Geikie Archibald; 6 marzo 1909.

4. Ramsay William; 17 giugno 1911.

5. Thomson John Joseph; 17 giugno 1911.

SEZIONE DELLE SCIENZE MATEMATICHE

6. Auwers Arturo; 9 marzo 1895.

7. Mittag-Leffler Gustavo; 13 luglio 1901.

8. Klein Felix; 3 maggio 1913.

SOCI CORRISPONDENTI NAZIONALI

SEZIONE DELLE SCIENZE FISICHE

1. Comes Orazio; 10 novembre 1883.

2. Blaserna Pietro; 2 marzo 1889.

3. Capobianco Francesco; 11 febbraio 1905.

4. Diamare Vincenzo; 11 febbraio 1905.

5. Parona Carlo Fabrizio; 11 febbraio 1905.

6. Chistoni Ciro; 16 giugno 1906.

7. Giuffrida Ruggeri Vincenzo; 5 marzo 1910.

8. Zambonini Ferruccio; 5 marzo 1910.

9. Mercalli Giuseppe; 17 giugno 1911.

10. Di Stefano Giovanni; 2 novembre 1912.

11. Lombardi Luigi; 2 novembre 1912.

12. Pierantoni Umberto; 2 novembre 1912.

13. Rebuffat Orazio; 2 novembre 1912.

SEZIONE DELLE SCIENZE MATEMATICHE

---

14. Salvatore-Dino Nicola; 12 febbraio 1881.

15. Bianchi Luigi; 9 agosto 1890.

16. Angelitti Filippo; 9 aprile 1898.

17. Masoni Udalrigo; 9 luglio 1898.

18. Del Re Alfonso; 25 giugno 1904.

19. Marcolongo Roberto; 12 marzo 1910.

20. Guccia Giambattista; 1 aprile 1911.

INDICE DELLE MEMORIE

Vol. XV, Serie 2.a N.o 1.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SOPRA UN BERICIDE

DEL CALCARE MIOCENICO DI LECCE, DI ROSIGNANO PIEMONTE E DI MALTA

(*Myripristis melitensis* A. Smith Woodward sp.)

MEMORIA

del s. o. **FRANCESCO BASSANI**

presentata nell'adunanza del dì 7 Maggio 1910

La presente Memoria illustra quattro pesci fossili della famiglia *Berycidae:* due provenienti dal calcare di Lecce, in Terra d'Otranto (*pietra leccese*), uno da quello di Rosignano Monferrato in Piemonte (*pietra da cantoni*), ed uno da quello dell'isola di Malta (*pietra di Malta*). Essa ha lo scopo principale di dimostrare che rappresentano tutti un'unica specie (*Myripristis melitensis* A. Smith Woodward sp.) e di fornire per tal modo un nuovo argomento in favore della contemporaneità di questi tre giacimenti.

Dei due esemplari leccesi, uno, esaminato molto tempo fa da Oronzio Gabriele Costa, si conserva nel Museo geologico dell'Università di Napoli; l'altro fa parte della ricca collezione paleontologica del prof. Cosimo De Giorgi e mi fu gentilmente inviato a scopo di studio da questo benemerito naturalista, al quale la geologia salentina è debitrice di tanti servigi. Quello di Rosignano è di proprietà dell'avv. Candido Lavagno di Roncaglia (Casale Monferrato), dal quale l'ho avuto in comunicazione mercè le pratiche amichevoli dei professori C. F. Parona e P. L. Prever. Quello di Malta si trova nel British Museum di Londra; il dottor Arthur Smith Woodward, che ne aveva trattato anni addietro nel *Geological Magazine* senza darne la figura, mi usò la cortesia, in seguito alla mia preghiera,

di mandarmene una bellissima fotografia, a $^2/_3$ del naturale, consentendo ch'io la pubblicassi in questa memoria, come termine di confronto con gli altri avanzi.

Esprimo la mia riconoscenza ai predetti signori, aggiungendo vivi ringraziamenti al collega prof. A. della Valle, che mise a mia disposizione gli scheletri di *Berycidae* conservati nel Museo di Anatomia comparata dell'Università di Napoli; al mio allievo dott. Geremia D'Erasmo, che mi aiutò efficacemente nella esecuzione delle fotografie e fece con l'abituale precisione le figure di dettaglio, e al signor Ernesto Forma, del R. Istituto geologico di Torino, ch'ebbe la gentilezza di fotografare l'esemplare di Rosignano.

Esemplare del calcare di Lecce

(conservato nel Museo geologico dell'Università di Napoli)

Tav. I, fig. 1, 2, 3, 4 e 5.

L'esemplare, fossilizzato in modo da presentare, in seguito all'isolamento dalla roccia, entrambe le facce, conserva la testa, incompleta, e il tratto anteriore del tronco; manca l'estremità del muso, e il profilo frontale è asportato. È lungo 86 millimetri e alto 79; la lunghezza del capo e dell'apparato opercolare doveva essere di 7 centimetri; quella totale, compresa la coda, di circa 24.

Delle ossa del capo si può dire pochissimo, perchè in parte non esistono più e le altre sono frammentarie e scomposte; però i pezzi che ne rimangono, fra i quali spicca il tratto posteriore della mandibola, si veggono distintamente forniti di rugosità e di minuti tubercoli. Anche l'apparato opercolare (che sul lato destro del frammento è in posto, mentre sul sinistro è dislocato) è in cattive condizioni; il preopercolo e gli avanzi delle altre ossa che lo compongono sono percorsi per una certa estensione da solchi e rilievi diretti verso l'indietro, i quali giungono fino all'orlo posteriore delle dette ossa, che è seghettato. Il preopercolo non è provveduto di spine.

Rimangono deboli vestigia delle pinne addominali, inserite poco dietro l'apparato opercolare, a quattro centimetri dall'angolo posteriore della mandibola. Qualche frammento di raggio si vede percorso da solchi.

Le squame, alte, corte, spesse e notevolmente embricate (più sul lato sinistro che sul destro), si spingono al di là del principio dell'apparato opercolare e sulle guance, come si vede chiaramente nella fig. 1. Alcune conservano ancora lo smalto. La parte posteriore è percorsa da fitti e sottili solchi, quasi paralleli fra loro, che, dirigendosi verso l'indietro, giungono fino al margine ctenoide, un po' irregolare: nelle squame intere se ne contano 35. La parte anteriore, limitata da un orlo lievemente rugoso, è liscia e mostra a fortissimo ingrandimento delle linee concentriche di accrescimento. Il diametro verticale delle squame più grandi è di 17 millimetri; l'orizzontale (calcolato anche il tratto coperto dalla squama precedente) di 7. Sul lato destro del frammento (fig. 1), dall'avanti all'indietro, ne sono conservate undici file; sul sinistro (fig. 2) otto. Dal dorso al ventre le serie sono otto. La linea la-

terale scorre sulla terza serie. A breve distanza dall'inserzione delle pinne ventrali si scorge una piccola squama cordiforme, longitudinalmente carenata, ctenoide (fig. 5).

Del frammento testè descritto trattò molti anni addietro Oronzio Gabriele Costa [1], collocandolo nella fam. *Berycidae*, riferendolo al gen. *Beryx* Cuvier e ritenendolo identico, per le squame, a *Beryx radians* Agassiz, del Cretaceo di Lewes [2].

Calcare di Lecce (Cave sulla via di S. Cesario).

Museo geologico dell'Università di Napoli.

Esemplare del calcare di Lecce

(conservato nella Collezione De Giorgi in Lecce)

Tav. I, fig. 6, 7, 8 e 9.

Quantunque il fossile non sia conservato molto bene e manchi del tratto posteriore del corpo, presenta tuttavia caratteri sufficienti per poter essere determinato.

Esso è lungo quasi 18 centimetri; la sua massima altezza, presa a livello dei primi raggi spinosi della pinna dorsale, è di 8, ed è contenuta un po' meno di 1 volta e $^1/_2$ nella distanza tra l'arco pettorale e la base della pinna codale. La lunghezza della testa e dell'apparato opercolare, misurata dal margine posteriore di questo all'estremità della mascella superiore, è di 72 millimetri. Calcolata la parte asportata, l'esemplare doveva raggiungere (compresa la pinna codale) la lunghezza complessiva di circa 24 centimetri. Il profilo superiore del capo è arcuato e scende quasi tangente all'orbita, che è circolare e ampia. Il profilo infero-posteriore del tronco è incompleto e non permette di determinare esattamente l'altezza del corpo in quella regione.

Dello scheletro della testa (alta 68 mm.) rimangono pochi avanzi, rotti e in parte scomposti. La mascella inferiore è un po' spostata in basso e in avanti, e spezzata nella parte distale. Al pari di questa, i resti di altre ossa della testa e dell'ap-

---

[1]) O. G. Costa, *Paleontologia del Regno di Napoli.* Parte I, presentata il 24 Settembre 1848. In Atti Acc. Pontaniana, vol. V, pag. 282 e 424, tav. IV, fig. 1-5. Napoli, 1853 [pag. 52 e 194, tav. IV, fig. 1-5 dell'estratto, pubblicato nel 1850]. Il frammento fu raccolto nel calcare leccese da Giuseppe Costa (che ne comunicò un cenno all'Accademia degli Aspiranti naturalisti di Napoli nella tornata del 16 Gennaio 1848) « alla profondità di 80 palmi dal livello del suolo, che si eleva 300 palmi all'incirca sopra l'attuale livello del mare ». — O. G. Costa, pur riferendo il fossile di Lecce agli esemplari illustrati dall'Agassiz col nome di *Beryx radians*, rilevava tuttavia giustamente che in questi nessuno dei caratteri del gen. *Beryx* Cuvier è evidente. Infatti il dott. A. Smith Woodward ha recentemente dimostrato (*Catal. of the foss. fishes in the British Museum*, parte IV [1901], p. 122, tav. X, fig. 1-4) ch'essi devono essere ascritti al suo nuovo genere *Ctenothrissa* (*Ct. radians* Ag. sp.), del sottordine degl'*Isospondyli.*

[2]) L. Agassiz, *Recherches sur les poissons fossiles*, vol. IV, pag. 4 e 118, tav. XIV^b, fig. 7, e tav. XIV^c, fig. 7-9.

parato opercolare sono provveduti di rugosità e di minuti tubercoli; qualche osso presenta delle piccole crestine, un po' spaziate, equidistanti fra loro.

Le pinne pettorali non sono conservate.

Delle addominali si vedono solamente un frammento di un raggio molle e diviso, e il raggio spinoso, inserito a circa quattro centimetri dall'angolo posteriore della mandibola e a 60 millimetri dall'origine della pinna anale, lungo, grosso, terminato in punta e percorso da solchi ben distinti, un po' obliqui.

Della pinna dorsale, incompleta, restano sette raggi spinosi, pure solcati, la cui base occupa un'estensione di quattro centimetri, pari alla metà dell'altezza maggiore del corpo. Il terzo raggio, ch'è intero, raggiunge la lunghezza di 25 millimetri, presso a poco corrispondente alla terza parte dell'altezza del pesce, misurata a livello dell'inserzione di detto raggio; i successivi vanno a mano a mano accorciandosi.

La pinna anale è quasi completamente asportata, rimanendo di essa soltanto un raggio spinoso frammentario. Questo è distintamente solcato, come quelli delle pinne precedenti, ed è sorretto da un lungo e robusto interapofisario. Il suo punto d'inserzione è collocato sopra una linea verticale passante a circa un centimetro di distanza dall'ultimo raggio della porzione spinosa della dorsale.

Le squame, della maggior parte delle quali si vede soltanto l'impronta, si spingono fin sulle guance. Esse sono molto embricate ed hanno i due diametri assai disuguali: le maggiori misurano un'altezza di 17 millimetri e una lunghezza di 7 (compresa la parte coperta dalla squama precedente). Il loro margine anteriore è rugoso; l'altro notevolmente ctenoide. La porzione posteriore della loro superficie, smaltata, è percorsa da numerosi solchi, diretti quasi parallelamente verso l'indietro.

In corrispondenza dell'inserzione del primo raggio visibile della porzione spinosa della dorsale, che dev'essere il 3°, se ne contano, a quanto pare, nove file verticali; a livello della fine di detta porzione, otto. Longitudinalmente, dall'orlo posteriore dell'apparato opercolare alla fine del tratto conservato, la serie mediana risulta di 24 squame.

Nella parte distale del corpo, attraverso l'impronta delle squame, s'intravede debolmente la colonna vertebrale, di cui peraltro non è dato ricavare alcun carattere.

Calcare di Lecce (Cave sulla via di S. Cesario).

Collezione De Giorgi in Lecce.

Esemplare del calcare di Rosignano Monferrato (Piemonte)

(di proprietà dell'Avv. Candido Lavagno di Roncaglia)

Tav. II, fig. 1, e Tav. I, fig. 10.

L'esemplare è lungo, dall'estremità anteriore del muso alla base della codale, 19 centimetri; calcolata questa pinna (5 cm.), esso doveva raggiungere la lunghezza complessiva di circa 24. La sua massima altezza, presa a livello dell'inserzione delle pinne ventrali (82 millimetri), è contenuta poco meno di 1 volta e ½ nella distanza tra l'arco pettorale e la base della pinna codale; quella a livello del primo raggio

molle della dorsale è di circa 65 mm. L'altezza della testa è di 7 centimetri; la sua lunghezza (compreso l'apparato opercolare), dal margine posteriore di questo all'estremità anteriore della mascella superiore, è pure di circa 70 millimetri.

Il profilo superiore del capo scende arcuato; l'altro non è interamente visibile, perchè la roccia è stata tagliata a livello dell'orlo inferiore della mandibola, la quale si vede in sezione. Tranne pochi frammenti, che si mostrano percorsi da rugosità, delle ossa della testa rimane soltanto l'impronta; tuttavia si può rilevare i caratteri di alcune di esse. La mascella inferiore sporgeva un po' oltre la superiore. Il mascellare era allargato all'estremità distale. Sul premascellare si scorgono con l'aiuto della lente le tracce di denti minuti. Il preopercolo, nel cui margine posteriore si distinguono ancora varie dentellature, era sprovveduto di spine; l'opercolo aveva verso il suo terzo superiore una breve punta diretta all'indietro; l'orlo posteriore del sottopercolo era diritto, parallelo a quello dell'opercolo.

Il cinto toracico mostra deboli vestigia dei sopraclavicolari e della clavicola; tutto il resto, comprese le pinne, è asportato.

Le estremità addominali sono rappresentate da avanzi frammentarii delle pelvi e da un piccolo pezzo, lungo 12 millimetri, di un raggio distintamente solcato, inserito a livello del secondo raggio spinoso della dorsale, a circa 40 millimetri dal margine posteriore della mascella inferiore e a 60 dall'origine della pinna anale.

La pinna dorsale è distinta in due porzioni: una spinosa e una molle. La porzione spinosa, relativamente bassa, comincia a livello del margine posteriore dell'apparato opercolare, ed occupa con la sua base un'estensione di 65 millimetri, corrispondente all'altezza del tronco misurata a livello del primo raggio molle della pinna in discorso. Essa conserva 10 raggi, solcati e notevolmente spaziati; fra l'uno e l'altro dei sette anteriori corre un intervallo, presso a poco eguale, di otto millimetri; fra il settimo e l'ottavo, di 6; fra l'ottavo e il nono di 4; fra questo e l'ultimo, mal conservato, di 3. Il primo di essi raggiunge 20 millimetri; il secondo e il terzo sono leggermente più lunghi; i successivi si abbreviano lentamente fino al penultimo, che misura 11 millimetri, e all'ultimo, che appare brevissimo. Alcuni di essi mostrano l'estremità prossimale nascosta dalle squame del dorso.

Alla distanza di circa un centimetro segue la porzione molle, la cui base ha un'estensione di 26 millimetri: essa è costituita da circa 14 raggi, delicati e divisi, che dovevano superare in lunghezza i precedenti spinosi. I meglio conservati, che sono l'ottavo e il nono, raggiungono 2 centimetri; l'ultimo dista quasi 25 millimetri dall'origine della coda.

Della pinna anale, che, a quanto pare, era opposta alla porzione molle della dorsale, rimangono tracce debolissime: si scorge soltanto l'impronta di un raggio anteriore spinoso, robusto e solcato, e di qualche altro, molle.

La pinna codale, che doveva essere incavata, è in cattive condizioni: nel lobo superiore sono conservati 11 o 12 raggi divisi e 4 brevi spine esterne; nell'altro le spine e parecchi raggi divisi sono asportati.

Le squame si spingono fino al di là del principio dell'apparato opercolare. Sono in generale assai più alte che lunghe e molto embricate. Le meglio conservate presentano il margine anteriore debolmente rugoso, il posteriore dentellato a guisa di

sega e la superficie libera ancora provveduta di smalto e percorsa da numerose strie, dirette verso l'indietro. Come ho detto, tutte hanno il diametro verticale maggiore di quello antero-posteriore, ma la sproporzione fra i due diametri varia sensibilmente nelle diverse regioni del corpo. Meno considerevole nelle squame che precedono il tronco, aumenta in quelle che rivestono la parte anteriore di questo, specialmente sui fianchi, dove la loro massima altezza (17 mm.) è 2 volte e $^1/_3$ la lunghezza (mm. 7, compresa la parte coperta dalla squama precedente); diminuisce nel tratto posteriore, dove sono alte 12 millimetri e lunghe 5, e si fa anche minore e pressochè insensibile nel pedicello codale, dove qualche squama ha i due diametri quasi eguali. Le squame del dorso abbracciano, come ho già detto, la base dei raggi spinosi della dorsale. A livello del quarto raggio della porzione spinosa di questa pinna se ne contano 9 file verticali; alla fine di detta porzione, 8; sotto la metà della porzione molle, 6 o 7; nel pedicello codale, 4 o 5. Longitudinalmente, lungo una linea tracciata subito sotto la punta sporgente dell'opercolo, le squame sono 32 o 33, delle quali 27 fino al principio del pedicello codale, e 5 o 6 in quest'ultimo.

Calcare delle cave di Rosignano (Castello di Uviglie).

Proprietà dell'avv. C. Lavagno di Roncaglia (Casale Monferrato).

Esemplare del calcare di Malta

(conservato nel British Museum di Londra)

Tav. II, fig. 2 ($^2/_3$ della gr. nat.)

L'esemplare conserva il profilo del tronco abbastanza distinto, al pari dei suoi principali caratteri; sfortunatamente però le ossa della testa, l'arco toracico e le pinne pettorali mancano quasi del tutto, e lo scheletro assiale, coperto dalle squame, è mal discernibile. È lungo 29 centimetri. Quando era completo, doveva raggiungere la lunghezza di circa 37: infatti la testa e la parte dell'apparato opercolare mancante non potevano misurare complessivamente meno di 8 centimetri. La sua maggiore altezza, presa a livello dei primi raggi spinosi della dorsale, misura centimetri 12 $^1/_2$, ed è contenuta poco meno di 1 volta e $^1/_2$ nella distanza tra l'arco pettorale e la base della pinna codale.

Il corpo, elevato e compresso ai lati, si restringe rapidamente all'indietro e finisce in un lungo pedicello codale, che principia subito dietro la fine delle pinne dorsale ed anale.

Le impronte delle ossa opercolari dimostrano che queste erano ornate per una certa estensione da sottili strie e da piccole spine dirette verso l'indietro.

Delle estremità addominali sono ben conservati l'osso pelvico destro, robusto e fornito di una cresta longitudinale mediana, e una pinna, la quale è inserita a 90 millimetri dall'origine dell'anale e risulta di un grosso raggio anteriore spinoso, acuminato e percorso da rilievi più o meno obliqui, e di sette divisi, pure ornati alla base.

La pinna dorsale è distinta in due parti: una, anteriore, spinosa, più svilup-

pata; l'altra, molle. I raggi spinosi, notevolmente robusti e (al pari di quello ventrale) forniti di profondi solchi e di altrettanti rilievi obliqui, si raccorciano mano a mano verso l'indietro; se ne contano sei (?), ma è da notare che, secondo ogni verosimiglianza, parecchi anteriori sono asportati. Essi sono quasi prostrati, parzialmente immersi nel solco formato dalle squame del dorso e addossati l'uno all'altro; per modo che la estensione occupata da essi appare molto minore del vero.

Dei raggi molli, sette, più lunghi dei precedenti, sono nettamente visibili ed occupano con la loro base un'estensione di 33 millimetri; di pochi altri successivi rimangono deboli tracce.

La pinna anale, in cattivo stato, occupa con la sua base un'estensione di sei centimetri, quasi corrispondente alla metà della massima altezza del tronco; finisce a livello dell'estremità posteriore della porzione molle della dorsale, e mostra sul davanti l'impronta di alcune forti spine, scanalate, sorrette da robusti interspinosi, alle quali succedono almeno dieci raggi molli e divisi.

La pinna codale, incavata, presenta in ciascun lobo due o tre brevi spine esterne: il lobo superiore conta 12 o 13 raggi divisi; l'inferiore, imperfetto, ne conserva solamente 11.

Le squame sono grandi e spesse: quelle della parte anteriore del corpo misurano un'altezza variabile da 25 a 28 millimetri e una lunghezza totale di 12; nelle successive l'altezza si fa sempre minore fino alle ultime, in cui i diametri verticale e orizzontale sono quasi eguali. La loro superficie, smaltata, presenta una leggera rugosità, che poi si trasforma in solchi raggiati, intercalati da rilievi, i quali finiscono nelle punte del margine ctenoide. Esse sono notevolmente embricate; la superficie coperta mostra delicate linee concentriche di accrescimento. Dall'esame della figura risulta che, approssimativamente, nella fila verticale di squame a livello del primo raggio dorsale spinoso conservato (che probabilmente è il 6°) esse sono 10, che sono 9 a livello della fine della porzione spinosa della dorsale, 7 od 8 a livello del quinto raggio della porzione molle, e 5 o 6 nel pedicello codale; e che la serie orizzontale di squame alla metà dell'altezza del tronco ne conta, nel tratto conservato, circa 29.

Nella parte posteriore del corpo, sotto le impronte delle squame, s'intravedono le vertebre e alcune lunghe neurapofisi.

Di questo fossile, proveniente dal calcare miocenico di Malta e conservato nella collezione paleontologica del British Museum, trattò nel 1887 il dott. Arthur Smith Woodward [1]), il quale, dopo averlo riferito alla fam. *Berycidae*, notò giustamente che per la separazione della pinna dorsale spinosa dalla molle esso non poteva rap-

---

[1]) A. S. Woodward, *On a new species of Holocentrum from the Miocene of Malta, with a list of fossil Berycidae hitherto described* (Geological Magazine, new series, dec. III, vol. IV, pag. 355, London, 1887). Vedi anche A. S. Woodward, *Cat. of the foss. fishes in the British Museum*, parte IV, pag. 413, London, 1901 Secondo le indicazioni fornite dal march. de Lorne, donatore dell'esemplare, questo proviene da un orizzonte riferibile alla divisione n. 4 della sezione data da Andrew Leith Adams nelle sue *Notes of a naturalist in the Nile Valley and Malta*, pag. 138, Edinburgh, 1870 (arenaria calcarea).

presentare che il gen. *Myripristis* o il gen. *Holocentrum*. Il cattivo stato di conservazione delle ossa opercolari gl'impedì di stabilire con sicurezza a quale dei due generi spettasse l'esemplare; ma, per i caratteri delle pinne impari e per l'aspetto generale, preferì ascriverlo agli *Holocentrum* e ne istituì una specie nuova: *Hol. melitense.*

Calcare di Malta.

British Museum di Londra.

Confronto fra i quattro esemplari descritti

Confrontiamo adesso i quattro esemplari descritti allo scopo di rilevarne i rapporti. Per maggiore comodità li indicherò qualche volta con i numeri seguenti:

n.° 1. Esemplare più piccolo di Lecce (pag. 2, tav. I, fig. 1).
n.° 2. Esemplare più grande di Lecce (pag. 3, tav. I, fig. 2).
n.° 3. Esemplare di Rosignano (pag. 4, tav. II, fig. 1).
n.° 4. Esemplare di Malta (pag. 6, tav. II, fig. 2).

Forma del corpo. Nel n.° 1 la forma del corpo non può definirsi, ma nei numeri 2, 3 e 4 essa si corrisponde. Il profilo superiore della testa è regolarmente arcuato, ed il tronco, elevato e lateralmente compresso, si abbassa rapidamente a livello del termine delle pinne dorsale ed anale, e, nei numeri 3 e 4, si vede finire in un lungo pedicello codale, la cui altezza è contenuta quasi 4 volte e $^1/_2$ nell'altezza maggiore del corpo.

Dimensioni e proporzioni del corpo. Nessuno dei fossili è intero, ma non è difficile calcolare la grandezza delle parti asportate. L'esemplare di Rosignano, pressochè completo, e i due leccesi dovevano essere lunghi circa 24 centimetri; quello di Malta — in cui mancano tutta la testa e parte dell'apparato opercolare, che non potevano misurare complessivamente meno di 8 centimetri — raggiungeva certamente una lunghezza di circa 37. Quanto all'altezza del corpo, essa è, come abbiamo veduto, di 79 e di 80 millimetri negli esemplari di Lecce, di 82 in quello di Rosignano e di quasi 125 in quello maltese. La proporzione fra l'altezza e la lunghezza dell'animale è dunque la stessa (1 : 3). Anche la lunghezza della testa e dell'apparato opercolare può dirsi identica (circa 70 mm.) nei tre esemplari in cui queste parti sono conservate (numeri 1, 2 e 3); così può dirsi identica la proporzione fra la detta lunghezza e la maggiore altezza del capo (1 : 1), e quella fra la lunghezza medesima e la totale (circa 1 : 3, 4). Corrisponde pure il rapporto fra l'altezza massima del corpo e la distanza dall'arco pettorale alla base della coda (1 : 1, 45).

Ossa della testa e dell'apparato opercolare. In tutti quattro gli esemplari le ossa della testa (tranne quelle della regione frontale) sono scolpite da distinte rugosità, intercalate da rilievi più o meno ramificati e tortuosi, i quali talvolta sono interrotti, offrendo l'apparenza di minuti tubercoli. Anche le ossa opercolari si mostrano percorse per una certa estensione da numerose scanalature e da altrettante linee prominenti, che finiscono nel margine posteriore delle dette ossa, seghettato.

Pinne addominali. Negli esemplari ai numeri 1, 2 e 3 le pinne addominali

sono collocate al medesimo livello, cioè ad una distanza dal margine posteriore della mandibola presso a poco eguale alla massima altezza del corpo; d'altra parte, nel n.° 2 esse distano 16 mm. dal livello del primo raggio conservato della porzione spinosa della dorsale (che dev'essere il quarto); e nel n.° 3 stanno a livello del secondo raggio della detta porzione, che è inserito appunto a 16 mm. dal quarto. Nell'esemplare di Malta, privo della testa e di parecchi raggi anteriori spinosi della dorsale, non è dato fissare la posizione relativa delle pinne in discorso, ma si può ritenerlo pressochè corrispondente a quella degli altri tre, quantunque la mancanza delle parti anzidette dia l'apparenza ch'esse sieno inserite più avanti. Infatti lo spazio fra la loro origine e quella dell'anale è nel fossile maltese di 9 centimetri, cioè circa $^3/_4$ della massima altezza del tronco: precisamente così come si osserva nei numeri 2 e 4, che sono alti 8 centimetri e nei quali il predetto spazio è di 6. Inoltre è da riflettere che (in base a ciò che si rileva nell'esemplare di Rosignano) i raggi anteriori della dorsale asportati in quello di Malta dovevano occupare un'estensione basale di circa 60 millimetri, e che questa pinna doveva cominciare a livello di una linea verticale passante lungo il margine posteriore dell'apparato opercolare; per modo che il punto d'inserzione delle pinne addominali può ritenersi presso a poco a livello del secondo di detti raggi dorsali: appunto così come si vede nel pesce di Rosignano.— Quanto al raggio anteriore spinoso, esso è identico in tutti quattro gli esemplari per le scanalature della superficie, e nei numeri 2 e 4 (dov'è conservato integralmente) anche per la lunghezza relativa, che corrisponde ai $^5/_{12}$ della distanza fra le addominali e l'anale ed è contenuta un po' più di 8 volte nella lunghezza totale del corpo.

Pinna dorsale. La pinna dorsale non permette un confronto completo, perchè manca nell'esemplare n.° 1 ed è conservata solo parzialmente negli altri tre. Tuttavia non è difficile ricostruirne con relativa esattezza la porzione spinosa nei numeri 2 e 4. In quest'ultimo (l'ho detto dianzi) i raggi anteriori evidentemente asportati dovevano occupare alla base un'estensione di quasi 60 millimetri, come si ricava dal confronto coi più affini rappresentanti della fam. *Berycidae* e con il fossile di Rosignano, dov'essa è in buono stato, e come risulta dai rapporti topografici esistenti fra detta porzione, l'apparato opercolare e le pinne addominali. Il primo raggio infatti doveva essere inserito presso a poco a livello del margine posteriore dell'opercolo e precedere di un centimetro il livello delle addominali. Per le stesse ragioni è da ritenere come dimostrato che nel n.° 2 mancano i tre primi raggi, i quali occupavano altri 25 millimetri del profilo del dorso. Conseguentemente, la porzione spinosa della pinna dorsale si corrisponde nei tre esemplari in discorso per il numero e la scanalatura dei raggi che la compongono, per l'ampio spazio fra un raggio e l'altro, più accentuato negli anteriori, per la sua posizione e per l'estensione basale, equivalente all'altezza del corpo, misurata a livello del primo raggio molle della dorsale (circa mm. 65 nei numeri 2 e 3; circa mm. 100 nel n.° 4).— Quanto alla porzione molle della pinna in discorso, parzialmente conservata nei numeri 3 e 4, essa occupa in entrambi la stessa posizione, ha la medesima estensione, molto minore di quella della porzione spinosa, ed è costituita da raggi più lunghi dei precedenti.

Pinna anale. Anche la pinna anale — mancante nel n.° 1, quasi interamente asportata nel n.° 2, e in cattivo stato di conservazione nei numeri 3 e 4 — non consente un paragone efficace; in tutti tre gli esemplari, peraltro, è opposta alla porzione molle della dorsale ed ha i raggi spinosi scanalati.

Pinna codale. Presente soltanto nei numeri 3 e 4, ma incompleta anche in essi, la pinna codale è incavata in entrambi ed ha ciascun lobo provveduto esternamente di alcune brevi spine e costituito di circa 12 raggi divisi.

Squame. Se a primo aspetto le squame dei varii esemplari sembrano un po' diverse nella forma, ciò è soltanto apparente, dipendendo dal grado maggiore o minore in cui, per effetto della fossilizzazione, si mostrano embricate. Quando si esaminano con attenzione nei loro particolari, traendoli da squame completamente scoperte, si vede che si corrispondono affatto: grandi, più alte che lunghe, smaltate, spesse; percorse nella parte posteriore da fitti e sottili solchi, quasi paralleli, diretti verso l'indietro e terminanti nelle punte del margine ctenoide; e fornite nella parte anteriore, limitata da un orlo lievemente rugoso, di delicatissime linee concentriche di accrescimento (vedi Tav. I, fig. 7). Nei tre fossili in cui è conservata la testa, si nota ch' esse si spingono al di là dell' apparato opercolare fin sopra le guance. Anche le loro dimensioni e il rapporto fra il diametro orizzontale e quello verticale ($1 : 2\frac{1}{3}$) concordano pienamente: infatti le squame più grandi, collocate nel tratto anteriore del tronco, lungo la linea mediana, misurano mm. 17 di altezza e quasi 7 di lunghezza nei numeri 1, 2 e 3 (lunghi presso a poco 24 centimetri e alti 8), e mm. 28 di altezza e 12 di lunghezza nel n.° 4 (lungo circa 37 centimetri ed alto 12,5). La sproporzione fra i due diametri va mano a mano diminuendo verso la parte posteriore del corpo; nel pedicello codale dei numeri 3 e 4 essi sono quasi eguali. Nè esiste contrasto nel numero delle file verticali e longitudinali di squame, come risulta dal seguente quadro sinottico, nel quale ho creduto opportuno di raccogliere anche alcune altre misure, che rendono vie più efficace il confronto fra i quattro esemplari:

	Esemplare n.° 1 di Lecce	Esemplare n.° 2 di Lecce	Esempl. n.° 3 di Rosignano	Esemplare n.° 4 di Malta
Lunghezza totale del corpo, compresa la coda (parzialmente calcolata) . . .	circa mm. 240	circa mm. 240	circa mm. 240	circa mm. 370
Altezza massima del corpo .	mm. 79	mm. 82	mm. 80	mm. 125
Distanza dal margine posteriore dell' apparato opercolare all'estremità della mascella superiore. . .	mm. 71 (parz. calc.)	mm. 70	mm. 70	circa mm. 105 (parz. calc.)
Lunghezza del tronco . .	circa mm. 120 (parz. calc.)	circa mm. 120 (parz. calc.)	mm. 122	mm. 188
Distanza fra l' inserzione delle pinne addominali e dell'anale	mm. 60 (parz. calc.)	mm. 60	mm. 60	mm. 90
Estensione della porzione spinosa della pinna dorsale	—	circa mm. 65 (parz. calc.)	mm. 65	circa mm. 100 (parz. calc.)
Estensione della porzione molle della pinna dorsale	—	—	mm. 26	circa mm. 40
Altezza massima delle squame (nel tratto anteriore del corpo, lungo la linea mediana)	mm. 17	mm. 17	mm. 17	mm. 28
Lunghezza massima delle stesse	mm. 7	mm. 7	mm. 7	mm. 12
Numero di squame contenute nella fila verticale a livello della maggiore altezza del corpo. . . .	9	9	9	10
Id. a livello della fine della porzione spinosa della pinna dorsale.	—	8	8	9
Id. a livello della metà della porzione molle della pinna dorsale.	—	6 o 7	6 o 7	7 o 8
Id. nel pedicello codale. .	—	—	4 o 5	5 o 6
Numero di squame contenute nella fila longitudinale mediana (dal margine posteriore dell'apparato opercolare alla base della coda)	—	—	32 o 33	32 o 33

Riassumendo, tutti i caratteri che permettono un confronto si corrispondono nei quattro fossili studiati e dimostrano che questi appartengono a una medesima specie.

Determinazione generica e specifica dei quattro fossili

Stabilita l'identità dei quattro fossili, veniamo alla loro determinazione. Come ha detto O. G. Costa per l'esemplare n.° 1 di Lecce e, meglio ancora, il dottor A. Smith Woodward per quello di Malta, essi appartengono alla fam. *Berycidae* per la scoltura delle ossa della testa, per il numero dei raggi addominali, per le particolarità delle pinne impari ecc.

Quanto al genere, non possono riferirsi ad alcuno di quelli che costituiscono la prima sezione della suddetta famiglia, perchè hanno la pinna dorsale divisa, ma devono invece rientrare, come già ha osservato il Woodward, nella seconda, in cui la porzione spinosa della dorsale è separata dalla porzione molle. I generi spettanti a questa seconda sezione sono due: *Holocentrum* e *Myripristis* (viventi nei mari tropicali di entrambi gli emisferi), che hanno, com'è noto, caratteri quasi interamente comuni. Cuvier e Valenciennes scrissero giustamente: « Qui ajouterait aux *Myripristis* une épine au préopercule, lierait un peu davantage leurs deux dorsales et retrancherait quelques rayons à l'anale, en ferait aussitôt des holocentrums [1]) ». Si può dire infatti che i due generi si corrispondono per la forma del corpo, per l'ornamentazione delle ossa della testa (esclusa la regione frontale) e della cintura scapolare, per le strie e le seghettature marginali delle ossa opercolari e delle squame, per il numero dei raggi branchiosteghi e di quelli delle pinne addominali, per la possibilità dei raggi dorsali spinosi d'immergersi, quando la pinna si abbassa, nel solco formato dalle squame del dorso, per l'incisione della coda, per le piccole spine alla base di questa, per i denti minuti ecc.; e che (salvo qualche particolarità d'importanza secondaria) l'unico carattere essenziale che li distingue sta nella presenza in *Holocentrum* di una lunga spina all'angolo posteriore del preopercolo, che manca in *Myripristis*. Come ho già accennato a pag. 7, il dott. Smith Woodward riferì l'ittiolito maltese al gen. *Holocentrum*, perchè lo stato di conservazione dell'esemplare non consentiva di decidere sulla esistenza o sulla mancanza della detta spina; adesso però, essendo risultato che nei due fossili di Lecce e nell'altro di Rosignano, eguali a quello di Malta, non si scorge traccia di essa, si deve concludere che i quattro pesci rappresentano il genere *Myripristis*.

Questa determinazione generica è favorita anche da alcuni altri fatti, che, quantunque abbiano, in parte (specialmente quelli dal V all'VIII), un valore molto relativo, è utile esporre:

I. L'opercolo degli *Holocentrum* ha nella parte superiore due grosse spine, piatte, dirette all'indietro; quello dei *Myripristis*, invece, è fornito di una sola punta, come si vede nell'esemplare di Rosignano.

II. Nei *Myripristis* la mascella inferiore è prominente: così è nel fossile piemontese (n.° 3) e, può dirsi, anche nel n.° 2 di Lecce, per quanto essa sia spezzata e spostata.

[1]) Cuvier et Valenciennes, *Histoire naturelle des poissons*, vol. III, p. 183.

III. La distanza fra la porzione spinosa e la porzione molle della pinna dorsale è maggiore nei *Myripristis* che negli *Holocentrum*, dove le due parti quasi si toccano: tale distanza, non inferiore a un centimetro, è evidente nell'esemplare n.° 2 e, meglio ancora, nel n.° 3. È vero che il Woodward osservò che nel pesce di Malta la prossimità fra esse appare considerevole; ma giova notare che questo carattere non può rilevarsi con precisione, perchè i raggi spinosi che ancora rimangono sono quasi prostrati, parzialmente immersi nel solco formato dalle squame del dorso, e addossati l'uno all'altro ed alla porzione molle.

IV. Le squame contenute nella linea longitudinale mediana, dal margine posteriore dell'apparato opercolare alla fine del pedicello codale, sono in generale molto più numerose nel gen. *Holocentrum* che nel gen. *Myripristis*; nel primo, infatti, superano frequentemente le 50 (55 nell'*Hol. longipinne* [1])) e — salvo poche specie, che ne hanno da 35 a 39 — sono da 40 a 50; nel secondo invece, tolta una specie (*Myr. lima* Cuv. et Val.), sono sempre meno di 40 e talvolta anche meno di 30. Nei fossili di Rosignano e di Malta esse sono, come abbiamo veduto, 32 o 33.

V. Negli *Holocentrum* la porzione spinosa della pinna dorsale, costituita in via eccezionale di 10 raggi, ne conta quasi costantemente 11 e qualche volta 12; nei *Myripristis* invece sono rarissimamente 11 e quasi sempre 10. E appunto 10 sono nel fossile di Rosignano.

VI. Soltanto in qualche specie di *Holocentrum* la pinna anale conta 10 o 11 raggi molli; in tutte le altre, numerosissime, essi sono 9; nei *Myripristis*, invece, sono qualche rara volta 11 o 12, e quasi sempre 13 o 14. Nell'esemplare maltese ne sono conservati *almeno* 10.

VII. Le impronte dei raggi spinosi della pinna anale nel n.° 3 e sopratutto nel n.° 4 richiamano a preferenza i *Myripristis*, nei quali tali raggi, benchè robusti, non raggiungono mai le notevoli dimensioni presentate da quelli del gen. *Holocentrum*, in cui il terzo raggio assume, in paragone degli altri, uno sviluppo enorme, che le predette impronte non consentono di ammettere. Altrettanto può dirsi per l'interspinoso del n.° 2, che ha, in via assoluta e in via relativa, una grandezza notevolmente minore di quella degli *Holocentrum*.

VIII. Il profilo superiore del teschio nei numeri 2 e 3 si avvicina meglio a quello dei *Myripristis*, nei quali di solito è maggiormente arcuato, che non a quello degli *Holocentrum*, in cui scende obliquo.

Quanto alla determinazione specifica, è facile il confronto dei nostri esemplari con le specie fossili, che (se pur tali sono) sommano a due, provenienti dal calcare eocenico di Monte Bolca — *M. leptacanthus* Agassiz e *M. homopterygius* id. [2]) —, dalle quali si distinguono per la forma e le proporzioni del corpo e per il numero dei raggi delle pinne impari. Più difficile è il paragone con le specie viventi, istituite in gran copia e molto affini tra loro. Essi presentano strette analogie sopratutto con *M. Jacobus* Cuv. et Val. [3]), a cui si avvicinano per i caratteri dell'opercolo, per la scol-

---

[1]) Cuvier et Valenciennes, *Loc. cit.*, pag. 185.

[2]) L. Agassiz, *Poiss. foss.*, vol. IV, pag. 111 e 112, tav. 15, fig. 3 e 4.

[3]) Cuvier et Valenciennes, *Loc. cit.*, pag. 162.

tura della mascella inferiore, per le particolarità delle pinne dorsale ed anale e presso a poco anche per il numero di squame contenute nella linea longitudinale mediana; ma ne differiscono alquanto per la forma del corpo, un po' più slanciata, e specialmente per il numero dei raggi divisi della pinna codale, che richiama quello riscontrato dal Günther nel suo *Myripristis trachypoma* $\left(\frac{4-3}{25}\right)$ [1]. — Cuvier e Valenciennes notarono pure che nel *M. Jacobus* nessuna pinna ha alla sua base squame di forma speciale: potrebbe quindi darsi che un'altra particolarità dei nostri fossili consistesse nella squama cordiforme che si vede nel n.° 1 di Lecce (Tav. I, fig. 5) vicino alle pinne addominali; ma a questo carattere non si può dare molta importanza, perchè probabilmente la squama in discorso è fuori di posto.

In complesso, i nostri quattro fossili rappresentano una specie nuova, già stabilita dal dott. Woodward:

Myripristis melitensis (A. Smith Woodward)

distinta dai caratteri seguenti:

Lunghezza da 24 a 37 centimetri. Massima altezza del tronco contenuta 3 volte nella complessiva lunghezza e poco meno di 1 volta e $^1/_2$ nella distanza dall'arco pettorale alla base della codale. Lunghezza della testa e dell'apparato opercolare compresa circa 3 volte e $^1/_2$ nella totale. Porzione spinosa della pinna dorsale con 10 raggi, molto spaziati; porzione molle con circa 14, più lunghi dei precedenti; estensione della detta porzione spinosa equivalente a 2 volte e $^1/_2$ quella della molle. Pinna anale con almeno 10 raggi molli. Pinna codale con 4 brevi spine alla base e con 12 o 13 raggi divisi per ogni lobo. Raggi spinosi della dorsale, dell'anale e delle addominali percorsi da solchi più o meno obliqui. Squame molto grandi, più alte che lunghe, notevolmente embricate, fornite nel tratto scoperto di strie fitte, sottili e quasi parallele, che possono raggiungere il numero di 35 e che finiscono nel margine posteriore, fortemente ctenoide: il diametro verticale delle squame maggiori, collocate nella parte anteriore del tronco, corrisponde a 2 volte e $^1/_3$ quello orizzontale. Squame contenute nella fila longitudinale mediana, dal margine posteriore dell'apparato opercolare alla fine del pedicello codale, 32 o 33.

CONCHIUSIONE

Il *Myripristis melitensis* è comune ai tre giacimenti di Lecce, di Rosignano Piemonte e di Malta. Esso ne aumenta i rapporti paleontologici e fornisce un nuovo argomento in favore della loro contemporaneità, confermando l'età langhiana del deposito di Rosignano, già indicata da qualche autore e recentemente sostenuta con il corredo di nuovi fatti dal dott. P. L. Prever [2]).

Finita di stampare il dì 30 Marzo 1911

[1]) A. Günther, *Catal. of the acanth. fishes in the collection of the British Museum*, vol. I, pag. 25.

[2]) P. L. Prever, *Le formazioni ad orbitoidi di Rosignano Piemonte e dintorni* (Bollettino della Società geologica italiana, vol. XXVIII [1909], pagine 145-156).

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tav. I.

Fig. 1 e 2. *Myripristis melitensis* A. S. Woodward sp. (gr. nat.), visto sul lato destro (fig. 1) e sul sinistro (fig. 2). — Calcare di Lecce (Cave sulla via di S. Cesario) [Esemplare conservato nel Museo di geologia e di paleontologia dell'Università di Napoli].

» 3. *Id.* — Squame della regione anteriore mediana del tronco (ingr.).

» 4. *Id.* — Margine ctenoide delle stesse (molto ingr.).

» 5. *Id.* — Squama cordiforme, presso l'inserzione delle pinne addominali (ingr.).

» 6. *Myripristis melitensis* (gr. nat.). — Calcare di Lecce (Cave sulla via di S. Cesario) [Esemplare conservato nella Collezione De Giorgi in Lecce].

» 7. *Id.* — Squama della regione anteriore del tronco (ingr.).

» 8. *Id.* — Raggio spinoso di una pinna addominale (ingr.).

» 9. *Id.* — Penultimo raggio della porzione spinosa della pinna dorsale (ingr.).

» 10. Schema dell'apparato opercolare (impronta interna) dell'esemplare di *Myr. melitensis* proveniente dalle cave di Rosignano e riprodotto alla Tav. II, fig. 1 (grand. nat.).

Tav. II.

Fig. 1. *Myripristis melitensis* (grand. nat.). — Calcare delle cave di Rosignano Piemonte (Castello di Uviglie). [Esemplare di proprietà dell'avv. Candido Lavagno di Roncaglia (Casale Monferrato)].

» 2. *Myripristis melitensis* ($^2/_3$ della gr. nat.).—Calcare di Malta. [Esemplare conservato nel British Museum di Londra. — Fotografia gentilmente comunicata dal dott. A. Smith Woodward].

7 8 9 10 5 3 4

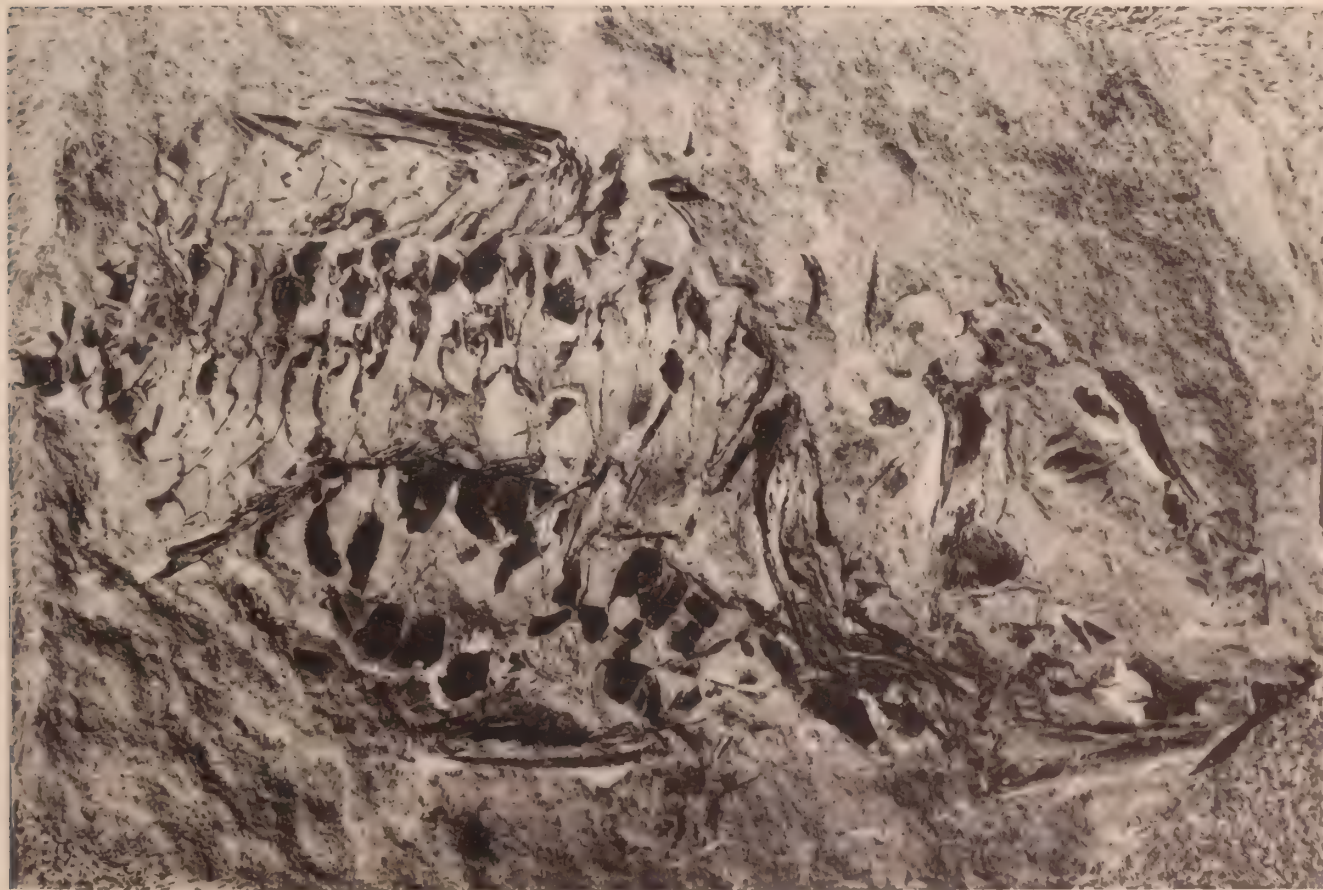
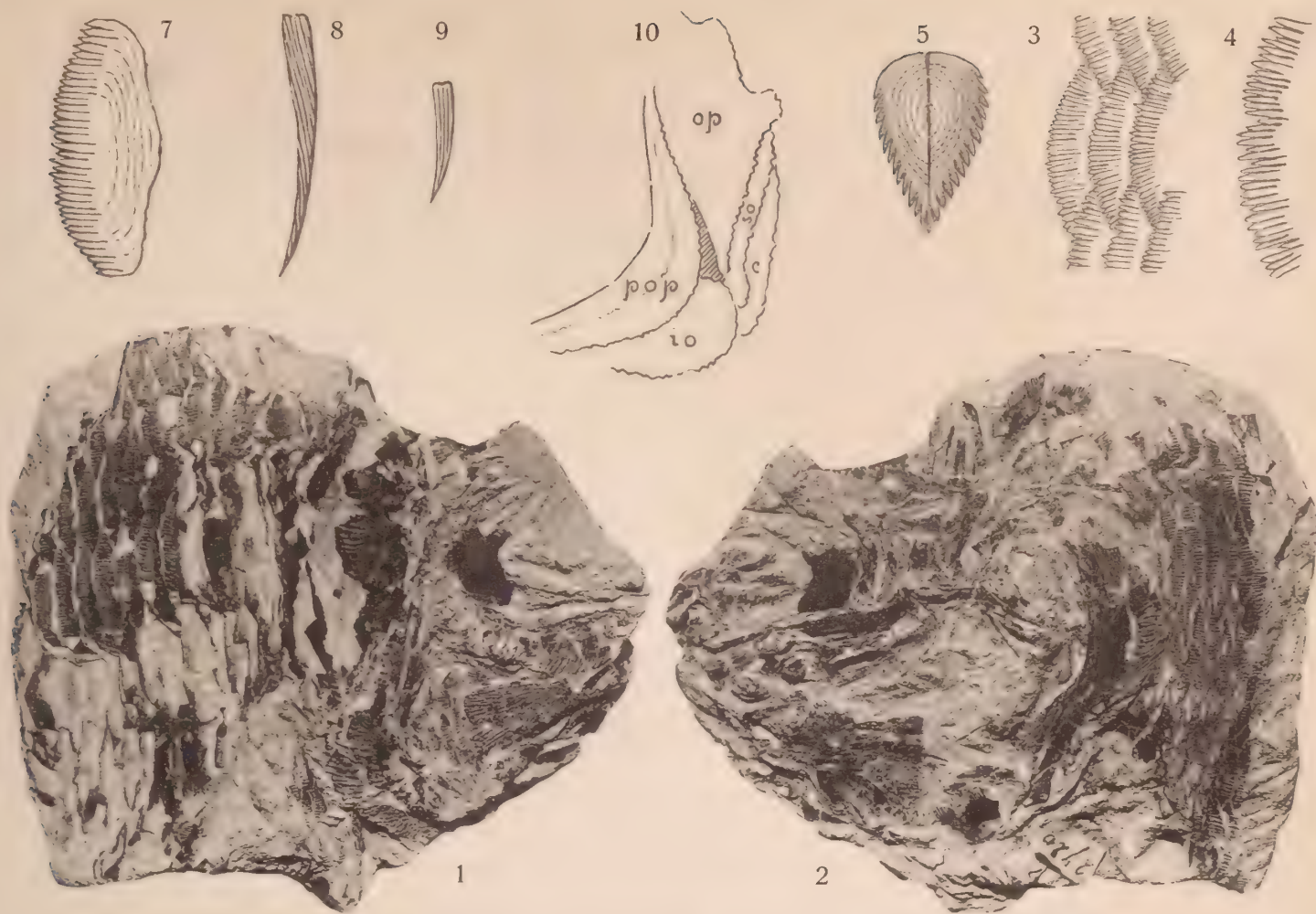
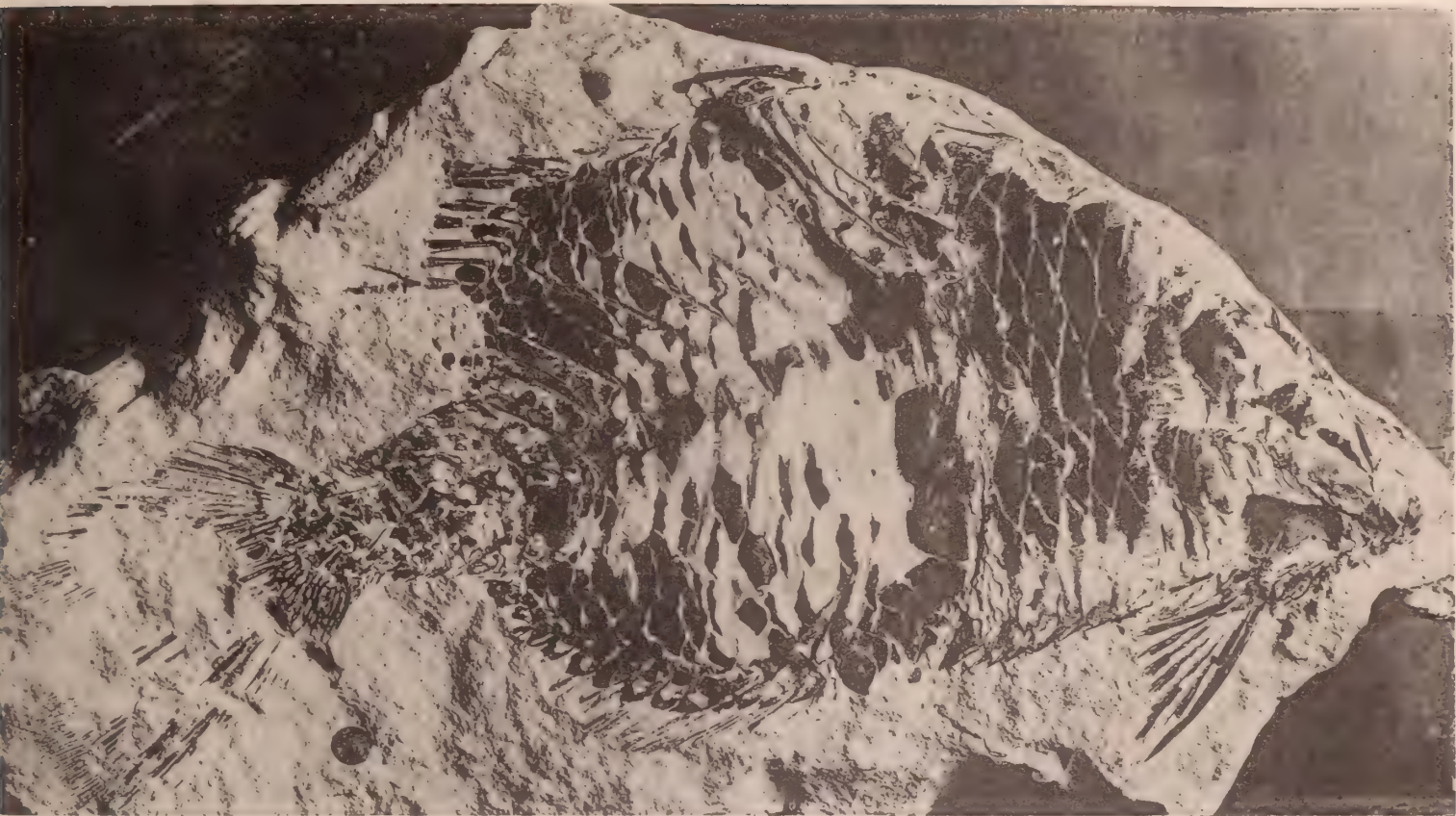
op so c pop io

1 2

6

2 ($\frac{2}{3}$)

1

Vol. XV, Serie 2.ª N.° 2.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

RICERCHE SULLA INNERVAZIONE DEL CUORE

I. — RETTILI E BATRACI

MEMORIA

del dottor MARCO FEDELE

presentata nell'adunanza del dì 3 Dicembre 1910

Introduzione e Cenno storico.

Limitarsi oggi a ricercare in questa o quella parte del cuore elementi nervosi parmi opera vana, poichè non è più il caso di ricerche frammentarie e frazionate ma di analisi complete ed esaurienti, per preparare all'esperimento una sicura base di fatto. Ed è certo la mancanza di questi lavori integrali che ha provocato tante contraddizioni e tante disparate ipotesi intorno ai numerosi fenomeni del miocardio. Finanche le esperienze più classiche, non escluse le recentissime del Carlson, non sono esenti da un certo semplicismo; poichè, a voler essere esatti, molte particolarità anatomiche furono in esse o trascurate o ignorate; come p. es. il negare nel cuore di *Limulus* altre cellule all'infuori di quelle localizzate nel cordone medio dorsale e al principio delle branche trasverse.

Esaminando col cloruro d'oro qualche cuore di *Limulus* mi riuscì agevole vedere che, oltre ai nervi e cellule descritti dal Carlson, trovansi alla superficie del cuore reti di fibre in cui sono intercalate cellule nervose, chiare, nette, evidenti cellule nervose che non han niente da vedere con i nodi del reticolo a cui l'illustre fisiologo americano accennò nei suoi lavori.

Se le cellule che tanti ricercatori, e lo stesso Carlson nella Salamandra, si affaticarono a scoprire disseminate nelle diverse parti del muscolo cardiaco hanno il loro significato e la loro importanza, non si vorrà negar certo a questi sparsi elementi cellulari del cuore di *Limulus* uno scopo, una funzione; specialmente se pensiamo che del compito del sistema nervoso intracardiaco noi non sappiamo i limiti nè potremmo ancora precisarli.

Un altro inconveniente che deriverebbe dallo studio frazionato e saltuario dei nervi del cuore sarebbe quello di descrivere su preparati avuti col metodo dell'ar-

gento ridotto o con la colorazione vitale ciò che Lee e ciò che Remak ci hanno insegnato con lo scalpello od altri con metodi tecnici imperfetti ma con sicuro e sano discernimento critico. Non vi sono anche oggi autori che si affaticano a dimostrare la esistenza di qualche ganglio nell'interno del miocardio dei Mammiferi quando, fin dal 1794, Scarpa ce ne aveva data la descrizione?

« Praecipui autem nervorum Cardiacorum trunci ad basim cordis, et inter majora vasa arteriosa intumescunt in vera et genuina ganglia; in Equo autem, et Bove etiam ex iis ramis Cardiacorum, qui per cordis superficiem reptant nonnulli olivaria corpora gignunt » (pag. 2, XII).

Inoltre a Scarpa spetta il vanto di aver per primo dimostrato che i nervi cardiaci non erano destinati ai vasi, — come allora sosteneva il Behrends, allievo del Soemmering, — e che i nervi dai vasi si scompagnano e vanno al miocardio.

Fu solamente nel 1844, cioè cinquanta anni dopo, che vennero le ricerche del Remak a cui a torto si attribuisce comunemente la scoperta dei gangli cardiaci. Egli studiò il cuore di vitello dimostrandovi nervi e gangli nel ventricolo nonchè i gangli che poi ebbero il suo nome.

Che il ventricolo dunque dei Mammiferi sia fornito di gangli ce lo dissero lo scalpello e l'acume di questi accurati osservatori; la conferma poi che questi gangli esistessero e si allogassero fin nella profonda trama del miocardio la dobbiamo a Robert Lee il quale, riferendosi per la descrizione alle magnifiche tavole del suo lavoro, dice che esse non rappresentano che i gangli superficiali, cioè una piccolissima parte di quelli da lui messi in evidenza con la dissezione « numerous ganglia being formed in the walls of the heart wich no artist can represent ».

È vero che i risultati del Lee furono contestati dal Kölliker, dal Dogiel e dal Vignal, poichè si disse che questo ricercatore aveva scambiato degli ispessimenti della guaina congiuntiva per gangli; ma non è men vero che gli oppositori non usarono una tecnica impeccabile e che i lavori più recenti anche dello stesso Dogiel e i recentissimi del Waledinsky danno la conferma sicura, indiscutibile della presenza di numerosi gangli alla superficie e nell'interno della trama ventricolare.

Uno sguardo alle vicende degli studii sulla ricerca dei gangli del cuore ci farà vedere come la realtà della presenza di gangli, specialmente alla superficie e nell'interno del ventricolo dei Mammiferi, ha fatto il cammino di tutte le verità, e cioè, prima smentita, è ritornata poi più abbellita, più raffinata, ma sostanzialmente uguale a sè stessa.

Si apre nel 1848 la serie di ricerche sulla Rana con quelle di Ludwig il quale seguì per un tratto il vago negli atrii descrivendone una parte dei gangli; ma la tecnica di allora non gli permise di andare oltre dietro le quistioni che egli si poneva.

E venne nel 1852 Bidder il quale seguì i rami del vago sino al ventricolo, dandone la descrizione completa, ma senza vederne con esattezza i rapporti distali essendo la posizione di questi gangli anatomicamente atriale, e senza d'altra parte seguire le fibre che da essi vanno nella compagine ventricolare, poichè i rami che da essi partono molto presto « dem Auge sich entziehen ».

Schklarewsky, — contrariamente al fisiologo Friedeländer che sosteneva trovarsi le cellule gangliari in ogni parte del muscolo cardiaco, — le localizzava ai

solchi atrio-ventricolare ed interatriale; e Dogiel, nelle sue prime ricerche pubblicate nel 1877, trovava che nel cuore di Rana, Testudo, Pesci, Uccelli, Mammiferi non escluso l'Uomo, havvi regolarmente cellule gangliari nello sbocco delle grosse vene nel cuore e nel solco atrio-ventricolare, ma che queste non penetrano però mai negli strati profondi della musculatura, restando fra i fasci superficiali del cuore.

Ma lo stesso A. nel 1882, studiando sul ventricolo di Rana, — oltre a gran numero di fibre nervose a doppio contorno che vanno parte nella parete ventricolare, sotto l'endotelio dell'endocardio, parte fra i fasci muscolari, — trovò anche gruppi di cellule per cui egli propone il nome di *gangli ventricolari*, per distinguerli dai gangli del Bidder che egli chiama *atrio-ventricolari*.

In un terzo lavoro Dogiel studia nel 1890, insieme con Tumänzew, particolarmente il cuore di Rana dimostrando la presenza di cellule ganglionari alla base del bulbo. Nell' ultima parte del lavoro, — che ne è anche la più superficiale, — gli autori trovano delle analogie nel modo di innervazione del Tritone e della Rana che, come io dimostrerò, sono assolutamente insussistenti.

D'altra parte Löwit già nel 1881 descrisse un ammasso ganglionare nel setto del bulbo con cellule a prolungamenti a T o Y, ma Engelmann, in un suo lavoro pubblicato l'anno dopo, smentiva l'esistenza di queste cellule che poi Tumänzew doveva riaffermare e Carlson dimostrare anche nella Salamandra.

Klug trova, anche nel 1881, che nel cuore di Rana « in dem primären Geflecht der Ventrikelwand findet man neben blassen auch doppelt contourirte Nervenfasern, aber keine Nervenzellen » ; ed inoltre che non esiste unione diretta fra le fibre del vago proveniente dal centro e le cellule nervose del vago cardiaco.

Le ricerche di Vignal, eseguite nello stesso anno su tutte le classi dei Vertebrati, gli fanno concludere che nel cuore dei Pesci si trovano dei gruppi di cellule nervose: uno appartenente al simpatico (cellule uninucleate), e il secondo, fatto di cellule bipolari e binucleate, e appartenente al sistema cerebrospinale.

Ad ognuna delle due specie di gruppi cellulari Vignal attribuisce una funzione eccitomotrice o inibitrice e le cellule della prima specie le localizza nel ventricolo, quelle della seconda specie nell'atrio.

Kasem-Beck nel 1885 cercò controllare le conclusioni di Vignal studiando *Testudo caspica*, cane, scimmia ed uomo; ma i suoi risultati non parlano in favore della presenza dei due gruppi cellulari negli animali studiati.

Per Eisenlohr (1886) non esistevano cellule nervose nei muscoli del cuore umano. — Arnstein vide nella Rana e nel Coniglio delle cellule gangliari il cui prolungamento unico andava a mettersi in diretta relazione con i fasci muscolari.— Lahousse trovò nelle cellule del setto della Rana una capsula più o meno ricca di nuclei.

Nel 1893 Berkley, in un lavoro per tanto imperfetto per quanto ne è pomposo il titolo, studia col metodo di Golgi il ventricolo del cuore di rana, sorcio e topo bianco. I suoi risultati sono, a confessione anche dell'autore, molto imperfetti, ma non pertanto egli descrive nel ventricolo, — oltre a dei rigonfiamenti arrotondati sul cammino di alcune fibre, da considerarsi come cellule bipolari a funzione probabilmente sensitive, — anche delle cellule nervose bi- o multipolari le cui terminazioni sfuggono alla osservazione.

L'anno dopo Heymans e Demoor non riconoscono in questi elementi alcuno dei caratteri delle cellule gangliari ed inoltre credono che certe formazioni cellulari interfascicolari possano ritenersi analoghe alle cellule nevrogliche.

Essi non ottennero risultati sicuri sopra la innervazione delle valvole cardiache, come li ebbe contemporaneamente Jacques. Studiando questi i nervi del cuore nella Rana e nei Mammiferi vi dimostrò numerosi piccoli gangli annessi al plesso sottopericardico — principalmente a livello del solco interauriculare e auricolo-ventricolare — come pure alla superficie delle orecchiette e dei ventricoli, per una estensione variabile che raggiunge facilmente la metà superiore di quest'ultima parte. Questi gangli avrebbero come elementi predominanti cellule multipolari analoghe a quelle dei rigonfiamenti del cordone simpatico nel solco auricolo-ventricolare e nel ventricolo, mentre nel solco interauricolare predominerebbe la forma unipolare.

Secondo Schmidt poi (1897) le cellule nervose dei gangli cardiaci sarebbero circondate da una rete o nido pericellulare, da cui si distaccherebbero almeno due fibre nervose ciascuna con direzione differente; la cellula gangliare si troverebbe così, supponendo una estremità in rapporto col cuore e l'altra con i centri nervosi, sotto una doppia influenza, l'una di origine periferica, di origine centrale l'altra.

Fra i lavori più recenti quelli di Wilson (1909), per quanto da un lato non aggiungono niente di essenzialmente diverso a quello che già conoscevamo sulla innervazione generale del miocardio, sono dall'altro canto interessantissimi, poichè tolgono ai miogenisti l'argomento, in cui tanta importanza si poneva, della conduzione miogena attraverso gli elementi muscolari del fascio atrio-ventricolare. Egli in due sue brevi Note in cui esponeva succintamente alcuni risultati e considerazioni sul fascio atrio-ventricolare concludeva che: « considering the neurogenetic as opposed to the myogenic hypotesis from the anatomical standpoint, one must acknowledge that the very complex nerve constituents of the bundle indicate an important nerve path-way and are very suggestive of an intricate nerve mechanisme ».

Nel suo lavoro completo, pubblicato poco dopo, egli fa uno studio accurato del fascio e vi descrive numerose cellule gangliari mono-, bi-, multipolari i cui processi si distribuiscono tanto ai gangli adiacenti nel fascio quanto alle sue fibre, nonchè altre cellule i cui prolungamenti attraversano tutto il fascio. Descrive quindi abbondanti fibre correnti in fasci e con la stessa distribuzione di quelle originantisi dalle cellule ed infine un intricato plesso di fibrille varicose intorno ed in stretta relazione con le fibre muscolari del fascio.

Marie Imchanitzky (1909) studiando i nervi del cuore nella *Lacerta ocellata* vi trova che « ein bisher nicht beschriebenen Nervenplexus mit eingelagerten sehr grossen und kleineren Ganglienhaufen verbindet die Vorhöfe der Eidechsenherzen mit der Kammer ». L'A. ritiene che questo plesso presieda alla coordinazione del ritmo cardiaco e appoggia la sua ipotesi sulla supposizione che non vi siano legami muscolari fra atrio e ventricolo. Io spero di pubblicare fra breve i risultati di alcune mie ricerche sull'anatomia del cuore in cui dimostrerò che non v'è discontinuità nella musculatura atrio-ventricolare sia nella Rana sia nei Rettili (fra cui la *Lacerta muralis*) e che è tempo quindi per i neurogenisti di abbandonare questo argomento falso e del resto superfluo.

Max Lixauer (1909), studiando il cuore umano, trova cellule nervose soltanto nella regione atriale e solamente nell'epicardio: « Meine Untersuchungen führten zu dem Ergebniss, dass die von Schwartz an Rattenherzen gemachten Beobachtungen ueber die Lage der Ganglienzellen auch für das menschliche Herz zutreffend sind, dass insbesondere das Gebiet der Ventrikel vollkommen frei ist von Ganglienzellen » (pag. 221).

Anche Eiger (1909) trova che « in den Kammerwänden gibt es keine spezielle Ganglien » e che i pochi gangli che si incontrano qua e là nei tagli superficiali del ventricolo sono piccolissimi e pochissimo costanti.

Ultimamente però il Waledinsky (1910), confortato anche dalla conferma del suo maestro Smirnow, studiando il ventricolo di vitello, pecora, uomo, cane, volpe trova in tutti gangli nervosi nelle pareti del ventricolo, e nella volpe fin nel setto ventricolare. « Wie aus dem Angeführten auf das deutlichste zu ersehen ist weisen die Herzen der von mir untersuchten Säugtiere unzweifelhaft und konstant Nervenganglien auf, die im Epicard und zuweilen zum Teil im bindgewebigen Interstitium der oberflächlichen Schicht des Myocards liegen » (pag. 472).

***

Ma quali sono i rapporti degli elementi nervosi con il miocardio? vi sono intimi legami fra fibre nervose e muscolari? e quali sono questi rapporti? e che significato hanno? Cercherò brevemente riassumere ciò che conosciamo intorno a questo interessantissimo argomento.

Ho già detto avanti come Bidder non potè seguire nella Rana le fibre nella compagine ventricolare; aggiungo ora che in un suo lavoro successivo l'A. cerca in certo modo colmare questa lacuna e che, contemporaneamente a lui, da una parte Krause affermava che « die doppelcontourirten Nervenfasern des Herzmuskels endigen mit motorischen Endplatten » e dall'altra Schweiger-Seidel estendeva ai Mammiferi la rete perimuscolare descritta da Kölliker nei fasci miocardici della Rana; ma dove cominciano veramente le ricerche sul modo di terminarsi delle fibre cardiache nel miocardio è nel lavoro di Langerhans su Salamandra, Leuciscus, Rana e Cane. I metodi però sono ancora primitivi ed in questo autore vedesi la tendenza che è durata parecchio di dare interpretazione di fibre nervose a piccoli filamenti attaccati a fibrocellule muscolari isolate.

Come vedesi mancando il maggiore, anzi l'unico argomento — i rapporti — per sostenere la natura di questi filamenti si cade nelle discussioni interminabilmente oziose. Del resto io dimostrerò in prosieguo che le fibre muscolari del cuore sono avvolte in una ricca rete di fibrille connettivali che faranno vedere come Langerhans e Ranvier ed altri hanno avuto torto a basare le loro conclusioni sopra fatti di natura così incerta.

Così Gerlach nel 1876, applicando per primo il metodo dell'oro, diceva: « Wenn wir nun an der gewonnen Resultate die drei genannten Muskelarten rücksichtlich des terminalen Verhaltens ihrer Nerven mit einander vergleichen so finden wir, dass nicht mehr so bedeutende Differenzen vorliegen, wie früher allgemein angenommen wurde, als man den quergestreiften Muskelfasern plattenförmige motorische

Endorgane zuerkannt und die Nerven der glatten Muskeln in der Kernen der Zelle endigen liess ».

Nel 1883 von Openchowski conclude fra l'altro 1) che dal plesso fondamentale descritto da Gerlach vanno fibre terminali sulle cellule muscolari e quivi terminano con *rigonfiamenti, bottoni terminali*, *piastre motrici*, 2) che ogni cellula possiede una terminazione, e che « der Kern der Zelle hat nichts mit den Nervenenden zu thun » (pag. 418). Il sistema di giudicare dalle figure è forse arrischiato, ma trattandosi qui di dati puramente morfologici, mi par di poter dire che l'A. va nelle conclusioni molto più lungi che i fatti glielo consentino, anzi parmi che egli crei addirittura. La incompletezza dei risultati di questo autore si vedrà meglio quando avrò esposto i miei risultati avuti con l'istesso metodo (clor. d'oro) ed altri negl'istessi animali da lui studiati.

Più tardi Ranvier, ripigliando alcune idee di Langerhans e fondandosi più sulle ipotesi che sui fatti obbiettivi, sosteneva che : « la fibrille nerveuse pénètre dans les travées musculaires, s'y divise, et les fibrilles nerveuses qui en resultent traversent les cellules musculaires au niveau de leur masse protoplasmique centrale ou marginale, de telle sorte que les cellules placées en séries longitudinales se trouvent enfilées comme les grains d'un chapelet ». La rete muscolare conterrebbe così dentro le sue travate un plesso nervoso che ne ripete esattamente la forma. Sembrando poi impossibile che dei nervi motori terminassero con un semplice plesso, all'A. pare verosimile, ma confessa di non esser riuscito a dimostrarlo, che dalle fibrille del plesso intramuscolare piccoli rami si stacchino per terminarsi liberamente.

Anche Retzius ammette delle terminazioni molto simili a quelle delle più semplici forme di terminazioni dei muscoli volontari, per quanto egli neghi d'altra parte la presenza di placche terminali, che anche Ramon y Cajal nega.

Le ammette però Barkley, ma i suoi risultati, debbo ripeterlo, non mi sembrano molto sicuri, poichè egli ottenne *più o meno complete impregnazioni* in solo un centocinquanta sezioni.

Del resto anche Jacques, a proposito delle complesse terminazioni descritte dal Berkley, dice che ha gran pena « à admettre la réalité de leur existence ».

Jacques a sua volta descrive terminazioni a bottoni laterali voluminosi e irregolari, assimilandole al tipo delle terminazioni analoghe a quelle descritte da Retzius nei muscoli striati di diversi animali inferiori, e terminazioni a piccoli bottoni terminali, avvicinandole piuttosto a terminazioni sensitive.

Lo stesso A. riconosce però che qualcuna delle terminazioni da lui descritte erano già state ritenute da Berkley come « imprégnation vicieuse au point d'entrecroisement de deux fibres » (pag. 637).

Smirnow, in due Memorie, descrive delle formazioni che egli ritiene terminazioni sensitive e motrici, ma, a guardare gli esempi che dà specialmente per la Rana, nasce subito il sospetto che esse non siano dovute a difetto di colorazione; specialmente poi se guardiamo i risultati che ha avuto a questo riguardo l'Hofmann nel suo bel lavoro sulla Rana.

Anche il lavoro di Mikailow, che studia le terminazioni dell'endocardio di cavallo, meriterebbe una conferma; e d'altronde, ammesso anche la esistenza in qualche, concediamo anche, in molti animali di terminazioni di questa o quella specie, di

quanto si chiarirebbe per la loro presenza il problema del modo con cui i nervi fanno sentire la loro influenza sul miocardio? Non in questa o quell'altra particolarità istologica va fondata questa interpretazione, non su un fatto peculiare ad una o più specie, ma in ciò che vi è di comune, in ciò che vi è di essenziale, di immutabile, poichè essenzialmente uguale è il fenomeno del ritmo nel cuore di tutti i Vertebrati.

Riassumendo e concludendo noi possiamo dire che, malgrado i dispareri e le contraddizioni, i fatti anatomici che si son raccolti in più di un secolo di ricerche sono tutti per la origine nevrogena del ritmo, e, anche prescindendo dalle semplici e dimostrative ricerche del Carlson sul *Limulus*, chi volesse oggi ancora sostenere la conduzione miogena nel cuore dovrebbe fare astrazione da troppi chiari ed oramai sicuri fatti anatomici. Forse un giorno sarà possibile sui Vertebrati dimostrare con la stessa chiarezza ciò che fu visto in un crostaceo, se noi però arriveremo a possedere notizie anatomiche sicure e complete anche su poche specie.

Tecnica e materiale di studio.

Accennerò brevemente ai metodi che mi aiutarono in queste ricerche.

Per lo studio dei gangli, oltre ai metodi ordinarii (fissazione sublimato ecc. e color. Biondi, Emateina IA ecc.) mi sono avvalso principalmente del cloruro d'oro e del metodo dell'argento ridotto del Cajal.

Il cloruro d'oro fu usato previa azione dell'acido formico ad $^1/_3$, del succo di limone o senza; fu usato per le sezioni e per le dilacerazioni e mi riuscì preziosissimo per preparati in toto, con i quali potei stabilire con grande precisione la configurazione e la topografia dei gangli, dei nervi, e i loro mutui rapporti.

Il metodo di Cajal mi fu utilissimo nelle sezioni e con il suo aiuto potei studiare, oltre a le più delicate reti del miocardio, anche i gangli del setto interatriale nei Rettili ed i gangli del tronco specialmente negli Ofidi dove, con delicatissime e riuscite reazioni, potei vedere fin la struttura neurofibrillare degli elementi gangliari più cospicui. Per la esecuzione di questo metodo ho seguito le indicazioni date dal Cajal e ho trovato che il tempo utile per la permanenza in nitrato d'argento, varia dai cinque ai sei giorni.

Un'assoluta costanza nelle modalità non v'è, ed ho potuto notare che anche la costanza della temperatura non è indispensabile alla buona riuscita della reazione, poichè, con cuori tenuti nei diversi liquidi alle vicende della temperatura del laboratorio, ho ottenuto risultati ottimi per delicatezza e chiarezza di reazione.

Per lo studio dei gangli con questo metodo, i cuori di Rettili ed Anuri mi hanno dato buonissimi risultati, mentre quelli di Tritone non si prestano ad essere studiati che col cloruro d'oro, certamente a ragione della posizione e delicatezza dei gangli cardiaci in questi animali.

Gli animali su cui specialmente si sono rivolte le mie ricerche sono *Lacerta muralis*, *Elaphis quadrilineatus*, *Zamenis viridiflavus*, *Triton cristatus*, *Rana esculenta*, *Bufo vulgaris*, *Bufo viridis*.

Ricerche originali.

Volendo fare uno studio comparativo della distribuzione generale dei nervi nei Rettili e nei Batraci mi trovo costretto a raggruppamenti che non hanno niente di naturale, poichè debbo avvicinare ai Sauri i Batraci Anuri e staccare in un gruppo a parte gli Urodeli.

In tutti troviamo abbondanza di nervi e cellule nervose, ma i primi presentano un tipo nettamente gangliare a cellule raggruppate in pochi gangli ricchi di elementi e in cui vanno a perdersi fibre midollate provenienti dai centri (Fig. 2-4); mentre i secondi hanno elementi abbondantissimi e sparsi, fibre per lo più amieliniche e cellule isolate o pochissimo raggruppate, in modo da formare un punteggiamento ricchissimo di elementi cellulari intorno alla periferia tutta del muscolo cardiaco (Fig. 5).

E ciò che dico per il raggruppamento relativo agli elementi nervosi fra loro, dico anche per questi elementi rispetto ai muscolari, poichè mentre nei Sauri e negli Anuri i gruppi gangliari sono circoscritti nei limiti auriculari — e pochi e poco importanti si estendono al ventricolo — negli Urodeli invece tutto il cuore ne è ricoperto e la superficie del ventricolo è invasa da una ricca costellazione cellulare che si estende fino all'estremo apice di questa parte (Fig. 16).

Fo notare di passaggio la estrema importanza di questo fatto che fa vedere come anche l'apice del ventricolo può essere fornito riccamente di cellule nervose in alcuni animali e come è pericoloso estendere le disposizioni riscontrate in un gruppo ad un gruppo anche molto affine.

Passando ora a descrivere sommariamente i fatti che ho potuto riscontrare, li raggrupperò nei seguenti paragrafi:

a) Rami nervosi e plessi fondamentali;
b) Gangli e loro disposizione;
c) Innervazione del tronco arterioso dei Rettili;
d) Plessi e reti secondarie;
e) Reti avvolgenti gli elementi muscolari del cuore;
f) Innervazione intima degli elementi del miocardio.

a) Rami nervosi e plessi fondamentali.

Nella innervazione del cuore dobbiamo distinguere due ordini di fibre: uno proveniente per mezzo del vago dai centri ed un secondo proveniente dalle cellule simpatiche raccolte in gangli intorno alle pareti cardiache o nella trama di esse. Per i Rettili descriverò le disposizioni riscontrate nella *Lacerta muralis* da cui poco si discostano gli Ofidi. Un'assoluta costanza di particolari non potrei dire che vi esista e mi atterrò quindi alla descrizione delle disposizioni essenziali astraendo dalle variazioni accessorie e poco significative.

Al cuore della Lacerta arrivano dal vago generalmente quattro rami per lato. Un primo ramo che distaccasi in alto verso il ganglio (Fig. 1, *I*) segue per un certo tratto questo cordone poi si ripiega, e avvicinandosi a una delle radici aortiche vi si addossa e la segue, ramificandosi, sino all'anello bulbare.

Nell'arco che forma questo primo ramo nel ripiegarsi si stacca generalmente un nervetto anastomotico che va a fondere le proprie fibre col plesso che trovasi alla parte posteriore delle cave e degli atri. Questo plesso è formato dagli altri rami del vago (*II*, *III*, *IV*) i quali, anastomizzandosi fra loro e dirigendo le fibre comuni verso lo sbocco della cava sinistra nel seno, incontrano qui, sulla cava una prima, e sotto lo sbocco della v. polmonare una seconda massa gangliare cardiaca. Questo dalla parte sinistra; poichè verso destra queste disposizioni sono generalmente più semplificate ed anche i gangli sopra nominati (Fig. 1, *gs*) non trovano il loro riscontro che in piccoli gruppi di cellule poste sul percorso dei rami nervosi sul seno. Un'altra particolarità del lato destro è l'anastomosi che partendo dal tronco va, percorrendo la superficie dorsale della cava e parte degli atrii, a passare per il ganglio presso la v. polmonare e poi, progredendo, scende verso il solco atrio-ventricolare, dove si getta nella massa gangliare mediana (Fig. 1, *Rd*).

Dai margini mediali del plesso descritto si staccano poi dei rametti (*Nt*) che vanno alla trachea.

Come si vede quindi da quello che ho detto, noi abbiamo un certo addensamento di gangli più verso sinistra che verso destra, ma le fibre centrali che arrivano a queste cellule e quelle che arrivano ai gangli del solco sono distribuite con un certo equilibrio quantitativo, poichè se il plesso di sinistra può apparire più ricco, ciò è dovuto in parte alle fibre che vi si portano dalla destra.

Dalle fibre nervose che arrivano e che partono dalla massa gangliare atrio-ventricolare si distacca il nervo del setto (Fig. IV, *Ns*) che, percorrendo dalla parte dorsale alla ventrale la parete di questo, attraversa un piccolo ganglio interno agli atrii e va verso la parte ventrale del solco.

Ho già detto che prima di fornire i rami destinati alla parte dorsale degli atrii, il vago distacca un ramo che, partendosi dal ganglio, scende verso il cuore, si addossa alla radice dell'aorta, dà un ramo discendente che va a fondersi con il plesso già descritto, mentre che con il ramo principale segue la curva della radice aortica e accompagna questo vaso sino al ventricolo, nel « bulbus ring ». Dà nel suo percorso dei rami e fibre alla parte anteriore del tronco arterioso e su questi noi troviamo degli aggruppamenti cellulari che, piccoli verso la parte cefalica, vanno diventando sempre più cospicui verso il ventricolo (Fig. 3).

Da questi rami del tronco si stacca un rametto che, girando intorno al margine ventricolare di esso lungo l'anello bulbare, si porta nella parte dorsale, e qui, proseguendo lungo il fondo del solco atrio-ventricolare, si mette in comunicazione con i gangli.

Se noi seguiamo ora i nervi che decorrono nel solco atrio-ventricolare, vediamo che un cingolo nervoso, serpeggiando fra i gangli che si trovano in questa parte, stringe l'istmo atrio-ventricolare e unisce fra loro le cellule gangliari poste in questo solco. La Fig. 4 mostra la esatta configurazione dei gangli e dei nervi che decorrono nel solco atrio-ventricolare e nel setto atriale; configurazione ricavata non per ricostruzioni sui tagli ma da pazienti dissezioni di preparati al cloruro d'oro, solo metodo che permette mantenere con scrupolosa esattezza i rapporti.

Negli Ofidi riscontriamo essenzialmente le istesse disposizioni; anche in essi il tronco ha la sua innervazione come nella Lacerta, salvo che qui al posto dei piccoli elementi raccolti in nidi troviamo cellule nervose normali e alquanto più cospicue di quelle degli altri gangli del cuore.

Anche gli Ofidi presentano il nervo del setto e la rassomiglianza con la Lacerta va sì lungi che noi non sapremmo distinguere su una sezione trasversale della tenda valvolare, — fatte le eccezioni, naturalmente, per le dimensioni — un cuore di *Zamenis* o *Elaphis* da quello di *Lacerta*. In essi il nervo del setto decorre, come nei Sauri, generalmente presso l'angolo che forma il setto inserendosi sulla tenda, lo percorre tutto e va nella parte ventrale del cuore. Sul suo percorso troviamo un ganglio che presenta un numero di elementi più grande che nella Lacerta.

Nei Batraci non si riscontra più questa omogeneità.

Mentre negli Anuri troviamo nelle disposizioni descritte da tanti Autori ed anche recentemente da Hofmann qualche analogia con i Rettili, negli Urodeli niente di tutto ciò. In essi vediamo invece un ricchissimo plesso, sviluppato grandemente in tutta la estensione della superficie cardiaca e specialmente nel solco atrio-ventricolare e parti circostanti. Questo plesso fatto di un intreccio di sottili fibre amieliniche è ricchissimo di cellule nervose che si attaccano alle sue fibre in tutto il suo percorso come i fiori peduncolati di una pianta rampicante. Esso invade tutta la periferia del muscolo cardiaco; e non ne resta sfornito nemmeno l'apice del ventricolo, dove, col cloruro d'oro, si possono vedere facilmente questi rametti nervosi con grappoli di cellule.

La Fig. 5 mostra una piccola porzione del plesso descritto posta nella parte superiore del ventricolo; esso si continua con modalità poco o niente differenti su tutta la superficie del ventricolo, e la Fig. 16 mostra una branca del plesso posta proprio sulla punta ventricolare. Questa ricchezza magnifica si attenua sulle altre parti del cuore, per quanto le cose restino come conformazione essenzialmente lo stesso; e solo sopra le cave noi ci troviamo in presenza di tronchi individualizzati che poi giunti nei limiti atrio-ventricolari generano il plesso fondamentale suddetto.

Come si vede dunque, sia per la topografia, sia per la configurazione dei nervi intracardiaci, noi non siamo in nessun modo autorizzati ad unire con uno schematismo eccessivo e falso gli Anuri agli Urodeli, come tentarono già nel 1890 Tumänzew e Dogiel fondando le loro conclusioni su di un esame affrettato e parziale del cuore di Tritone.

Non è certo l'aver comune l'origine e, per un tratto, comune il percorso dei rami principali — cose del resto ovvie e che vediamo anche fuori dei limiti de' Batraci — ma è nello insieme, nella configurazione complessiva della delicata trama nervosa cardiaca che bisogna trovare i caratteri comuni, ed è qui invece che troviamo nei Batraci una netta differenza, poichè, a parte la natura e la topografia dei nervi, noi possiamo dire che negli Anuri abbiamo una disposizione a gangli atriali, mentre negli Urodeli è prevalentemente ventricolare e che mentre negli Anuri possiamo localizzare dei netti centri cardiaci nei gangli, negli Urodeli ciò riesce impossibile data la grande dispersione e la omogeneità di distribuzione degli elementi cellulari nervosi sul cuore.

b) GANGLI E LORO DISPOSIZIONE.

I gangli nel cuore dei Rettili si trovano distribuiti nella regione dorsale di esso addossati intimamente alle pareti dell'organo, nel setto atriale, nel tronco arterioso e in parte nel solco atrio-ventricolare. Essi sono rivestiti dal connettivo che è aderente al cuore e si trovano sul percorso dei nervi sopra descritti. Un primo ganglio lo troviamo verso il lato mediale della cava superiore di sinistra; ovalare con cellule densamente aggruppate, ed intimamente addossato alla parete del vaso. Un secondo ganglio giace nel piano mediale del cuore in quella parte corrispondente al punto in cui la cava di sinistra va a sboccare nel seno, si estende in parte anche un po' sugli atrii ed è per esso che passa generalmente il ramo anastomotico che il plesso di destra manda a quello di sinistra, come ho già accennato.

Nella parte inferiore poi del confluente delle cave nel seno si trova la massa di gangli più cospicua. Qui numerosissime cellule sono addensate in tre o quattro gruppi, ma lasciano fra loro un certo numero di cellule sparse, sì che non si possono distinguere nettamente un numero corrispondente di gangli. Questa massa gangliare si approfonda nel solco atrio-ventricolare, mantenendosi però sempre nel piano mediale. In esso, come abbiamo visto, confluiscono le fibre che — originandosi da diverse sorgenti nel plesso — convergono in più rami verso il solco atrio-ventricolare.

Non mancano poi piccoli gruppi di cellule sparse sul percorso dei nervi, ma essi sono di pochissimo conto e molto meno costanti.

Dei gruppetti relativamente più costanti si possono incontrare (Fig. 2 *gd*) alla parte dorsale del seno sul percorso del ramo proveniente dal vago di destra, generalmente sul margine della cava, corrispondentemente a quelli molto più importanti che si trovano nella parte sinistra. Altri gruppi cellulari si estendono anche lungo il solco atrio-ventricolare e se ne trovano, oltre che ai lati di esso, anche nella parte ventrale, in corrispondenza del margine ventrale del setto interatriale. La Fig. 4 mostra questi gangli del solco, che come tanti nodi del cingolo che ho dianzi descritto coronano la base ventricolare. Tutti questi gangli sono superficiali e risultano da cellule in maggioranza unipolari, piriformi, ma non mancano però elementi bi- o pluripolari. Da essi partono numerose fibre amieliniche che poi ramificandosi e anastomizzandosi alla superficie del ventricolo e degli atrii involgono queste parti in una rete continua.

Nella Fig. 7 è rappresentata una disposizione di cellule nervose sulla parete dorsale degli atrii di *L. muralis* poco comune, poichè, anche in territorii così ristretti come quello in cui son circoscritte queste cellule, non riscontriamo che raramente simili dispersioni di elementi gangliari; ma quello che è molto notevole in questa figura è che essa fa vedere il modo con cui si origina la rete nervosa ora accennata. Difatti vediamo da cellule isolate e da cellule aggruppate su rami del plesso principale, partire prolungamenti che unendosi ad altre fibre — provenienti con ogni probabilità, per le vie del plesso, da cellule più lontane — formano rete. La struttura e la distribuzione di questa rete sarà descritta più appresso.

Dai Sauri non si scostano essenzialmente gli Ofidi: in questi, come nei primi, gangli sulle cave, gangli sugli atrii e masse gangliari più cospicue nel solco atrio-

ventricolare. La rassomiglianza nei due gruppi va anzi così lontano da restarne colpiti, come ho fatto già notare per il nervo del setto interatriale, per la sua posizione, e come vedremo, per il ganglio che vi si trova.

Anche per il tronco arterioso i due gruppi si rassomigliano, per quanto gli Ofidi posseggano su esso elementi gangliari normali, mentre i Sauri hanno elementi molto più piccoli e riuniti in caratteristici aggruppamenti; ma questo argomento, meritando una più lunga discussione, per non intralciare la descrizione di cui mi sto occupando, sarà trattato in un paragrafo a parte.

Ma vi sono gangli nella musculatura del cuore? Per la musculatura ventricolare posso rispondere di no, poichè dopo ripetute ricerche, usando sia le dissezioni che i tagli di interi cuori, applicando i diversi metodi che m' hanno aiutato in questo studio, non ho mai riscontrato la minima traccia di cellule nervose nella compagine ventricolare.

Questa medesima assenza di cellule nervose non si verifica per gli atrii poichè ho potuto mettere in evidenza nel setto, e della *Lacerta* e di *Elaphis* e di *Zamenis* (Fig. 4, *gs*, 6 e 15) un piccolo ganglio posto sul percorso di un nervo proveniente dal plesso primario, formato da poche cellule e posto in comunicazione con i gangli principali del solco. Dunque in questi animali niente gangli interni ventricolari ma piccoli gangli atriali, niente cellule sparse nel miocardio ventricolare.

Con ciò io non voglio escludere la presenza di gangli interni che ora, dopo gli studî del Waledinsky sono per alcuni Mammiferi indiscutiblli, ma tengo ancora una volta a far notare come da un animale a l'altro le disposizioni cambiano, e come lo sperimentatore non deve servirsi di nozioni generali a gruppi ma dell'approfondita conoscenza dell'animale su cui sperimenta.

Nella Rana e nel Bufo la localizzazione delle cellule nervose è sui rami principali degli atrii per la maggior parte e poi sui diversi rami che formano plesso sulle pareti e nel setto di questi.

In alcuni di questi animali invero non mi sembra giustificata la netta distinzione dei classici gruppi gangliari, poichè — come può vedersi specialmente nel Bufo — il rivestimento dei tronchi è fatto dalle cellule ganglionari quasi omogeneamente nel loro percorso e solo un rigonfiamento lo troviamo nel ganglio di Bidder. Questi ultimi gangli d'altra parte sono inesattamente chiamati ventricolari, poichè essi non riposano direttamente sulla base del ventricolo ma invece su quella parte degli atrii che a guisa di istmo scende per un bel tratto — tanto nei Batraci quanto nei Rettili — nel cavo ventricolare.

Per il Tritone ho già precedentemente descritta la disposizione cellulare e fatto vedere come questo animale si distingue da tutti gli altri quasi per una inversione di parti poichè qui è il ventricolo che è più ricco di cellule e ne possiede fino all'apice.

Dunque gli elementi cellulari che vedeva Carlson nella Salamandra sulla punta del ventricolo, fanno parte nel Tritone di un complesso omogeneo che riveste tutta la superficie cardiaca. I miei risultati sono di una chiarezza indiscutibile e oramai — se in molti animali non è stato possibile mettere in luce elementi cellulari nervosi netti nell'apice od anche in altre parti del ventricolo — non è più lecito

estendere questa mancanza al cuore dei Vertebrati in generale, poichè, come ho dimostrato, non solo il ventricolo, ma fino l'estrema punta di esso può essere riccamente fornita di cellule nervose.

c) Innervazione del tronco arterioso nei Rettili.

Studiando col cloruro d'oro l'innervazione del tronco arterioso nella *Lacerta muralis*, mi accorsi che i rami dei nervi che arrivano su di esso erano ricchi di caratteristici gruppi cellulari, che avevano tutto l'aspetto e tutti i rapporti di masse ganglionari, ma fui subito colpito dalla piccolezza degli elementi e da una ricchezza particolare, che li faceva distinguere subito dai comuni gangli cardiaci dello stesso animale. La topografia e l'aspetto generale di queste formazioni son rappresentati nella Fig. 3; dove si vede che esse mai si scompagnano da tronchi e filamenti nervosi. Cominciano ad apparire fin sulle ramificazioni dei vasi del *truncus arteriosus* con pochi e piccoli gruppi e poi, progredendo verso il cuore, vanno aumentando sia i gruppi che gli elementi che li compongono. Possono osservarsi elementi sui tronchi nervosi principali o lontano, cellule isolate o riccamente aggruppate, ma sempre queste formazioni sono in rapporto con fibre partenti dai rami nervosi del tronco.

Ho già descritto precedentemente dove si originano i nervi del *truncus arteriosus*, e le modalità del loro percorso; dirò qui come essi, arrivati sui vasi, vi si addossano, penetrano nell'avventizia e cominciano a dar rami che vanno ai gruppi di cellule di cui ho parlato sopra. Si vede, esaminando molti di questi gruppi, che vi penetrano delle fibre midollate o non, e, dall'altra parte, si vedono partire sottili fibrille che, percorrendo le pareti del tronco, e anastomizzandosi fra loro e con le fibrille originatesi da altri gruppi, formano nelle pareti del tronco una delicatissima rete di fibre amieliniche.

Già questa disposizione ricorda esattamente ciò che avviene per i gangli descritti altrove nella Lacerta, dove abbiamo visto come ai gangli arrivassero fibre midollate e come ne partissero, a formar rete, fibre amieliniche. Qui però, data la mole e la disposizione degli elementi ganglionari, fu facile vedere cellule dar direttamente filamenti ad arricchire la rete; ma anche nelle cellule del tronco, insistendo nei tentativi, mi riuscì il dimostrare disposizioni analoghe. Nella Fig. 10, infatti, son rappresentati, fortemente ingranditi, alcuni gruppi di cellule trattate col cloruro d'oro. Si vedono per queste cellule essenzialmente gli stessi rapporti che prendono gli elementi ganglionari del Tritone (Fig. 5) e quelli della Lacerta (Fig. 6) con i rami nervosi, e vi si notano anche elementi con netti prolungamenti ed anche qualcuno con più ramificazioni — di cui una va a fondersi col nervetto — i quali in niente sapremmo distinguere da ordinarie cellule nervose se non per la mole.

Prendendo a base questi fatti io m'ero convinto di trovarmi in presenza di veri gangli nervosi posti, come quelli delle altre parti del cuore, fra i nervi del centro e le reti cardiache. Leggendo però una nota del prof. Trinci « *sulla esistenza di un paraganglio cardiaco nei Rettili* » mi accorsi che il territorio che assegnava questo A. al paraganglio da lui accennato, corrispondeva nella Lacerta precisamente a quello delle formazioni da me studiate. Secondo il prof. Trinci difatti: « le cellule cro-

maffini, comprese in nidi di vario numero di elementi, già cominciano a mostrarsi in prossimità degli ostii arteriosi ventricolari, ma divengono particolarmente abbondanti nel tratto intermedio fra la regione degli ostii stessi e quella distale in cui i singoli tronchi si separano l'uno dall'altro » ed anche: « I nidi alla periferia del *truncus arteriosus* giacciono nell'avventizia di tutti e tre i vasi arteriosi ». Si vede quindi che, almeno topograficamente, tenendo anche conto che io non ho incontrato in queste parti elementi cellulari all'infuori di quelli che ho nominati, i nidi cromaffinici corrispondono ai gruppi di cellule da me descritti; per quanto, debba confessare che io non ho altri ragguagli per la identificazione, poichè il prof. Trinci non dà nella sua nota che fuggevoli indicazioni, nè io ho fatto delle ricerche speciali in proposito.

Ma, se le due formazioni sono la stessa cosa, ci troviamo noi in presenza di gruppi gangliari simpatici, come io ritengo, oppure di nidi cellulari secernenti? Non sarà forse vano che io spenda qui qualche parola, senza voler entrare però nel merito della quistione generale delle cellule cromaffini.

Il prof. Diamare ritiene che: « senza dubbio è erronea l'opinione di coloro che vogliono riconoscere nelle cellule cromaffini degli elementi nervosi »; ma non può disconoscere che nel midollo delle capsule surrenali, possono trovarsi cellule ganglionari e nella cavia ne ha veduto anche egli di sparse. Anche nell'uomo sono riportati casi di gangli intramidollari e addirittura casi di veri « neuroni ganglionari » che occupano il posto del midollo, anzi proprio il prof. Diamare ha potuto esaminare nell'uomo un caso in cui il midollo *risultava quasi esclusivamente di un complesso di caratteristiche cellule ganglionari.* Ma i rapporti genetici ed attuali del tessuto cromaffine col simpatico, che anche le personali osservazioni dell'A. confermano, sembrangli che destino soverchia preoccupazione e che, dinanzi alla evidenza, s'imponga troppo « il pregiudizio che dai tessuti nervosi non possano sorgere che elementi nervosi »; e non sorprenderà che si ravvisi « un'evoluzione particolare del primitivo epitelio neurale verso un ufficio diverso da quello a cui tendono la maggioranza dei suoi derivati ».

Ma che questa evoluzione abbia una linea e un limite netto non è detto dall'A. nè si poteva dire, poichè, volendo restare nello stesso ordine di idee, e ove noi pensiamo ai casi in cui parte o tutti gli elementi primitivi si sviluppano completamente nel senso nervoso, possiamo anche immaginare che in qualche animale o in una parte di esso, l'epitelio neurale prenda, evolvendo, quasi una via di mezzo, e, pur acquistando dei caratteri che in qualche modo avvicini i suoi elementi a formazioni cromaffiniche, questi restino essenzialmente coerenti alla loro natura originaria e funzionino, secondo essa, da elementi nervosi. E questo caso — volendo rimanere, ripeto, sempre nello stesso ordine di idee — si potrebbe applicare precisamente alle formazioni gangliari del tronco arterioso di Lacerta, facendo notare qui che, come dice lo stesso prof. Trinci: « *gli elementi specifici del paraganglio cardiaco nei Rettili costituiscono un tipo cellulare alquanto distinto da quelli del paraganglio soprarenale* ».

Nella Lacerta ci troveremmo davanti ad elementi che nello svilupparsi, invece di acquistar nella mole, si sarebbero molto divisi, e pur non rimanendo eguali agli altri elementi ganglionari in qualche carattere, vi rimangono nella funzione.

E a queste considerazioni aggiungo il fatto che in *Zamenis* ed *Elaphis* io ho trovato nel tronco arterioso, corrispondentemente alle formazioni descritte nella Lacerta, e sugli stessi nervi, gangli nervosi più poveri di elementi ma con cellule cospicue, nettamente ramificate e che sono sicuramente nervose, fino a quando i prolungamenti cellulari che vanno a formare un nervo od un plesso, e la struttura fibrillare del corpo cellulare saranno caratteri indiscutibili di una cellula ganglionare.

La Fig. 12 dà l'aspetto generale di uno di questi gangli e la Fig. 11 riproduce delle cellule di essi viste a forte ingrandimento e la cui natura è di un'evidenza innegabile.

Conchiudendo dunque possiamo affermare che, tanto nei Sauri quanto negli Ofidi, noi troviamo nel tronco aortico, oltre a nervi proprii con origine distinta, anche dei ricchi gruppi gangliari, ed una delicatissima rete che si distribuisce nelle sue pareti.

d) Plessi e reti secondarie.

La distribuzione delle fibre che si nota nel miocardio è diversa nella natura di esse, e pare abbia una certa relazione con la grossezza delle pareti a cui son destinate. Così nella Lacerta i nervi con fibre a mielina non li troviamo che alla superficie e nella parete del setto e subito cominciano le reti di semplici fibre e non si vedono plessi interni come intermediarii fra la superficie e le estreme reti; nella Rana le fibre mieliniche si arrestano agli atrii, mentre nel ventricolo scendono, lungo la parete del foro atrio-ventricolare, numerosi fasci di fibre amieliniche che formano un plesso da cui si genererà poi la rete che percorre il miocardio. Quando la mole del cuore cresce, come nei grossi Bufi; allora lunghi rami, ricchi plessi mielinici percorrono il miocardio in tutte le direzioni e presentano anche cellule gangliari negli interstizii dei fasci muscolari. Da questi plessi poi si staccano fibre amieliniche che formano a loro volta plessi addossati più intimamente alle parti a cui si distribuiscono, e da cui poi si originano i rami che formeranno la rete ultima, più intima. Così, p. es., nella Fig. 19 vediamo una porzione di plesso di sottili fibre, poste sul bulbo arterioso, che poi, con i suoi filamenti si risolve in una rete.

Per i Rettili ho già indicato il modo come si origina la rete sottopericardica, addossata intimamente alle pareti del cuore, e ho già fatto vedere — rimandando alla Fig. 6 — come nasce la rete atriale e come molte cellule ganglionari vi mandano direttamente o non i propri prolungamenti.

Anche per le altre parti del cuore abbiamo una rete simile e continua e la sua origine è analoga a quella atriale. Così, guardando le masse ganglionari del solco atrio-ventricolare, vediamo irraggiarsi da esse numerose fibre che alla superficie delle pareti ventricolari ed atriali, si dividono in sottili filamenti i quali, anastomizzandosi, formano una rete che involge tutte le parti del cuore.

Queste fibre, come vedesi nella Fig. 8, mostrano, verso la loro origine dai gangli simpatici, nettissimi nuclei posti di tratto in tratto e conservano per un certo percorso un calibro costante. Si dividono poi e danno fibre più sottili che si anastomizzano fra loro e, talvolta, si raggruppano a formare fibre di calibro uguale alle originarie. Le maglie della rete non hanno nè forma nè dimensioni costanti. Esse

sono poligonali, con numero di lati variabile e presentano agli angoli e di tratto in tratto lungo le stesse fibrille dei rigonfiamenti ora triangolari ora fusiformi, che niente han da vedere con elementi cellulari. In ogni angolo non si riscontrano quasi mai più di tre fibre. La rete si vede più fitta sul ventricolo che sugli atrii dove mostrasi anche in certo modo più regolare.

Nel Tritone pure abbiamo una disposizione analoga salvo che i centri da cui si arricchisce la rete hanno una ricca diffusione su tutta la superficie del cuore. Le reti, che si originano dal plesso che noi conosciamo, sono due, uguali di conformazione e di origine, ma decorrenti l'una più superficialmente del plesso principale e l'altra più profondamente addossata proprio alle fibre muscolari e fra esse. Nella Fig. 9 si vede un tratto della rete pericardica del ventricolo di Tritone che decorre più superficialmente del plesso principale, e nella Fig. 17 si vede come si forma, quasi per un graduale districamento del plesso, questa rete.

Come nella Lacerta, notiamo anche nel Tritone la presenza di nuclei nelle fibre più vicine al plesso originario e anche qui vediamo la irregolarità delle maglie, che è anzi più accentuata, e nulla ha da vedere con la direzione delle fibre muscolari del miocardio. I nodi che ho segnalato nella Lacerta anche nel Tritone sono comuni ed anche qui dipendono dalla fusione delle fibre e non, in alcun modo, dalla presenza di nuclei o elementi cellulari.

e) Reti avvolgenti gli elementi muscolari del cuore.

Ed ora dovrei parlare della innervazione intima delle fibre muscolari, ma voglio chiarire prima alcuni fatti, trascurando i quali ci sarebbe facile cadere in errore.

Nel 1902, Veratti, studiando la struttura della fibra muscolare striata in molti animali, vide che ogni fibra era rivestita da una membrana la quale era ricca di un apparato reticolare che egli riteneva come produzione sarcolemmatica, confessando che non si avevano dati per fondare una ipotesi sul significato funzionale di questo reticolo.

Ora, fin dal 1894, Heymans e Demoor, studiando col metodo di Golgi la innervazione del cuore dei Vertebrati, videro che le fibre muscolari cardiache erano rivestite da una guaina che assimilarono « à la gaîne conjonctive dans laquelle se trouve toute fibre musculaire. La striation corresponderait à la texture de cette gaîne », e sembrò loro « éminemment apte à favoriser le courant de diffusion de la cellule musculaire ».

Ci troviamo forse dinanzi alla istessa formazione descritta dal Veratti, ma la indeterminatezza di Heymans e Demoor è ben lungi dal darci la cognizione sicura e precisa di essa.

Trattando le fibre muscolari del cuore col metodo di Cajal, potetti dimostrare nettamente una bellissima e ricca rete che rappresento nelle Fig. 13 e 14. Tutte le fibre che compongono la rete hanno, nella Lacerta, sui preparati avuti col metodo suddetto, un serpeggiamento caratteristico, a vicinissime curve di piccolo raggio, sì che la linea retta pare completamente bandita dal loro percorso. Nei preparati avuti per dissociazione, dopo trattamento col cloruro d'oro ed acido formico $^{1}/_{3}$, questo aspetto a brevi curve sparisce e le fibre diventano tese e senza ondulazioni ed anzi le fibre muscolari, troppo gonfiate dall'acido formico, appaiono come strozzate da esse.

L'aspetto quindi dipende in parte dalla natura poco elastica del reticolo ed in parte dal metodo usato; mentre sul vivo, se esso potesse essere seguito, lo vedremmo cambiare con la contrazione o distensione del muscolo.

Osservando questo reticolo, si vede che è fatto da fibre di grosso calibro unite a più numerose fibre sottili, queste non derivanti per divisioni di quelle, ma tutte saldandosi in una complessa rete, i cui rami più esili sono appena distinguibili con i più forti ingrandimenti. Spesse volte, su qualche fibra muscolare, grosse o piccole fibre vi arrivano da altre fibre muscolari, per mezzo dei rami anastomici di esse, sicchè tutta la musculatura è avvolta in ogni sua fibra da una rete ininterrotta.

Analoghe reti ho trovate negli altri animali studiati, e fin nei Mammiferi (*Vespertilio*), e, per quanto differenti in alcune particolarità di conformazione, esse rappresentano essenzialmente la istessa cosa e cioè una struttura reticolare della guaina che riveste le fibre muscolari cardiache, sia essa sarcolemmatica o connettivale. Ma questa mia convinzione fu sicura soprattutto quando, ricercando i rapporti di continuità con elementi nervosi di natura certa, non ne trovai alcuno. Ed è qui inutile che io ripeta come, nella massa degli organi, l'unico criterio sicuro per la distinzione delle fibrille nervose da altre di natura estranea è appunto quello dei rapporti, poichè i metodi generalmente usati nel loro studio non sono soverchiamente ammaestrati e non hanno ancora imparato a distinguere elementi fibrillari nervosi e connettivali.

Ora, se noi allentassimo un po' il freno alla fantasia e immaginassimo su queste reti arrestata la reazione in questa o quell'altra parte, non poche formazioni potremmo vedere da fare invidia alle « *complex terminations* » di Berkley, e se aggiungessimo quì e là un bottone terminale (scherzo non infrequente nelle reazioni mal riuscite) potremmo creare e poi distinguere diverse specie di terminazioni!

f) Innervazione intima degli elementi del miocardio.

Ma quali sono i rapporti che prendono gli estremi rami nervosi con le fibre muscolari del miocardio? e quali ne sono le modalità?

Nel rispondere a queste domande bisogna essere molto cauti e bisogna sempre guardarsi dal non confondere e descrivere per fibrille nervose le fibre appartenenti al sistema perimuscolare che ora ho descritto. Qui, più che altrove, io ho preso sempre a supremo giudice il criterio dei rapporti e della continuità con elementi sicuramente nervosi.

Dai miei risultati, se forse qualche rete perde una parte della tanta ricchezza che sfoggia anche in qualche recente autore, essa rimane però essenzialmente la reale e generale maniera con cui le fibre nervose si risolvono nel miocardio. Non bottoni, non placche, non terminazioni libere. Io ho sempre visto fusioni di fibrille di diversa origine ed ho sempre notato una continuità perfetta in questi elementi.

La rete dunque domina nella innervazione intima del cuore ed io ho già fatto vedere che fin dagli strati superficiali degli elementi perdono la loro individualità e si saldano in una rete.

Ed anche nell'intima trama cardiaca avviene lo stesso. Qui, intorno alle cellule muscolari, si vedono arrivare da diversa origine fibre, che si dividono, suddividono

continuandosi poi con altre fibrille che, per un processo analogo, si son generate da altri elementi. Il riscontrare dei sottili rami che sembrano terminare liberamente non può autorizzare a parlare di terminazioni libere, poichè, supposto che queste fibrille non siano incompletamente impregnate, e supposto che la loro apparente terminazione non sia dovuta alla interruzione della sezione, la rete, con la ricchezza delle sue maglie ha assoluto predominio, e fa scorgere chiaramente che in essa risiede la base strutturale per cui si esplica l'influenza del sistema nervoso sulle fibre muscolari del cuore. Anche io mi sono incontrato nello studio del miocardio in tante immagini che, ove fossi stato trascinato dal preconcetto della esistenza di terminazioni, mi avrebbero spinto alla descrizione di apparati terminali di questa o quella specie; ma ad una critica serena è facile vedere in essa o accidentalità tecniche, o incompletezze di reazioni o formazioni puramente occasionali.

Sento di dover qui ripetere che io non voglio escludere in modo assoluto la presenza di formazioni nervose di questa o quella specie in tutti i Vertebrati, ma solo ritengo che non è in formazioni accessorie speciali e forse proprie ad alcuni animali che bisogna cercare la spiegazione dei fenomeni essenziali del cuore, ma nelle disposizioni generali ed immutabili in tutti gli animali in cui i fenomeni si dimostrano eguali. E la rete perimuscolare mi pare questa disposizione generale, per lo meno negli animali che io ho studiato. Questa rete, del resto, dopo le ricerche eseguite recentemente con metodi perfetti, diventa una struttura innegabile dei nervi nel miocardio ed è con essa che noi più facilmente possiamo spiegarci non solo la coordinazione del ritmo ma tanti altri fenomeni cardiaci.

Nella Fig. 18 è rappresentata una rete perimuscolare dell'atrio di Serpente e nella Fig. 20 un piccolissimo tratto di quelle del ventricolo di Rana. Qui si vede il modo di originarsi di questa rete, ma quello che è caratteristico nella Rana sono i rapporti molto intimi che le fibre di essa prendono con i nuclei muscolari.

Generalmente si addossano ad essi, molti ne girano la periferia e si staccano da un punto opposto del nucleo, in modo che spesso si ha l'immagine che le fibrille partano da questo. Così si spiega l'asserzione, del resto errata, di alcuni che fanno terminare le fibrille nervose nei nuclei muscolari. Certo questo addossamento fa sì che la fibrilla si trovi in quella parte della fibra non differenziata e che ne senta meglio le vicende metaboliche sì che potrebbe credersi che non sia estranea ad esse; debbo aggiungere però che la ricchezza straordinaria di nuclei nelle fibre muscolari del cuore di Rana rendono la probabilità dei contatti che ho sopra descritti grandissima, e forse questi vanno spiegati più come incontri fortuiti che come disposizioni con un significato funzionale.

Un'ultima questione: in questa rete che ho descritta si possono individualizzare dei campi più o meno limitati, o essa è un tutto continuo? A questa domanda, che già si era fatta il Mikailow (1908″) parmi di poter rispondere che nel cuore ci troviamo in presenza di un complesso unico di fibrille che non ha limitazione di sorta.

Io ho già fatto vedere come nella Lacerta, e come nel Tritone reti ne abbiamo fin negli strati sottopericardici e già da questo punto la suddivisione in territorii separati sarebbe impossibile.

Alla superficie, nello spessore delle pareti cardiache, sulle fibre muscolari più intime, tutto un sistema complesso di fibre si distende, penetra e abbraccia il miocardio in tutti i suoi elementi in una rete ininterrotta.

CONCLUSIONI

Riassumo qui i fatti più importanti che risultano dalle mie ricerche.

1) Esistono nei Rettili, oltre ad un plesso nervoso di fibre midollate sulla parte dorsale e seno-atriale del cuore, anche rami e plessi nervosi del tronco, un cingolo nervoso con gangli anche ventrali nel solco atrio-ventricolare, ed un nervo nel setto che lo percorre dalla parte dorsale alla ventrale, poco discosto dalla tenda valvolare, e che possiede sia nei Sauri che negli Ofidi un ganglio nervoso non molto ricco di cellule.

2) È impossibile dare un tipo di innervazione cardiaca nei Batraci e dobbiamo invece avvicinare gli Anuri ai Rettili e dividere in un gruppo a parte gli Urodeli. In tutti abbondanza di elementi nervosi, ma, mentre nei primi abbiamo un tipo a *gangli raggruppati* e topograficamente ben delimitati, nel Tritone invece ci troviamo dinanzi ad una ricca costellazione di cellule nervose che involge tutta la superficie del cuore e si estende fino all'estremo apice ventricolare.

3) Nei Rettili non vi sono cellule nervose nella compagine o alla superficie del ventricolo, salvo i gangli che ne coronano la base presso il solco atrio-ventricolare. Il Tritone invece ha una distribuzione gangliare superficiale prevalentemente ventricolare.

4) Il *truncus arteriosus* dei Rettili è innervato da un ramo speciale e possiede proprî gangli nervosi posti nell'avventizia dei vasi. Questi gangli sono negli Ofidi formati da cellule nervose di dimensioni normali mentre nella Lacerta hanno elementi di un aspetto caratteristico, di piccole dimensioni, e riuniti in nidi. Siano o non queste ultime formazioni della *Lacerta* analoghe a formazioni cromaffiniche, io ritengo che tanto le ramificazioni visibili in molti elementi, quanto i rapporti che prendono con le fibre nervose e le modalità di essi, come pure la corrispondenza negli Ofidi di cellule ganglionari normali, sono argomenti sufficienti per giudicare della natura nervosa di esse; ritenendo che il loro aspetto, le piccole dimensioni e la ricchezza degli elementi siano dovuti a che questi, nella loro evoluzione, invece di crescere in mole, si sono riccamente moltiplicati.

5) Dai plessi principali si originano — con o senza l'intervento di plessi secondarî — delle reti superficiali che involgono tutto il cuore: seno, atrî, ventricolo ecc. I rami di questa rete nascono o direttamente dai prolungamenti cellulari o indirettamente per mezzo di fibre del plesso provenienti probabilmente da altre cellule dei gangli cardiaci.

6) La guaina delle fibre muscolari cardiache possiede un sistema fibrillare reticolare che esiste in tutti gli animali che ho studiati ed è in essi formato essenzialmente nello istesso modo. Questa rete può facilmente essere scambiata per nervosa ove non si tenga conto scrupoloso dei rapporti con elementi che sono sicuramente di tal natura.

7) Nel miocardio degli animali studiati non esistono terminazioni nervose, ma una ricca rete che avvolge i muscoli con le sue maglie irregolari. I rami di questa rete possono prendere contatto con i nuclei muscolari ma non vi terminano mai. Non abbiamo zone limitate ma tutto il miocardio è penetrato, percorso, stretto da questa rete e riattaccato ai centri nervosi come un tutto continuo.

Dall' Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Napoli,
diretto dal Prof. Antonio Della Valle.

BIBLIOGRAFIA

Bayliss W. M. & Starling E. H., 1892, On some points in the innervation of the mammalian heart; in: Journal Phys., vol. 13, p. 407-418.

Berkley H. J., 1894, On complex nerve terminations and ganglion cells in the muscular tissue of the heart ventricle; in: Anat. Anz., vol. 9, p. 33-42.

Bidder F., 1852, Ueber functionnell verschiedene und räumlich getrennte Nervencentra im Froschherzen; in: Müller's Arch. Anat. Phys.; p. 163-177, T. 6.

— 1868, Die Endigungsweise der Herzzweige des N. vagus beim Frosch; ibidem, p. 1-50, T. 1 B.

Carlson A. J., 1904, The nervous Origin of Heart-beat in Limulus, and the nervous Nature of the Co-ordination on Conduction in the Heart; in: Amer. Journal Phys., vol. 12, p. 67-74.

— 1905[a], Furster Evidence of the nervous Origin of the Heart-beat in Limulus; ibidem, p. 471-498.

— 1905[b], Die Ganglienzellen des Bulbus arteriosus und der Kammerspitze beim Salamander; in: Pflüger's Arch., vol. 109, p. 51-62.

— 1906, On the mechanism of co-ordination and conduction in the Heart with special reference to the Heart of Limulus; in: Amer. Journal Phys., vol. 15, p. 99-120.

Cyon (De) E., 1910, I nervi del cuore. Versione italiana del Dott. Filippo Lussana, Bologna.

Diamare V., 1902, Sulla costituzione dei gangli simpatici negli Elasmobranchi e sulla morfologia dei nidi cellulari del simpatico in generale; in: Anat. Anz., vol. 20, p. 418-429.

— 1903, Metaplasma ed immagini di secrezione nelle capsule soprarenali; in: Archivio Zool., vol. 1, p. 121-178, T. 6-7.

Dogiel J., 1877, Die Ganglienzellen des Herzens bei verschiedene Tieren und beim Menschen; in: Arch. mikr. Anat., vol. 14, p. 470-480, T. 28.

— 1882, Die Nervenzellen und Nerven des Herzventrikels beim Frosche; ibidem, vol. 21, p. 21-25, T. 2.

— 1898, Zur Frage uber den feineren Bau der Herzganglien des Menschen und der Säugetiere; ibidem, vol. 53, p. 237-281, T. 12-14.

* Eiger M. J., Die Topographie der intracardialen Nervenganglien des Meerschweinchens des weissen Maus und bei Menschen (citato secondo Waledinsky).

Engelmann Th. W., 1882, Bulbus aortae des Froschherzens; in: Pfluger's Arch., vol. 29, p. 425-468.

Friedländer C., 1867, Ueber die nervöse Centralorgane des Froschherzens; in: Unters. phys. Lab. Wurzburg, p. 157-180.

Fusari R., 1902, Alcune osservazioni di fina anatomia nel campo del sistema nervoso periferico; in: Giorn. Accad. Med. Torino, A. 65, n. 8-9, p. 426-428.

Gerlach L., 1876, Ueber die Nervendigungen in der Musculatur des Froschherzens; in: Virchow's Arch., vol. 66, p. 187-223, T. 11.

Heymans I. F., 1893, Ueber Innervation des Froschherzens; in: Arch. Anat. Phys.; Phys. Abteil., pag. 391.

Heymans I. F. & Demoor L., 1894, Étude de l'innervation du coeur des vertébrés à l'aide de la méthode de Golgi; in: Archives biol., vol. 13, p. 619-676, T. 28-52.

Hofmann F. B., 1898, Beiträge zur Lehre von der Herzinnervation; in: Pflüger's Arch., vol. 72, p. 409-466, T. 7-8.

— 1902, Das intracardiale Nervensystem des Frosches; in: Arch. Anat. Phys., Anat. Abteil., p. 54-114, T. 3-6.

Imchanitzky M., 1909, Die nervöse Koordination der Vorhöfe und Kammer des Eidechsenherzens; in: Arch. Anat. Phys., Anat. Abteil., p. 117-136, T. 6.

Jacques P., 1894. Recherches sur les nerfs du coeur chez la grenouille et les Mammifères; in: Journal Anat. Phys., vol. 30, p. 622-648, T. 17-19.

Kasem-Beck, 1885, Zur Kenntniss der Herznerven; in: Arch. mikr. Anat., vol. 24, p. 11-19, T. 1 B.

— 1888, Zur Kenntniss der Herznerven; in: Arch. Anat. Phys.; Anat. Abt., p. 325-352, T. 19.

Klug F., 1881, Ueber die Herznerven des Frosches; in: Arch. Anat. Phys.; Anat. Abteil., p. 330-346, T. 13.

Koplewsky, 1881, Modifications des ganglions cardiaques dans quelques affections du myocarde. Diss. inaug., Pietroburgo.

Krause W., 1868, Anatomie des Kaninchens, Leipzig, p. 264.

Lahousse P., 1886, Die Structur des Nervenplexus in der Vorhofscheidewand des Froschherzens; in: Arch. Anat. Phys., Phys. Abteil., p. 191-196, T. 8.

Langerhans P., 1873, Zur Histologie des Herzens; in: Virchow's Arch., vol. 58, p. 65-83, T. 1.

Lee R., 1849, On the ganglion and Nerves of the Heart; in: Philos. Trans. R. S. London, p. 43-48, T. 1-4.

Lissauer M., 1909, Ueber die Lage der Ganglienzellen des menschlichen Herzens; in: Arch. mikr. Anat., vol. 74, p. 217-222, T. 13.

Löwit M., 1881, Beiträge zur Kenntniss der Innervation des Herzens; in: Pflüger's Arch., vol. 25, p. 399-495, T. 8.

Ludwig C., 1848, Ueber die Herznerven des Frosches; in: Müller's Arch. Anat. Phys., p. 139-143, T. 5.

Michailow S., 1908[a], Die Nerven des Endocardiums; in: Anat. Anz., vol. 32, p. 87-101.

— 1908[b], Das intracardiale Nervensystem des Frosches und die Methode von Ramon y Cajal; in: Internat. Monatschr. Anat. Phys., vol. 25, p. 351-372, T. 20.

Openchowsky (von) Th., 1883, Beitrag zur Kenntniss der Nervendigungen im Herzen; in: Arch. mikr. Anat., vol. 22, p. 408-419, T. 16.

*Ramon y Cajal, 1890, Sobre las terminaciones nerviosas del corazon de los batrachios y reptiles; in: Gaceta sanitaria, Barcelona.

— 1891, Terminaciones nerviosas en el corazon de los mamiferos, ibidem.

Ranvier, 1889, Traité technique d'histologie, 2[e] Edit., Paris, p. 637-648.

*Regnier, 1880, Des nerfs du coeur, Paris (citato da Jacques).

Remak R., 1844, Neurologische Erläuterungen; in: Müller's Arch. Anat. Phys., p. 463-472, T. 12.

Retzius G., 1892, Zur Kenntniss der motorischen Nervenendigungen; in: Biolog. Unters., Neue Folge, III.

Romberg & His, 1890, Beiträge zur Herzinnervation; in: Fortschr. Medicin, n. 10-11.

Scarpa A., 1794, Tabulae Neurologicae.

Schkarewsky, 1872, Ueber die Anordnung der Herzganglien bei Vögeln und Säugetieren; in: Göttinger Nachrichten, n. 20.

Schmidt V., 1895-98, Zur Innervation des Herzens; in: Sitzungsber. Naturforscher Gesellsch. Dorpat, vol. 11, p. 10-16.

Schweigger-Seidel F., 1871, Das Herz; in: Stricker's Handb., vol. 1, cap. 7, p. 177-190.

Smirnow A., 1895, Ueber die sensiblen Nervenendigungen im Herzen bei Amphibien und Säugethieren; in: Anat. Anz., vol. 10, p. 737-748.

— 1900, Zur Frage von der Endigung der motorischen Nerven in den Herzmuskeln der Wirbelthiere; ibidem, vol. 18, p. 105-115.

Trinci G., 1909, Sulla esistenza di un paraganglio cardiaco e di un paraganglio carotico (gl. carotica) nei Rettili; in: Monit. Zool. Ital., vol. 20, p. 286-290.

Tumänzew & Dogiel, 1890, Zur Lehre ueber das Nervensystem des Herzens; in: Arch. mikr. Anat., vol. 36, p. 483-506.

Veratti E., 1902, Ricerche sulla struttura della fibra muscolare striata; in: Mem. Ist. Lombardo Sc. e Lett. (Cl. Sc. mat. e nat.), vol. 19, fasc. 6.

Vignal, 1880[a], Système nerveux du coeur de la tortue moresque; in: Gaz. med. Paris, n. 45.

— 1880[b], Système nerveux du coeur du lapin; ibidem, n. 49.

— 1881, Recherches sur l'appareil ganglionnaire du coeur des vertébrés; in: Archives Physiol., p. 186.

Waledinsky A., 1910, Einige Ergänzungen zur Frage nach der Gegenwart und der Verteilung der Nervenganglien in den Herzkammern einiger Säugetiere und des Menschen; in: Anat. Anz., vol. 37, n. 17-19, p. 465-472.

Wilson I. G., 1909[a], The Nerves of the Atrio-ventricular Bundle; in: Anatomical Rec. Phyladelphia, vol. 3, p. 262.

— 1909[b], Is the atrio-ventricular Bundle to be regarded as a neuro-muscular spindle?; ibidem, p. 263.

— 1909[c], The Nerves of the atrio-ventricular Bundle; in: Proc. R. S. London, p. 151-164, T. 4-6.

finito di stampare il dì 22 Dicembre 1910

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

TAVOLA I.

Fig. 1. — Cuore della *Lacerta muralis* visto dalla parte dorsale ad un ingrandimento di circa 10 diam.

A, atrii; *V*, ventricolo; *Ci*, cava inferiore; *Cs*, cava di sinistra; *Csa*, cava superiore destra; I, II, III, IV, rami nervosi cardiaci; *Nt*, nervi destinati alla trachea; *Rd*, ramo anastomotico fra la parte destra e sinistra del plesso; *gc*, ganglio della cava sinistra; *gs*, ganglio atriale sinistro; *gd*, ganglietto destro; *Gav*, massa gangliare principale atrio-ventricolare; *Vp*, vena pulmonare.

Fig. 2. — *L. muralis*, parte dorsale del cuore per mostrare la disposizione dei gangli ed i loro legami. Ingr. 30 diam. circa.

Ns, ramo nervoso del solco atrio-ventricolare; *Pl*, plesso e cellule del seno venoso. Le altre indicazioni come nella Fig. precedente.

Fig. 3. — *Truncus arteriosus* di *L. muralis* per mostrare la disposizione generale dei nervi e gli aggruppamenti cellulari. Cloruro d'oro. Ingr. 30 diam. circa.

Ap, arteria polmonare; *As*, aorta di sinistra; *Ad*, aorta di destra; *Nt*, nervo del tronco; *Na*, ramo anastomotico col cingolo nervoso del solco atrio-ventricolare; *nc*, gruppi cellulari.

Fig. 4. — Base ventricolare del cuore di *L.* visto dalla parte cefalica. Ing. 30 diam. circa.

V, ventricolo; *Sa*, setto interatriale; *Tv*, tenda valvolare; *Cn*, cingolo nervoso del solco atrio-ventr.; *Nt*, nervo del tronco arterioso; *Ns*, nervo del setto interatriale; *gs*, ganglio del setto; *Gar*, massa gangliare principale posteriore; *gl*, gangli laterali; *ga*, gangli anteriori; *Fa*, fibre amieliniche destinate al ventricolo.

Fig. 5. — Plesso superficiale principale del ventricolo di *Triton cristatus*. Cloruro d'oro. Ingr. 90 diam. c.

Np, nervo principale; *G*, gangli.

Fig. 6. — Due cellule nervose del ganglietto del setto interatriale di *L. muralis*. Ingr. circa 600 diam.

Fig. 7. — Plesso e gangli della parte dorsale degli atrii di *Lacerta*. Cloruro d'oro. Ingr. 300 diam. c.

P, rami del plesso; *R*, rete nervosa; *c*, cellule nervose che danno direttamente rami alla rete.

Fig. 8. — *L. muralis*. Modo con cui si origina la rete nervosa sottopericardica ventricolare. Cloruro d'oro. Ingr. 600 diam.

Fn, fibre nervose amieliniche appena uscite dai gangli del solco; *n*, loro nuclei; *Fs*, fibre secondarie della rete; *Nd*, nodi di questa.

Fig. 9. — Rete pericardica del ventricolo di *Triton cristatus*. Cloruro d'oro. Ingr. 60 diam. c.

Nd, nodi posti nell'incontro delle fibre.

Tavola II.

Fig. 10. — Gruppi cellulari e nervi del *truncus arteriosus* di *L. muralis*. Cloruro d'oro. Ingr. 900 diam.

N, nervo; *a*, cellula con prolungamenti di cui quello indicato con *p* va a fondersi col nervetto *N*; *b*, cellula piriforme; *Cg*, gruppi cellulari.

Fig. 11. — Alcune cellule nervose del *truncus arteriosus* di *Elaphis quadrilineatus*. Metodo di Cajal. Ingr. 900 diam. c.

Fig. 12. — Sezione di *truncus arteriosus* di *El. quadrilineatus* passante per uno dei gangli nervosi posti alla base di esso. Metodo Cajal. Ingr. 90 diam. c.

M, media vasale; *A*, avventizia; *V*, ventricolo; *Gb* ganglio posto presso l'anello bulbare; *Gt*, ganglio che segue il tronco art. verso l'alto; *N*, nervo.

Fig. 13. — Rete fibrillare della guaina perimuscolare del ventricolo di *L. muralis*. Metodo Cajal. Ingr. 600 diam.

Fig. 14. — Rete fibrillare come sopra, ma mostrante il modo con cui, attraverso i ponti muscolari, si formano comunicazioni che permettono la formazione di una rete continua intorno a tutto il miocardio. Metodo Cajal. Ingr. 600 diam.

Fig. 15. — Taglio passante attraverso il setto interatriale di *Zamenis viridiflavus* e mostrante il ganglietto posto presso la *tenda valvolare*.

Sm, parte muscolare del setto; *Sc*, parte connettivale; *T*, tenda valvolare; *G*, ganglio nervoso.

Fig. 16. — Tronco nervoso e cellule gangliari dell'apice del ventricolo di *Triton cristatus*. Cloruro d'oro. Ingr. 330 diam. c.

T, tronco principale; *tt*, rami secondarii che vanno a formare plesso; in *a* una cellula che dà direttamente un prolungamento alla rete pericardica.

Fig. 17. — Plesso e rete del ventricolo di *Triton cristatus*. Cloruro d'oro. Ingr. 100 diam. c.

In questa figura si vede come si origina la rete che avvolge il ventricolo a guisa di un progressivo districamento del plesso principale.

N, uno dei tronchi del plesso, portante ancora cellule ganglionari; *h*, tronchicini privi di cellule e dopo cui si origina la rete *R*; in *a* si vedono i nodi di questa rete.

Fig. 18. — Rete nervosa del miocardio di *Elaphis quadrilineatus*. Metodo Cajal. Ingr. 330 diam. c.

In *N* un nervetto di pochissime fibre che contribuisce alla formazione della rete *R*.

Fig. 19. — Plesso amielinico del bulbo di *Bufo viridis*. Cloruro d'oro. Ingr. 320 diam. c.

In *R* comincia la formazione della rete.

Fig. 20. — Rete intima del miocardio di *Rana*. Metodo Cajal. Ingr. 250 diam. c.

In questa rete si vedono i rapporti che le fibre prendono con i nuclei *N*, senza terminarvi; *a, b, c,* fibre di diversa origine che vanno a formare la rete. Nella figura sono omessi la maggior parte dei numerosi nuclei muscolari, e conservati solo i pochi che presentano rapporti con le fibre nervose.

SOMMARIO

M. Fedele prep. e dis.

Lit A. Serino-Napoli

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

REAZIONI FOTOCHIMICHE DEI NITROFENILINDONI

MEMORIA I.

di M. BAKUNIN ed E. LANIS

presentata nell'adunanza del dì 3 Dicembre 1910

Raramente la configurazione nello spazio delle molecole presenta tanto interesse, quanto nella serie dei composti acrilici e l'acido cinnamico ed i suoi derivati sono quelli, che più hanno richiamato l'attenzione degli studiosi.

I cinque acidi truxillici, prima ritenuti della serie atropica, dettero occasione al Liebermann [1]) che li rinvenne nei prodotti secondarii della coca, di investigarne la natura, optando per l'ipotesi di una bimeria.

Questi acidi truxillici hanno dato luogo a molte ricerche sia rispetto alle capacità di trasformazione dell'uno nell'altro, sia rispetto l'azione dei disidratanti [2]), come più tardi vedremo, sia rispetto la loro costituzione [3]), sia rispetto alla loro sintesi, come tra l'altre quella del Rieber dell'acido α truxillico, ottenuto per ossidazione dell'acido cinnamiliden malonico polimerizzato dalla luce [4]), oppure per azione della luce sull'acido cinnamico [5]).

Dall'insieme di queste ricerche risulterebbe che gli acidi truxillici avrebbero un peso molecolare doppio di quello dell'acido cinnamico, come lo dimostrano anche le determinazioni crioscopiche attuate per l'acido α, β, γ, δ truxillico [6]). E secondo l'ipotesi del Liebermann [7]) sarebbero da considerarsi come derivati del tetrametilene, pel quale nel caso speciale, applicando la teoria del Bayer sull'esametilene, undici sarebbero gli isomeri, che per la posizione relativa rispetto il nucleo metile-

[1]) Ber. d. d. chem. Ges., XXII, 124, 782, 2240.

[2]) Liebermann, l. c.

[3]) Liebermann, Ber. XXIII, 2516, e Liebermann e Sachse, XXVI, 834; Lange, XXVII, 1410.

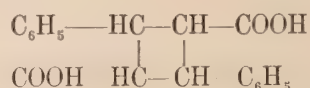
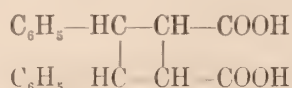
[4]) Berichte, XXXV, 2411.

[5]) Ber. Bertram, Kürsten, XXVIII, 4387; Rieber, XXXV, 2908; Ciamician Silber, XXXV, 4128.

[6]) Liebermann, Ber. XXII, 2240.

[7]) Ber. XXIII, 2516.

nico degli atomi di H o dei gruppi sostituiti deriverebbero da queste due formule fondamentali

$$\begin{array}{ll} C_6H_5\text{—HC—CH—COOH} & C_6H_5\text{—HC—CH—COOH} \\ \quad\quad\ \ | \quad\ \ | & \quad\quad\quad\ \ | \quad\ \ | \\ C_6H_5\ \ \text{HC—CH—COOH} & \text{COOH}\ \ \text{HC—CH}\ \ C_6H_5 \end{array}$$

Ma contemporaneamente altri corpi venivano rintracciati, che, per la loro composizione centesimale, per il loro comportamento ed il loro peso molecolare, potevano essere definiti isomeri dell'acido cinnamico.

Alla scoverta degli stessi si è giunti per due vie: dallo studio dei prodotti alogeno sostituiti e dal rinvenimento naturale degli acidi isomeri.

Pei prodotti alogenati, il cui numero e le cui proprietà non corrispondono a quanto si sarebbe dovuto avere, data l'esistenza di un solo acido cinnamico, pel quale erano possibili solo un α ed un β alogeno sostituito ed un solo bialogeno sostituito, è risultato infatti che vi è una coppia di α e una di β alogeno sostituiti e una coppia di bialogeno sostituiti. A queste ricerche hanno dedicato il loro lavoro molti chimici, il Glaser, il Barisch [1]), il Leukart [2]), il Jutz [3]), il Plöch [4]), il Förrer [5]), l'Anschultz e Selden [6]), il Michael e Brown [7]), l'Erlenmeyer [8]), il Roser e Haseloff [9]), il Michael e Pendleton [10]), l'Aronstein e Hollemann [11]); ma quelli che hanno preso più vivace parte alle discussioni, che l'argomento ha determinato sono il Liebermann [12]), il Michael [13]), l'Erlenmeyer.

L' ipotesi fatta in seguito allo studio dei prodotti alogenati dell'acido cinnamico venne confermata dalla scoverta degli acidi dai quali i diversi alogeno-prodotti possono considerarsi come derivati, ma mentre a simiglianza delle serie fumaroidi e malenoidi erano da aspettarsi solo due isomeri l'uno rispondente alla formula piano simetrica *cis*, l'altro alla assiale *trans*, il numero di tali isomeri è risultato di fatto superiore.

L'acido cinnamico, che è stabile e che di solito si forma, è quello fondente a 133°. Gli acidi isomeri furono, sia trovati nei prodotti secondari della coca, sia sinteticamente ottenuti.

Nei prodotti secondari della coca il Liebermann [14]) rinvenne prima un acido

[1]) Ber., XII, b. 2020.
[2]) Ber., XV, 788.
[3]) Ber., XV, a. 17.
[4]) Ber., XV, b. 1946.
[5]) Ber., XVI, 854.
[6]) Ber., XV, 2159.
[7]) Ber., XIX, 1378; B. XX, 550; Journ. Pr. Ch., XXXV, 328.
[8]) Ber., XIX, b. 1937; XXIII, b. 3130; Liebig Annal., 287.
[9]) Ber., XX, 1576.
[10]) J. Pr. Ch., XXXX, 63.
[11]) Ber., XXII, 1181.
[12]) Liebermann, Ber., XXVIII, 135. J. pr. Ch. LIII, 255.
[13]) Michael, J. Pr. Ch., XXXV, 357; XXXVIII, 6; XLVI, 412; LII, 289; LIV, 107.
[14]) Berichte, XXIII, 141, 2510.

da lui chiamato isocinnamico f. a 57°, che non potette in seguito rintracciare, per cause spiegate più tardi dal Billmann, ricavando sempre un altro isomero detto da lui allocinnamico f. a 68° [1]).

Sinteticamente quest' ultimo acido fu ottenuto dal bromallocinnamico [2]) e dall'acido benzalmalonico [3]).

Ma riducendo il β bromocinnamico del Glaser, che sarebbe invece l'α bromallocinnamico, l'Erlenmeyer [4]) preparò un acido isomero che chiamò anche acido isocinnamico f. a 42° atto a trasformarsi tanto nell'allocinnamico f. a 68°, quanto nel cinnamico ordinario fondente a 133°.

Come anche per riduzione dell'acido fenilpropiolico con Palladio colloidale [5]) si ebbe notevole quantità degli acidi fondenti a 42° e 68°. Tutti questi acidi hanno abito cristallino diverso.

Parecchi furono i dubbî manifestati sulla esistenza di questo o quell' isomero e parecchie le teorie in proposito emesse.

Il Billmann si è occupato della quistione in tre memorie successive [6]). Un accurato esame del comportamento dei tre corpi f. a 58°-68°-42° durante la fusione, e durante la cristallizzazione ha dimostrato la capacità di trasformazione per ciascuno di questi acidi negli altri due o per fusione con successivo rapido raffreddamento o per infezione delle masse fuse o delle soluzioni di uno degli acidi con particelle dell'altro, questi fatti, le facili trasformazioni per brevi e bassi riscaldamenti, depongono secondo il Billmann per la trimorfia di questi corpi. Le differenze non grandi nelle solubilità, nel calore di combustione non crede che siano in opposizione con l'ipotesi della trimorfia.

Le ricerche dello spettro di assorbimento [7]) quello della conducibilità elettrica nelle soluzioni di questi acidi isomeri dimostrano che le soluzioni dei tre corpi sono identiche.

Il Liebermann [8]) che in seguito alla pubblicazione del Billmann si è occupato dell'argomento, ha in massima confermato per quanto con certe riserve l'ipotesi del Billmann e dal comportamento dei sali di questi acidi e delle loro soluzioni pare potersi concludere che in soluzione esiste un'unica sostanza quella f. a 42° che con grande facilità per l'influenza già ricordata si trasforma nelle altre.

L' Erlenmeyer jun. [9]) non è d'accordo sull' ipotesi della polimorfia.

Oltre questi isomeri secondo le ricerche di Erlenmeyer e dei suoi allievi [10]) ne esisterebbero altri e così nell'acido cinnamico dello Storax si potrebbero ottenere isomeri α e β e l'acido cinnamico sintetico sarebbe una mescolanza dello

---

[1]) Berichte, XXIII, 2510.

[2]) Liebermann e Scholz, Ber. XXV, 950.

[3]) Liebermann, Ber. XXVI, 1571.

[4]) Ber. XXIII, 3130 e Ann. Lieb. 287, I.

[5]) Paal e Hartmann, Ber. XLII, 3930.

[6]) Berichte XLII. 182, 1443 e XLIII, 568.

[7]) Stobbe, Berichte XLIII, 504.

[8]) Liebermann, Ber. XLII, 1027; Liebermann e Trüchsass, XLII, 4659; Stoermer, XLII, 4869.

[9]) Ber. XLII, 521.

[10]) Erlenmeyer jun., B. XXXVIII, 3891; XXXIX, 287; XL, 654; XLII, 502; XLIII, 955.

Storax cinnamico con il cosidetto etero-cinnamico, che anch'esso esisterebbe in una forma α e β.

Le differenze in questi varî isomeri sono rappresentate da lievi variazioni di essi e di alcuni derivati nell'abito cristallino, nella solubilità e nei punti di fusione.

Il Rieber e il Goldschmidt [1]) credono che l'acido chiamato dall'Erlenmayer eterocinnamico sia un acido cinnamico impuro.

In quanto poi alla formula spaziale da darsi all'acido cinnamico f. a 133° e agli isomeri allo, iso f. a 42°-57°-68°; la forma malenoide è da attribuirsi a questi ultimi data la loro formazione dall'acido fenilpropiolico [2]) il Billmann [3]) fa inoltre osservare che i soli alloacidi dànno con sali di mercurio dei composti mercurici complessi [4]) a simiglianza dell'acido maleico e citraconico, mentre al pari dell'acido fumarico e mesaconico l'acido cinnamico f. a 133° non lo dà, se non sotto forma di etere.

Più tardi [5]) venne comunicato che l'etere metilico ed etilico dell'acido cinnamico ordinario trasformati in questi composti mercurici complessi, saponificati danno il composto mercurico dell'acido cinnamico; in ogni modo questo non esclude che la trasformazione è perlomeno più difficile nell'acido cinnamico f. a 133°.

Per risolvere il problema della costituzione di questi isomeri sono di speciale aiuto alcùni prodotti di disidratazione per eliminazione d'acqua tra il gruppo fenico e carbossilico, che prendono il nome di indoni.

Già per diversi acidi truxillici fu osservato da Liebermann e Bergami [6]) che uno solo di essi l'α truxillico dava col trattamento con H_2SO_4 concentrato un composto con proprietà chetoniche, che fu chiamato truxone $(C_9H_6O)n$ che ridotto con P ed HI dava un idrocarburo della formola $(C_9H_8)n$ il truxene.

Lo stesso truxone si forma se l'acido allocinnamico f. a 69° [7]) viene disidratato con H_2SO_4 concentrato. Questa capacità di dare questi composti chetonici è in rapporto con la formola spaziale degli acidi; infatti l'acido cinnamico ordinario non lo dà; e dei composti bromocinnamici [8]) solo uno della coppia α e uno della coppia β danno con acido solforico concentrato alogeno truxone e uno dei due dibromocinnamici, l'αβ dibromoallocinnamico f. a 100°, dà un dialogeno truxone.

È stato anche preparato un diclorotruχone dal Roser e Haseloff e il clorotruxone dall'α cloro-allocinnamico dal Manthey (l. c).

Questi derivati sono ottenuti per azione dell'acido solforico, o per distillazione dei prodotti in presenza di P_2O_5 in tal modo il Lanser [9]) potette avere anche dall'isomero β dibrocinnamico f. a 134° il dibromoindone, come lo Schlossberg [10]) dall'idrobromo propiolacido il γ bromo α indone.

---

[1]) Ber. XLIII, 453.

[2]) Paal e Hartmann, l. c.

[3]) Ber., XLIII, 573.

[4]) Ber. XXXIII, 1641; XXXV, 2571.

[5]) Schracht, Schoeller, Strachse, Ber. XLIII, 695.

[6]) Ber. XXII, 124 e 782.

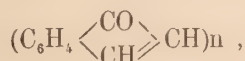
[7]) Liebermann, Ber. XXXI, 2095.

[8]) Roser e Haseloff, Lieb. Ann. 247, 138, Ber. XX, 1576; Leukart, Ber. XV, 17; Manthey, Ber. XXXII, 2475, XXXIII, 3081

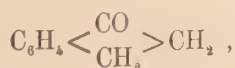
[9]) Lanser, Ber. XXXII, 2477.

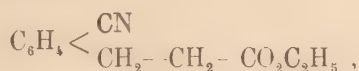
[10]) Schlossberg, Ber. XXXIII, 2425.

La costituzione del truxone è rappresentata da questo schema

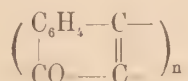
$$(C_6H_4<^{CO}_{CH}>CH)n \text{ ,}$$

ma il problema è la determinazione della sua grandezza molecolare.

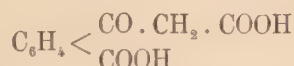
Il truxene (C_9H_6)n ottenuto dal Liebermann e Bergami [1]) per riduzione del truxone, prodotto di disidratazione dell'acido α truxillico, risulta identico al truxene preparato dal Haussman [2]) per riduzione in tubo chiuso con acido cloridrico o coll'acido iodidrico o per distillazione con zinco dell'idrindone

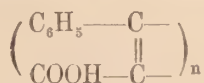
$$C_6H_4<^{CO}_{CH_2}>CH_2 \text{ ,}$$

quest'ultimo prodottosi per decomposizione con acido cloridrico concentrato dell'etere dell'acido o-cianidrocinnamico [3])

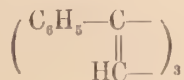
$$C_6H_4<^{CN}_{CH_2-CH_2-CO_2C_2H_5} \text{ ,}$$

ed identico al truxene che il Kipping [4]) ebbe per azione del P_2O_5 mescolato ad acido fenilpropionico scaldati a 80°-100°.

Questo truxene si trasforma per ossidazione [5]) in tribenzoilbenzolo

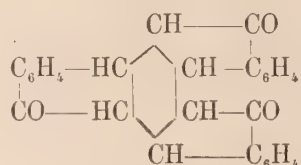
$$\left(\begin{matrix} C_6H_4—C— \\ | \quad\quad \| \\ CO — C \end{matrix}\right)_n$$

che il Gabriel e il Michael [6]) ebbero per azione del H_2SO_4 su acido ftalacetico

$$C_6H_4<^{CO\,.\,CH_2\,.\,COOH}_{COOH}$$

La grandezza molecolare del triortobenzoilenbenzolo non può essere direttamente determinata, ma dalla sua trasformazione per fusione con KOH in un acido

$$\left(\begin{matrix} C_6H_5—C— \\ \| \\ COOH—C— \end{matrix}\right)_n$$

che distillato su calce dà il trifenilbenzolo

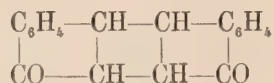
$$\left(\begin{matrix} C_6H_5—C— \\ \| \\ HC— \end{matrix}\right)_3$$

[1]) Ber. XXII, 782; XXIII, 317.
[2]) Ber. XXII, 2019.
[3]) Gabriel e Hausmann, Ber. XXII, 2017.
[4]) Journ. Chem. Soc., 65, 269.
[5]) Liebermann e Bergami, Hausmann, l. c.
[6]) Ber. X, 1331 e XI, 1007.

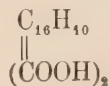
ch'è un trimero del fenilacetilene, si dovrebbe argomentare, qualora nessuna polimerizzazione avvenisse nelle successive trasformazioni, che trimeri siano il truxene e i successivi prodotti di ossidazione, donde il loro nome di tribenzoilenbenzolo ed acido fenениltribenzoico, e il truxone sarebbe da considerarsi come un esaidroderivato del tribenzoilenbenzene

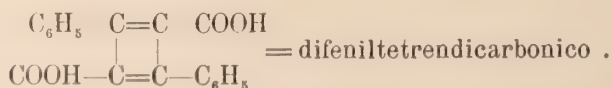
```
              CH——CO
$C_6H_4$—HC⟨  ⟩CH—$C_6H_4$
CO——HC     CH—CO
              CH——$C_6H_4$
```

Le determinazioni dei pesi molecolari, col metodo ebolliscopico con solvente anilina e fenolo, attuate dal Kipping pel truxene e pel tribenzoilbenzene C_9H_4O danno valori che si avvicinano alla formola trimerizzata per quanto si abbiano in talune determinazioni valori troppo alti e irregolari.

Ma l'ipotesi di un composto bimerizzato in principio sostenuta dal Liebermann, data la formazione del truxone dall'acido truxillico, che è un dimero del cinnamico [1]) e il non aversi la facile trasformazione per ossidazione del truxone in tri-orto-benzoilenbenzolo, che solo in piccole quantità si produce per fusione con potassa, fu nuovamente sostenuta dal Manthey [2]) che per riduzione del bromotruxone ottenuto dal bromoallocinnamico, ebbe truxone e diidrotruxone. Il peso molecolare di questo ultimo prodotto determinato ebullioscopicamente în acetone dava valori corrispondenti alla formola $C_{18}H_{16}O_2$.

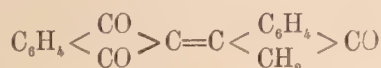
Da ciò poteva argomentarsi anche bimerizzato il truxone considerandolo come un tetrenderivato

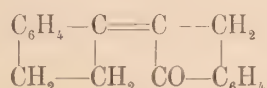
```
$C_6H_4$—CH—CH—$C_6H_4$
|        |    |      |
CO——CH—CH—CO
```

e tale ipotesi parve venir confermata, dal fatto che l'acido trifeniltrimesinico, preparato dal Lanser per azione del $POCl_3$ sull'acido fenilpropionico con un susseguente trattamento potassico [3]) e che il Lanser dice identico all'acido feneniltribenzoico, risulta dalle determinazioni ebullioscopiche e da quelle del Manthey corrispondente alla formola

$$\begin{array}{c} C_{16}H_{10} \\ \| \\ (COOH)_2 \end{array}$$

cioè $^2/_3$ del peso molecolare precedentemente ammesso onde gli assegna la formola

$$\begin{array}{l} C_6H_5 \quad C{=}C \quad COOH \\ \qquad\quad\;\; | \quad\; | \\ COOH{-}C{=}C{-}C_6H_5 \end{array} = \text{difeniltetrendicarbonico} .$$

[1]) Ber. XXII, 782.
[2]) Ber. XXXIII, 3081.
[3]) Ber. XXXII, 2478.

Non improbabile crede il Manthey che pel tribenzoilenbenzolo alla formola $C_{27}H_{12}O_3$ debba sostituirsi quella $C_{18}H_8O_2$, data la formazione di esso dall'anidrobisdichetoidrindene (anidrodiindandion) [1])

$$C_6H_4<\genfrac{}{}{0pt}{}{CO}{CO}>C=C<\genfrac{}{}{0pt}{}{C_6H_4}{CH_2}>CO$$

Per i rapporti che corrono tra l'acido feneniltribenzoico (dal Lanser ritenuto identico al trifeniltrimesinico) il tribenzoilenbenzolo, il truxone ed il truxene, bimerizzati dovrebbero essere considerati il truxone ed il truxene, ciò che il Kipping [2]) ha anche ammesso pel truxene tenendo conto della sua derivazione per azione dell'acido solforico diluito dal bisdichetoidrindene o anidro bisidrindone

$$\begin{array}{llll} C_6H_4- & C= & =C & --CH_2 \\ | & | & | & | \\ CH_2- & -CH_2 & CO- & -C_6H_4 \end{array}$$

senza formazione intermediaria di idrindone, che il Kipping dice avrebbe dovuto aversi per potere dalla forma bimerizzata passare alla trimerizzata.

Il Lanser e l'Halvorsen [3]) confermano la formola del Lanser per il difeniltetrendicarbonico gia trifeniltrimesinico studiandone anche l'anidride.

Così da questo insieme di ricerche si sarebbero dovute ammettere formole bimerizzate pel truxone, truxene, acido feneniltribenzoico e pel tribenzoilbenzolo lasciando la trimerizzata per il trifenilbenzolo che è confermata dai varii autori.

Ma il Michael [4]), ricordando i lavori da lui precedentemente fatti con Bücher [5]) dimostra che l'anidride preparata dal Lanser per azione del $POCl_3$, sul fenilpropiolico, fu già da loro ottenuta dallo stesso acido con l'anidride acetica e che l'acido che se ne ricava colla KOH chiamato difeniltetrendicarbonico è differente dal vero acido feneniltribenzoico ottenuto dall'acido ftalacetico o da altri corpi ed egli ritiene che sia non un tetrendicarbonico ma un 1-fenil 2-3 naftalindicarbonico.

Sulla costituzione di questi ultimi acidi sono state pubblicate parecchie memorie dal Michael, dallo Stobbe, dal Bücher ma omettiamo per brevità tali discussioni, allontanandosi esse dall'argomento che c'interessa [6]).

Dalla succinta esposizione della letteratura, che riguarda l'acido cinnamico, che abbiamo creduto di tracciare per l'affinità che può avere coll'argomento oggetto dei nostri studi, si può facilmente comprendere di quale interesse è dal lato teoretico la soluzione del problema, che riguarda la costituzione degli acidi della serie acrilica e dei loro derivati in rapporto alla loro costituzione speciale.

Di composti, le cui isomerie hanno potuto abbastanza bene spiegarsi con le formole spaziali cis e trans, ve ne sono, com'è noto, parecchi come il maleico, il

[1]) Wislicenus e Reitzenstein, Ann. 277-362 e Kostanecki Laczkowski, Ber. XXX, 2143.

[2]) Journ. Chem. Soc., 65, 497.

[3]) Ber. XXXV, 1407.

[4]) Ber. XXXIX, 1908.

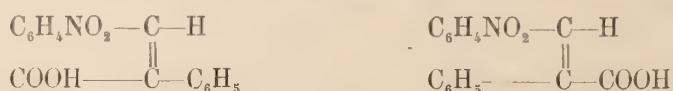
[5]) Amer. Journ. Chem., 20, 92.

[6]) Stobbe, Ber. XL, 3372; Michael e Bücher, XLI, 70; Journ. Am. Soc., XXX, 1244.

fumarico; il tiglinico e l'angelico; il crotonico e l'isocrotonico ecc., ma meno numerosi sono quelli della serie fenilacrilica come l'acido cumarico ed i suoi derivati; gli acidi β-arilcinnamici; i furfuracrilici; gli acidi cinnamilidenacetici. A questa serie appartengono gli acidi dello studio delle isomerie dei quali uno di noi si è occupato.

Sinteticamente hanno potuto essere preparati tre coppie di acidi fenilnitrocinnamici orto, meta e para [1]). Una coppia di acidi fenilcinnamici [2]). Oltre l'abito cristallino di questi acidi [3]) sono stati studiati i sali ed i derivati degli stessi; cosicchè si è potuto stabilire trattarsi non di forme dimorfe, ma di veri e propri isomeri, che conservano la differente loro configurazione nei varî derivati.

Le formole cis e trans che per analogia agli acidi cinnamici possono darsi:

$$\begin{array}{l} C_6H_4NO_2-C-H \\ \qquad\qquad\quad \| \\ COOH-\!\!-\!\!-C-C_6H_5 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} C_6H_4NO_2-C-H \\ \qquad\qquad\quad \| \\ C_6H_5-\!\!-\!\!-C-COOH \end{array}$$

chiedevano a loro conferma lo studio delle trasformazioni rispettive dei termini di ciascuna coppia degli acidi l'uno nell'altro, come la possibilità di determinare la posizione relativa del gruppo fenico rispetto il gruppo carbossilico.

Due vie hanno permesso di giungere a dati di una certa importanza. Lo studio dell'azione della luce, e quella dei prodotti di disidratazione di questi acidi.

Questi prodotti furono ottenuti discostandosi dai comuni metodi di trattamento diretto degli acidi con acido solforico o distillazione di essi con anidride fosforica o con altre anidridi, applicando un nuovo metodo che ha dato risultati veramente interessanti non solo per la preparazione dei prodotti di disidratazione di questi acidi e di acidi in genere, ma per la preparazione degli eteri [4]).

Il metodo particolarmente descritto a suo tempo consiste nello sciogliere i corpi in solventi differenti e opportunamente scelti in rapporto alla temperatura occorrente alla reazione, e nel far agire su quelle soluzioni l' anidride fosforica, evitando per quanto è possibile l'evaporazione dei solventi.

Ciascun termine della coppia di isomeri si è trasformata in un anidride prodottasi per eliminazione di acqua tra due gruppi carbossilici di due molecole ed entrambi i termini di ciascuna coppia hanno dato una medesima anidride interna, per eliminazione di una molecola d' acqua tra un carbossile ed un gruppo fenico, trasformandosi nei corpi indonici.

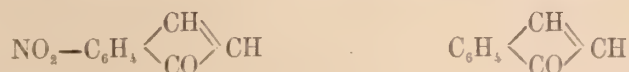
Ma mentre gli isomeri fenilnitrocinnamici orto f. a 146°, meta f. a 195°, para f. a 143° subiscono rapidamente la trasformazione in indoni; gli isomeri o. f. a 195°, m. f. a 181° e p. a 214° presentano maggiori difficoltà; ciò che permette dedurre di avere i primi isomeri la formola cis e i secondi la formola trans. Tale ipotesi viene anche confermata dal comportamento degli isomeri con anilina e con basi analoghe (v. l. c.) nonchè coi mezzi idrogenanti.

L'identità dei fenilnitroindoni preparati dai due termini di ciascuna coppia fa supporre che l'isomero trans si trasformi nel cis.

[1]) Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat., 1890; Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., 1901; Gazz. chim., XXV.
[2]) Gazz. chim. Ital., XXVII, b. e Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., 1901.
[3]) Rend. Sc. fis. e mat., 1895, Scacchi.
[4]) Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., Vol. X, Serie II e Rend. Acc. Sc. fis. e mat., 1900, 1901, 1906.

Da uno solo dei fenilcinnamici si è avuto per ora il fenilindone.

Tutti questi indoni, a differenza di quanto si ammette per i prodotti analoghi ottenuti dagli acidi cinnamici e bromocinnamici, sono non polimerizzati e hanno la formola semplice

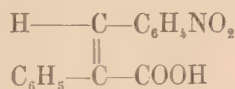
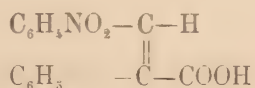
$$NO_2-C_6H_4\langle{}^{CH}_{CO}\rangle CH \qquad C_6H_4\langle{}^{CH}_{CO}\rangle CH$$

Applicando il nuovo metodo per la disidratazione all'acido allocinnamico [1]) pareva aversi oltre il polimero dell'indone f. a 289° un corpo rosso f. a 170° forse l'indone, che dato il piccolo saggio di prova da uno di noi fatto, non si è potuto ben definire e che non si è avuto occasione di ripreparare, nè per quanto sappiamo fu da altri tentata col nuovo metodo la preparazione.

Ma il fatto non privo d'interesse, e che nel corso delle esperienze si è osservato, è che alcuni di questi indoni subivano per azione della luce [2]) un cambiamento dovuto con ogni probabilità ad una polimerizzazione. Così per potere possibilmente chiarire la costituzione di questi importanti corpi della serie indenica e dei composti della serie acrilica si sono intraprese una serie di esperimenti fotochimici, che saranno gradatamente pubblicati.

L'azione della luce fu già da uno di noi sperimentata sugli acidi fenilnitrocinnamici e venne constatato [3]) che l'isomero cis f. a 142° del para

$$\begin{array}{l} H-\!\!-\!\!-C-C_6H_4NO_2 \\ \qquad\ \ \| \\ C_6H_5-C-COOH \end{array}$$

si trasforma nel trans

$$\begin{array}{l} C_6H_4NO_2-C-H \\ \qquad\qquad\ \ \| \\ C_6H_5 \qquad -C-COOH \end{array}$$

non solo, ma che si ha una trasformazione del cis nel trans e viceversa per gli isomeri meta, e tale metamorfosi si ha per azione diretta della luce, senza intervento di I, che o non giova, se pur non nuoce alla reazione, mentre l'azione catalittica del carbone pare giovare.

L'azione della luce su composti della serie etilenica è stata sperimentata da parecchi autori su composti derivati dal difeniletilene del tipo $(C_6H_4R\ (C_6H_5)C=C(x)H$ $x=$ alogeno [4]); sui composti del tipo $C_6H_4R(C_6H_5)C=C(H)COOH$ dallo Stoermer e Friderici [5]); dal Paal e dallo Schulze [6]) sul cis e trans dibenzoiletilene; dal Perkin [7]) sugli acidi metilcumarici e dallo Stoermer in una recente memoria [8]) su isomeri di questo tipo ed è stato dimostrato che non solo può aversi la trasfor-

[1]) Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., 1901.

[2]) Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., 1900-901.

[3]) Gazz. Chim. Ital., XXVII, p. II.

[4]) Stoermer, Kippe e Simon (Dis. Rostok 1904, Ber. XXXVII, 4163).

[5]) Ber. XLI, 327.

[6]) Ber. XXXV, 168.

[7]) Jour. Chem. Soc., XXXIX, 409.

[8]) Ber. XLII, 4865.

mazione dell'isomero labile f. a bassa temperatura cis nell'isomero stabile f. a più alta temperatura trans, ma anche l'inverso e questo senza catalizzatori di sorta, alla luce del giorno in alcuni casi, alla luce di una uviol-lamp che secondo lo Stoermer attuerebbe le condizioni richieste per la trasformazione dei composti stabili nei labili.

L'azione della luce agevolata dal bromo trasforma [1]) l'acido isocrotonico in crotonico, l'angelico in tiglinico, il maleico in fumarico, per quanto la presenza del bromo è atta a determinare la reazione inversa, così la trasformazione del dibromotiglinico in dibromoangelico; l'α dibromotolanico in β dibromotolanico.

L'acido maleico si è trasformato per quanto lentamente in fumarico per azione della luce solare [2]) e la trasformazione inversa colla uviol-lamp si ebbe dallo Stoermer (l. c.).

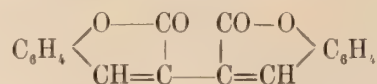
Sull'acido allofurfuralcrilico, allocinnamilidenacetico, alloisocinnamico ha sperimentato il Liebermann [3]) trasformandoli negli isomeri stabili per azione della luce e servendosi dell'iodio come catalizzante.

La trasformazione inversa dell'acido cinnamico stabile f. a 133° in soluzione acquosa nell'iso f. a 58° fu attuata dallo Stoermer colla uviol-lamp, nè è improbabile che si fosse formato prima l'iso f. a 42°, trasformatosi poi per varî trattamenti nell'isomero f. a 58°.

L'isomero f. a 68° si trasforma nell'identica condizione in acido cinnamico f. a 133°.

Questo comportamento dell'acido cinnamico in soluzione è diverso da quello dell'acido cinnamico allo stato solido che per le osservazioni fatte dal Bertram e Kürsten [4]) e dal Rieber [5]) subisce una polimerizzazione trasformandosi in acido truxillico.

Una polimerizzazione simile [6]) è stata osservata per lo stilbene, che anche in soluzione si bimerizza e la cumarina che in soluzione alcoolica, benzolica e in paraldeide ed anche allo stato solido si trasforma in un polimero, questo parrebbe dovere avere la formula doppia, che potrebbe essere

$$C_6H_4\left<\begin{matrix}O - CO & CO - O \\ | & | \\ CH{=}C - & C{=}CH\end{matrix}\right>C_6H_4$$

Per la sua struttura la cumarina ha molte analogie coll'indone nel caso dell'indone si tratta di un prodotto di eliminazione di H_2O tra il gruppo carbossilico e il fenilico, qui di un eliminazione di H_2O tra l'OH sostituito nel fenile e il gruppo carbossilico.

Per quanto ci risulta non vi sono esperienze della luce sull'indone, perciò queste ricerche dovevano riuscire di speciale interesse.

I due indoni sui quali abbiamo attuato le prime esperienze sono il fenilortonitroindone e il fenilparanitroindone.

---

[1]) Wislicenus K. S. ges. Wissensch. zu Leipzig, 1895, 489.

[2]) Ciamician e Silber, Gazz. Chim. Ital., 1904, b 147.

[3]) Ber. XXIII, 2510; XXVIII, 1438 e 1443; XLII, 1027.

[4]) Ber. XXVIII, 387.

[5]) Ber. XXXV, 2908.

[6]) Ciamician e Silber, l. c. 143, 145.

Il primo dei due è stato ottenuto dall'acido fenilortonitrocinnamico disciolto in cloroformio e bollito con anidride fosforica. In questa preparazione abbiamo sperimentato di lasciare bollire lungo tempo l'acido coll'anidride fosforica in cloroformio, senza osservare la formazione del corpo rosso, il fenil o. n. indone, pure avendo constatato la formazione dell'anidride fenil-ortonitrocinnamica.

Invece basta dopo aver per breve tempo scaldato la soluzione cloroformica con una non grande quantità di anidride, riversarla in un becker di porcellana e aggiungere altra anidride provocando con una bacchetta l'intima miscela della parte liquida colla solida, perchè si abbia una mescolanza che ha tutto l'aspetto di una poltiglia abbastanza fluida, che è l'indice della trasformazione in indone.

Bisognerebbe ammettere o che si determina per l'anidride fosforica uno stato fisico paragonabile allo stato colloidale dei metalli nelle soluzioni, o che si formi un vero e proprio composto tra l'anidride fosforica e l'anidride dell'acido, che rappresenti il termine di passaggio per la trasformazione in indone.

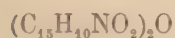
Per quanto si siano tentati dei mezzi meccanici e dei mezzi chimici per isolare questa forma di passaggio, non si è ancora giunti a precisare il fenomeno. Assieme col fenil-ortonitroindone f. a 139° si forma in piccola quantità una sostanza gialla, meno solubile in benzina dell'indone e che fonde tra 200°-257°.

Ricristallizzatala frazionatamente dal cloroformio, lasciandone le soluzioni a lenta spontanea evaporazione, si ebbe un deposito costituito da una polvere cristallina gialletta che fondeva a 286°.

La sostanza è insolubile in carbonato sodico, nè si modifica per azione della barite.

Per combustione si ebbe: da gr. 0,156 di sost. gr. 0,3996 di CO_2 e gr. 0,0596 di H_2O.

$$C = 69.85 \qquad H = 4.24$$

Questi risultati si avvicinano più alla composizione dell'anidride che dell'indone.

$(C_{15}H_{10}NO_2)_2O$	C = 69.2	H = 3.88	N = 5.38
$C_{15}H_9NO_3$	C = 71.71	H = 3.58	N = 5.57

Ma è bene ricordare che delle anidridi dei due acidi f. o. nitrocinnamici una quella corrispondente all'acido f. a 147° non fu isolata [1], l'altra corrispondente all'acido f. a 195°-96° fu isolata e analizzata [2]) e fondeva a 126°.

Purtuttavia sia perchè non reagisce col $Ba(OH)_2$, sia per il suo punto di fusione più alto dell'acido saremmo piuttosto indotti a credere ad una forma polimera di una delle due anidride. Per altro ne occorrono quantità maggiori per una ulteriore purificazione e per ulteriore esame, determinandone il peso molecolare.

---

[1]) Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., 1900.

[2]) Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., 1900 e Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat., 1906.

Azione della luce sul fenil-ortonitroindone.

L'azione della luce su questo composto fu sperimentata prima di tutto sul corpo allo stato solido, esponendolo al sole in recipienti di vetro variamente colorati.

In questi primi sperimenti di saggio non abbiamo creduto dover ricorrere alle soluzioni colorate [1]) bastandoci come direttiva il complessivo differente comportamento rispetto quei raggi che traversano i vetri colorati, salvo poi a specificarli in seguito con determinate soluzioni. Si sono usate: una boccia di vetro nero, atta a preservare il nitrato di argento da ogni alterazione, un recipiente azzuro cupo, un recipiente di vetro giallo, un recipiente fatto in modo che la luce filtrasse attraverso una soluzione di carminio, un recipiente di vetro ordinario incolore.

L'esposizione al sole fu fatta lasciando le sostanze al sole per 4 mesi circa, dal 15 luglio all'8 novembre; si partì da un grammo di ciascuna di esse e si ripresero ad esposizione finita con le uguali quantità di cloroformio, che scioglie benissimo il fenilnitroindone non trasformato e assai poco l'indone trasformato.

Nel recipiente nero l'indone si mantenne inalterato. Nell'azzurro la trasformazione avvenne per $^2/_5$ circa della sostanza. Nel rosso e nel giallo per $^1/_3$ circa. Nei recipienti bianchi per $^4/_5$.

Dobbiamo però osservare, per quanto si agitassero ogni giorno i recipienti, le condizioni migliori di esposizione sono realizzate, quando la sostanza viene esposta al sole in strato sottilissimo in recipienti scoverti; in queste condizioni non in mesi, ma in poche ore nei mesi caldi di luglio o di agosto si ha la trasformazione quasi completa.

La trasformazione è resa evidente dal mutamento di colore del fenilnitroindone, che da rosso caratteristico diventa bianco leggermente giallognolo.

Il coefficiente di solubilità del nuovo prodotto nei varî solventi è minimo e in questo ricorda il truxone dell'acido cinnamico.

Cristallizzato dal cloroformio o dal benzolo nei quali è pochissimo solubile, si ha per raffreddamento la separazione degli aghetti micacei. È difficile precisare il punto di fusione determinato coi termometri ad azoto compresso, si osserva che alla temperatura di fusione questo corpo tende a decomporsi, e perciò con riscaldamento lento la sostanza si decompone senza fondersi carbonizzandosi lentamente, con un riscaldamento rapido fonde decomponendosi attorno 320° 325°.

Quando si scalda in tubo da saggio si osserva sulle pareti del tubo una distillazione del prodotto, e la piccola parte sul tubo assume un colore rosso, ma la cennata tendenza del prodotto ad annerirsi e decomporsi non permette bene di controllare le modificazioni.

Avendo una volta scaldato rapidamente in tubo da saggio a fiamma diretta questo corpo fino a fusione, s'isolò una sostanza bruna solubile in acido acetico e rimase indisciolta in questo solvente una parte, che aveva l'apparenza cristallina e si comportava per fusione come la sostanza primitiva.

Per combustione del prodotto di trasformazione alla luce dell'indone si ebbe:

---

[1]) Gazz. Chim., XXXII, b, 535.

Da gr. 0,2525 di sost. gr. 0,6611 di CO_2 e gr. 0,0902 di H_2O.

71.40
3.96

Cifre corrispondenti alle percentuali richieste per il nitrofenilindone.

Tutto porta a credere si tratti di un polimero, ma quale è la sua grandezza molecolare?

Una determinazione crioscopica in veratrolo fatta per l'o. f. nitroindone e tre determinazioni ebolliscopiche in cloroformio hanno confermato la forma molecolare semplice.

Costante 64

Solvente	Conc.	Abbass.	Coeff. d'abb.	Peso mol. tr.	Peso mol. calc. per $C_{15}H_9NO_3$
Veratrolo	0.97	0.235	0.24	266	251

Costante in volume 26

Solvente	Concentr.	Innalz. osserv.	Coeff. d'innalz.	Peso m. tr.
$CH\,Cl_3$	2.14	0.2	0.093	279
	1.61	0.15	0.093	279
	2.13	0.22	0.103	253

Ma la poca solubilità del prodotto trasformato alla luce ha reso inutile i tentativi di determinazione per il suo peso molecolare.

La sostanza bollita in soluzione benzinica con fenilidrazina, dette un deposito di aghi micacei con l'aspetto e con il punto di fusione della sostanza primitiva.

Avendo bollito in soluzione benzolica il prodotto col PCl_5 e precipitando coll'etere di petrolio, si ebbe la sostanza immodificata e immodificata rimane, se si fonde col PCl_5, anzi essa tende a sublimare prima ancora che la massa si fonda, ma anche facendo cadere il PCl_5 nella massa mentre tende a fondersi, non si è isolato che prodotto immodificato o semplicemente abbrunito.

Invece il f. o. nitroindone primitivo f. a 139° non si clorura se scaldato in solvente col PCl_5, ma fuso con lo stesso si trasforma nel prodotto biclorurato f. a 260°; si ebbe per contenuto in Cl:

Da gr. 0,0927 gr. 0,0651 di Ag. pari a gr. 0,02139 di Cl;
e per cento Cl 23,07:
calcolato per $C_{15}H_9NO_2$

$$Cl\ \% = 23.20$$

Parrebbe dunque che le proprietà chetoniche del prodotto di trasformazione sono per lo meno notevolmente attenuate, se non completamente scomparse, cosa che non si ha pel truxone, che si combina con la fenilidrazina, e si clorura per azione del PCl_5.

Azione della luce sul fenilortonitroindone sciolto in soluzione.

Ancora più complessa è la reazione se il fenilnitroindone viene esposto al sole dopo essere stato disciolto in solventi. I solventi sperimentati sono stati l'etere, il benzolo, il cloroformio, il tetracloruro di carbonio, l'alcool, l'acetone.

Per tutti questi solventi furono fatti dei saggi di prova. Si constatò così che appena le soluzioni sono messe al sole dopo breve tempo cominciano a lasciar separare dei depositi il cui coefficiente di solubilità verso i solventi è minimo.

Da una soluzione benzinica di 3 gr. d'indone si raccolse dopo sette giorni (16-23 agosto 1909) gr. 1,8 di un deposito costituito da granuli cristallini f. a 218°-19° d'un giallo lievemente arancione, di cristalli più grossi di un giallo più chiaro f. a 260-270° e di una polvere non fondente a 300°.

Essendosi rotta la boccia con le acque madri si rimise a reagire un gr. di f. n. indone in benzolo e si ebbe dopo tre giorni, dal 27 agosto al 30 un deposito costituito da granuli cristallini fondenti verso 200° e da cristalli micacei non fondenti a 300°.

Per ulteriore esposizione al sole durata fino al 28 settembre, (durata di esposizione che è per altro inutile) si ebbero delle mescolanze polverose gialle f. a 210-250°. In complesso quantitativamente la sostanza depositata corrispondeva a quella messa a reagire.

In soluzione cloroformica essendo stato disciolto un gr. si ebbe un primo deposito cristallino giallo di circa 0,4 gr. fondenti verso i 210° un secondo e terzo polveroso gialletto, fondenti verso i 220° con un tempo di esposizione pari a quello ricordato per la soluzione benzolica.

In un altro saggio in cui 3 gr. d'indone erano stati disciolti in cloroformio dal 15-23 agosto si depositarono gr. 1,5 di sostanza cristallina giallelta f. attorno 229°. Il resto della sostanza in parte si depositava in parte si ricavava per distillazione del solvente con punti di fusione non buoni, fondendo verso i 226° e sopra i 300°. Anche nel deposito ottenuto dal cloroformio si osservava la presenza di cristallini non uniformi per colore e per aspetto.

In soluzione acetonica un gr. d'indone dopo la esposizione al sole dal 19 al 23 Agosto lasciò depositarsi delle masse cristalline giallette di gr. 0,5 f. a 218°-219° e il resto della sostanza o si depositava per ulteriore azione del sole o si ricavava per distillazione del solvente e si ebbero masse cristalline e polvere fondenti attorno i 219°.

Dalla soluzione alcoolica si ebbero depositi polverosi gialletti fondenti verso 220°.

Dalla soluzione eterea mescolanze polverose cristalline che in massima fondevano attorno i 220°.

Dall'insieme di questo esame si potette argomentare, che in tutti i solventi si attua la trasformazione dell'indone non in unico corpo, ma in una mescolanza di corpi di difficilissima separazione, data la loro poco solubilità nei varî solventi e la poca differenza di solubilità tra i costituenti le mescolanze.

Occorreva perciò operare su quantità maggiore e circoscrivere la scelta dei solventi.

Si scelse l'etere, il benzolo e il cloroformio, dai quali, avendo dalle prove di saggio, avuto delle sostanze meglio cristallizzate, pareva più possibile il realizzare anche una separazione meccanica.

Azione della luce sulla soluzione eterea del f. o. n. indone.

Dall'etere si ebbe dal 22 dicembre fino al 16 gennaio 1910 prima un deposito di sostanza finemente cristallina fondente verso 222°, eliminato il quale, se n'ebbe un secondo, costituito da cristallini lamellari fondenti a 215-18° e da cristalli più scuri arancioni fondenti verso 280°.

Il tutto misto a polvere fondente tra 210°-240°.

I cristalli lamellari isolati meccanicamente non sono cristallograficamente determinabili, perchè presentano delle facce laterali pieni di solchi e corrosioni; essi appaiono come tavole a contorni esagonali, alquanto allungate secondo una direzione. Estensione retta rispetto la direzione di allungamento. Pleocroismo insensibile.

Da gr. 0,2074 di essi si ebbero gr. 0,5515 di CO_2 e gr. 0,0773 di H_2O e per cento:

C = 72.52
H = 4.14

percentuali che si avvicinano a quelle richieste dall'indone.

I cristalli gialli-arancione, che accompagnano i lamellari presentano generalmente delle facce a parquet, per cui le misure si rendono assai malagevoli e non tali da poter fondare su di esse un criterio sicuro. Malgrado ciò si è tentato la misura di un cristallo probabilmente monoclino. Pleocroismo dal giallo arancione al quasi incolore.

Analizzati, mescolati ancora a frammenti di cristalli lamellari si ebbe:

Da gr. 0,2211 di sostanza gr. 0,5835 di CO_2 e gr. 0,0847 di H_2O

Da gr. 0,1310 di sostanza $V\frac{18^0}{755}$ cc. 6,1 = $V\frac{0^0}{760}$ 5,5 cc. di N

e per cento

C = 71.97
H = 4.25
N = 5.25

Per quanto si siano tentate le cristallizzazioni frazionate da varî solventi, le mescolanze restano sempre tali, nè questo reca meraviglia, perchè tutti questi prodotti sono pochissimo solubili negli ordinari solventi, come lo dimostra il modo della loro formazione. Abbiamo perciò pensato di ricorrere ad un altro mezzo, alla fusione, avendo constatato un differente comportamento alla stessa dei componenti questa mescolanza.

Infatti i cristalli tabulari f. a 218° si trasformano nell'indone primitivo ed anzi a tal proposito si constatò una certa oscillazione di qualche grado nella temperatura di fusione, perchè a secondo il modo col quale si procede al riscaldamento la fusione, che strettamente parlando è da considerarsi come la trasformazione del corpo avviene più o meno rapidamente.

I cristalli arancioni f. a 280° non pare subiscano alcuna trasformazione.

Attuata sulle mescolanze la fusione tutta la sostanza f. a 218° si è trasformata in f. o. nitroindone facilmente eliminabile. data la sua solubilità in cloroformio. Nelle porzioni meno solubili si sono ritrovati due corpi diversi: l'uno f. a 280°, che può

ricristallizzarsi dal $CH Cl_3$ o dal C_6H_6, l'altra meno solubile in questi due solventi. che fonde attorno 320°.

Quest'ultimo corpo è perfettamente identico a quello che si ha per l'esposizione dell'indone allo stato solido al sole.

Invece il corpo f. a 280°, se ricristallizzato dalla benzina, vi si addiziona, ma tende addizionandovisi ad eliminarla in quantità diversa, come sarà meglio detto appresso.

Infatti da gr. 0,1572 di una porzione si ebbero gr. 0,4266 di CO_2 e gr. 0,0772 di acqua per cento:

C = 74.01
H = 5.45

Per un'altra porzione invece precipata con etere di petrolio dal benzolo si ebbe da gr. 0,2229 di sostanza gr. 0,5887 di CO_2 e gr. 0,0986 di H_2O e per cento:

C = 72.02
H = 4.91

Le tre sostanze isolate sono dunque l'una f. a 218° e l'altra attorno 320°, la terza a 280°. Quest'ultima atta ad addizionare benzolo.

Per $C_{15}H_9NO_3 + C_6H_6$

C = 76.59
H = 4.55

In alcune combustioni si ha un eccesso di idrogeno forse per la necessità di prolungare la corrente di O per la completa combustione del prodotto; o perchè i prodotti non sono stati a sufficienza seccati per tema di variarne la composizione.

Avendo tentata la combinazione con fenilidrazina della parte f. a 218° e di quella f. a 280°, e di quella f. attorno 320°, i punti di fusione rimasero immutati e la sostanza pare non si combini.

Azione della luce sulla soluzione benzolica del F. o. n. indone.

Anche in benzolo si misero a reagire 12 gr. dell'indone sciogliendoli in mezzo litro di benzolo. Dal 22 dicembre al 31 si ebbe deposito di cristalli micacei fondenti al di sopra di 300° e di granuli giallo-arancione f. attorno 220°, che costituiscono in buona parte il deposito ed in seguito si andarono formando altri cristalli micacei e cristalli giallo-arancioni con polvere cristallina. Attraverso stacci a reti diverse si potettero anche da queste mescolanze isolare dei cristalli arancioni f. tra 275°-280°.

Dobbiamo qui osservare che in altra esposizione alla luce si potettero avere dei cristalli fondenti attorno 270°, cristalli che presentavano la caratteristica di mutare il loro splendore vitreo in porcellanico, se lasciati a loro stessi. I cristalli micacei f. verso 320° con decomposizione appaiono come tavolette rettangolari con splendore sericeo, con estensione retta rispetto la direzione di allungamento.

Analizzati hanno dato da gr. 0,1830 gr. 0,4878 di CO_2 e gr. 0,0717 di H_2O e per cento:

C = 72.69
H = 4.35

I cristalli granulari f. a 220° non sono che aggruppamenti di piccolissimi cristalli; nel fondere si trasformano nel primitivo indone.

Da gr. 0,2017, gr. 0,5331 di CO_2 e gr. 0,0755 di H_2O.

Da gr. 0,1375 $\sqrt{\frac{20^\circ}{756.3}}$ cc. 7,2 $= \sqrt{\frac{0^\circ}{760}}$ cc. 6,9 di N.

C = 72.08
H = 4.15
N = 6.27

I cristalli f. a 275° devono avere la proprietà di addizionare la benzina e parzialmente eliminarla col tempo come lo dimostra l'opacità, che assumono i cristalli che sono in principio di splendore vitreo.

Analizzate alcune porzioni di esse si ebbe:

Da gr. 0,2075, gr. 0,5618 di CO_2 e gr. 0,0860 di H_2O.

Da gr. 0,2118, gr. 0,5667 di CO_2 e gr. 0,0918 di H_2O.

Da gr. 0,1438, gr. 0,3849 di CO_2 e gr. 0,0597 di H_2O.

Ricristallizzati questi cristalli dal benzolo e analizzatili, quando conservavano il loro splendore si ebbe:

Da gr. 0,0842, gr. 0,2361 di CO_2 e gr. 0,0426 di H_2O e per cento:

	I	II	III	IV
C	73.83	72.96	72.99	76.47
H	4.60	4.81	4.61	5.62

Per $C_{15}H_9NO_3 . C_6H_6$

C = 76.59
H = 4.55

Così viene confermata l'addizione e l'eliminazione della benzina a questo prodotto, che è simile a quello già ottenuto dall'etere. Pel punto di fusione il 280° deve essere considerato come quello della sostanza priva di benzina, perchè la stessa viene perduta dal corpo prima di fondersi, come si rileva dallo scoppiettio e dall'appannamento dei cristalli per riscaldamento.

Anche per i depositi della benzina come per quelli dell'etere, la fusione trasforma la sostanza f. verso 218° in indone, che viene eliminato con cloroformio, lasciando immodificata la sostanza f. a 280° e quella f. a 300°, che si separano tra loro col trattamento già ricordato per l'etere, cioè colla cristallizzazione frazionata con benzina o con $CHCl_3$.

Per combustione il prodotto f. attorno 320° isolato per fusione, cristallizzato dalla benzina dette

Da gr. 0,1772, gr. 0,4650 di CO_2 e gr. 0,0598 di H_2O per cento:

C = 71.56
H = 3.74

In conclusione dai depositi della soluzione benzolica del f. o. n. indone si sono separate 3 porzioni.

L'una fondente a 218°, l'altra a 280°, e la terza attorno i 320°.

F. O. N. indone in cloroformio.

L'o. n. f. indone si scioglie abbastanza in cloroformio, cosicchè i 200 cc. di solventi sono sufficienti per gr. 12 di prodotto tuttavia si diluì la soluzione; già nei saggi fatti precedentemente si era osservato la separazione di una massa cristallina costituita da cristalli più chiari e più giallognoli f. tra i 210°-220°; la massa fusa non era perfettamente limpida, come si è di solito constatato nelle fusioni delle mescolanze, se portate non oltre i 220°.

In quest'ultimo saggio il deposito raccolto dopo un esposizione alla luce in soluzione di cloroformio, durata dal 22 dicembre fino al 7 gennaio, ha dato per combustione questi risultati:

Da gr. 0,2256 gr. 0,5865 di CO_2 e 0,0852 di H_2O.

Da gr. 0,1721 gr. 0,4529 di CO_2 e gr. 0,0651 di H_2O.

Da gr. 0,1428 $V\frac{20^\circ}{760}$ cc. 7 $= V\frac{0^\circ}{76}$ cc. 6,3 di N.

e per cento:

C = 70.9		71.76
H = 4.15		4.20
	N = 5.52	

La cristallizzazione frazionata non permette la separazione dei prodotti costituenti questa mescolanza, ma ricorrendo alla fusione verso i 230° una parte della massa si trasforma in indone eliminabile al solito con un trattamento a freddo con $CHCl_3$. La parte meno solubile in $CHCl_3$ per cristallizzazione frazionata dalla benzina dette nelle porzioni più solubili il corpo f. a 280° nelle meno solubili il corpo fondente attorno 320°.

Non si potettero avere cristalli misurabili.

Le tre porzioni isolate corrispondono per le loro proprietà pei punti di fusione alle porzioni isolate dalle soluzioni eteree e benziniche. I risultati analitici per la mescolanza ne confermano la composizione.

O. N. F. indone in CCl_4.

Anche dal CCl_4 per esposizione alla luce si hanno mescolanze di cristalli allungati giallo-chiaro con splendore vitreo f. a 280°, cristalli che una determinazione cristallografica fa supporre siano monoclini, e granuli cristallini non determinabili opachi f. a 225°. La mescolanza analizzata dette percentuali basse in carbone.

Da gr. 0,1810 di granuli f. verso 225° gr. 0,4496 di CO_2 e gr. 0,0638 di H_2O.

Da gr. 0,1826 della medes. porz. gr. 0,4505 di CO_2 e gr. 0,0656 di H_2O.

Da gr. 0,1756 di cristalli f. a 280° gr. 0,4129 di CO_2 e gr. 0,0590 di H_2O.

	I	II	III
C	67.74	67.28	64.12
H	3.91	3.99	3.73

Un saggio qualitativo mostra che tutte le porzioni contengono cloro, ma trattandosi di mescolanze o di porzioni non bene isolate non si può per ora dire del contenuto in CCl_4, che probabilmente si collega con qualcuna delle sostanze costituenti i depositi e forse coi cristalli f. a 280° così come già si è osservato per la benzina.

Anche dalle soluzioni alcooliche del o. n. f. indone si ha come già si è detto per azione della luce la metamorfosi della sostanza con formazione di mescolanze di corpi f. attorno 220°, ma di questi, come dei depositi ottenuti con CCl_4 e acetone, sarà il caso di parlarne quando le esperienze saranno compiute.

Azione della luce sul F. p. n. indone.

Questo corpo, come è stato già detto altrove, si prepara con maggiore facilità dall'isomero f. p. n. cinnamico f. a più bassa temperatura (142°) e con minor facilità dall'altro isomero fondente a 214°.

Fonde a 217° e si presenta in tavolette romboidali, di un bel colore scarlatto. Esso non pare subisca modificazioni di sorta, se esposto alla luce allo stato solido. Se invece se ne fa la soluzione in benzina, in cloroformio, in acetone, o in altri solventi, per azione della luce si ha il graduale passaggio della sostanza rossa in sostanza bianca, poco solubile nei solventi, così, come si è constatato per l'isomero orto.

La nuova sostanza o per dir meglio la mescolanza delle nuove sostanze, che costituiscono i depositi della esposizione alla luce in solventi del f. p. n. indone, fondono attorno 227-30°, rimanendo la sostanza fusa sempre un po' torbida.

Dalla soluzione benzinica si ebbero dei piccoli prismi vitrei misti a cristalli setosi f. a 227-29°. I cristalli vetrosi fondono verso 280°. Si ebbero mescolanze che hanno una percentuale piuttosto alta in carbone, corrispondente pel C a 74 e per l'H a 4, questa percentuale alta è dovuta al fatto, che anche qui per deposito della benzina si hanno corpi addizionati ad essa; infatti la combustione dei cristalli vetrosi, purificati ricristallizzandoli dalla benzina e fondenti sopra 300° ha dato:

Per gr. 0,0958 di sost. 0,2674 di CO_2 e gr. 0,0485 di H_2O pari a

$$C = 76.12$$
$$H = 5.6$$

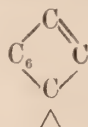
Invece gli aghi setosi f. a 229° hanno dato per gr. 0,1194 di sost. gr. 0,3118 di CO_2 e gr. 0.0479 di H_2O per cento:

$$C = 71.2$$
$$H = 4.4$$

Dal saggio nell'acetone ed in $CHCl_3$ si ebbero anche depositi fondenti attorno 229° costituiti da mescolanza di corpi che assai probabilmente sono i medesimi trovati già nei depositi benzinici.

Peraltro questi studî sono ancora in corso.

Data la costituzione del fenilortonitroindone e paranitroindone ci troviamo in

presenza di un corpo, che è caratterizzato da una costituzione ciclica

dalla presensa di un gruppo CO, dall'esservi un doppio legame etilenico ed infine dall'avere nel nucleo benzinico sostituito un gruppo NO_2

Chi sa quanto e variamente agisca in virtù di queste varie funzioni la luce sui corpi [1]), comprenderà quanto difficile riesca la determinazione della costituzione dei prodotti finali, sopratutto quando essi sono molteplici, come nel caso in esame.

Infatti, come composto ciclico con e senza doppio legame, può subire per idrolisi un'apertura di anello con formazione di acidi e di aldeidi come per il mentone [2]) pel cicloessanone [3]) per il diidrocarvone [4]) per la canfora ed il fencone [5]) idrolisi che potrebbe essere determinata tra le molecole dello stesso corpo, con formazione di prodotti complessi, e per azione di alcuni solventi come l'alcool, o dalla presenza di piccole quantita di acqua nei solventi.

Nel caso del Carvone si ha per azione della luce la formazione di un isomero, così come si ha un polimero nel caso, già ricordato, della cumarina, esempi entrambi di reazioni determinantisi nella molecola o tra le molecole del corpo reagente.

La reazione del gruppo CO è una di quelle forse meglio studiate in rapporto ai corpi reagenti alla luce.

I chetoni aromatici e le aldeidi fatte reagire tra loro e con acidi, eteri, alcooli, idrocarburi [6]) mostrano le proprietà di ridursi trasformando il gruppo CO in gruppo HO — C — , acquistando così una capacità additiva che si esplica tra le molecole del chinone o dell'aldeide ridotti come avviene per il benzofenone e per l'aldeide benzoica rispettivamente mutantisi in benzopinacone ed idrobenzoino o tra essi ed i residui dei corpi disidrogenati, esempi per gli acidi con il gruppo $-\overset{|}{C}H_2$ dal benzofenone col fenilacetico il trifenilattico e coll'acetato di benzile il derivato acetilico del trifenilglicol [7]).

In alcuni casi il gruppo CO mutandosi in $\overset{|}{C} - O -$ dà luogo a composti nei quali il tramite intramolecolare di unione è rappresentato dall'ossigeno, come sembra provato con gl'idrocarburi non saturi del tipo dell'amilene [8]) ed è ammesso con altri corpi, non escluso gli eteri [7]).

Non meno complessa è la reazione con gli idrocarburi saturi e con gli omologhi della benzina [9]) che disidrogenandosi dan luogo alla riduzione del chinone

[1]) Paternò, Gaz. Chim. ital., 1909, a, 237.
[2]) Ciamician e Silber, Ber. XL, 2415.
[3]) Ciamician e Silber, Ber. XLI, 1071.
[4]) Ciamician e Silber, Ber. XLI, 1928.
[5]) Ciamician e Silber, Ber. XLIII, 1340.
[6]) Ciamician e Silber, Gaz. Chim. ital., 1902, a, p. 218 e 1904, b, p. 129.
[7]) Paternò-Chieffi-Forti-Forli, Gazz. Chim. ital., b, 1910, p. 321-332.
[8]) Paternò e Chieffi-Traetta-Mosca, Gaz. Chim. ital., 1909, a, p. 341 e 449.
[9]) Paternò e Chieffi, Gaz. Chim. ital., 1909, b, p. 415.

ed i residui o danno olefine, o si polimerizzano o si addizionano al chetone per dar luogo ad un alcool terziario, come risulta anche dalle esperienze del Ciamician e Silber [1]).

Il gruppo NO_2 tende a trasformarsi in gruppo nitroso, ciò che fu dimostrato per la nitrobenzaldeide anche a secco e in soluzione benzinica dando acido nitroso benzoico [2]). Quando non subisce una riduzione maggiore come nel caso dei nitrobenzoli e omologhi che si trasformano in soluzione alcoolica in anilina o basi analoghe.

Dalla esposizione delle nostre esperienze compiute colla luce sul fenilortonitroindone sciolto in varii solventi è risultato che senza dubbio sia in soluzione eterea, sia in soluzione benzinica, sia in soluzione cloroformica si separano tre corpi, tutti bianchi allo stato puro, tutti con temperatura superiore a quella di fusione dell'indone dal quale derivano (218°-280°-320°), tutti poco solubili negli ordinari solventi, perciò difficili a cristallizzarsi per quanto abbiano notevole tendenza a prendere belle forme cristalline.

Per quel che riguarda la loro azione sulla fenilidrazina, pare che essi non vi si combinano e tanto meno si è potuto avere la sostituzione con due atomi di cloro all'ossigeno.

Mentre è noto che il truxone ottenuto dall'acido α truxillico e dall'acido allocinnamico si comporta con tutte le proprietà di un chetone, dando il cloruro del truxone ed il fenilidrazone e l'anilide del truxone [3]).

Questo fatto potrebbe in certo modo fare ammettere che l'ossigeno chetonico abbia assunto altra funzione nella modificazione alla luce del fenilnitroindone.

Uno dei prodotti che si ottiene dalla esposizione alla luce in solventi, si ottiene anche esponendo alla luce il fenilortonitroindone a secco, in tal caso si forma un solo prodotto.

Tutte queste sostanze hanno mostrato di avere la stessa composizione centesimale con risultati sufficientemente esatti, per quanto lo ha permesso la purezza dei prodotti, che hanno dovuto essere spesso esaminati, così come si depositavano per essere sicuri di non indurre modificazioni con l'uso dei solventi e con il riscaldamento.

Uno solo dei tre corpi ha mostrato di addizionarsi alla benzina e forse non è improbabile abbia ad addizionarsi ad altri solventi. Dei tre corpi i due fondenti a più elevata temperatura hanno mostrato di essere più stabili, l'altro quello fondente a 218° ha mostrato di trasformarsi nell'indone primitivo per fusione. In virtù di tale proprietà si è potuto attuare la separazione dei tre corpi.

Se siano dei polimeri non è possibile affermarlo con sicurezza non conoscendosi il peso molecolare difficile a determinarsi, data l'insolubilità nei solventi.

Ma è bene ricordare che dal fenilindone preparato da uno di noi dall'acido fenilcinnamico isomero, si è avuto per azione della luce una trasformazione analoga a quella del fenilortonitroindone, isolandosi un corpo fondente al disopra di 300°,

[1]) Ber. XLIII, 1536.
[2]) Ciamician e Silber, Gaz. Chim. ital., 1903, a, p. 354.
[3]) Ber. XXII, p. 784.

che dette risultati col metodo Raoult, corrispondenti al peso molecolare di un dimero.

Non è improbabile che qualcuno dei prodotti nuovi sia un bimero, e che tale forse sia il prodotto di trasformazione f. attorno 320° del fenilortonitroindone esposto alla luce allo stato solido e che analogamente al truxone dell'acido cinnamico ed al polimero della cumarina, possa considerarsi come derivato del tetrametilene.

Ma sia il fatto che la formula del truxone è ancora sub iudice, sia la mancanza dei caratteri dell'ossigeno carbonilico, fanno accettare con riserva tale ipotesi.

L'analogia con il fenilindone escluderebbe l'intervento del gruppo NO_2, tanto più che la trasformazione del gruppo nitrico nel nitroso avrebbe dovuto generare per ossidazione del CO sostanza con proprietà acide, ciò che non è confermato dalle reazioni dei corpi isolati, d'altra parte una trasformazione di tal genere è poco probabile data la natura dei solventi e la natura dei gruppi costituenti l'indone.

Resta allora da ammettersi una polimeria con l'intervento dell'ossigeno carbonilico e forse con la contemporanea scissione del doppio legame, in tal caso si avrebbero dei composti, nei quali le due valenze messe in libertà dal carbonile, saturerebbero le valenze non sature del gruppo etilenico di un altra molecola d'indone, comportamento che ricorderebbe quello del benzofenone con l'amilene (l. c.).

Una riduzione nel seno stesso della molecola è difficile ad ammettersi, perchè i gruppi in essa contenuti mal si prestano a tale funzione.

In ogni modo visto che si hanno composti diversi occorreva prima di tutto trovare il modo di isolarli e purificarli, ciò che è stato non lieve compito.

Isolatili la constatazione delle singole reazione specifiche, ci permetterà venire rapidamente a delle conclusioni sulla costituzione di questi corpi così interessanti, che potranno permettere di risolvere il problema della costituzione dei composti fin'ora conosciuti di questo tipo.

L'indone dal quale si parte è intensamente colorato, mentre lo sono ben poco gli acidi dai quali questi indoni derivano, e non lo sono affatto i prodotti dopo l'esposizione alla luce.

Nel primo caso la chiusura dell'anello tra il gruppo CO ed il gruppo fenico determina la colorazione, nel secondo la scissione del medesimo anello o la saturazione delle doppie valenze o la metamorfosi dell'ossigeno del gruppo CO possono spiegare il cambiamento del colore.

Nulla giova in questa difficile quistione come gli studii comparativi. Ci proponiamo perciò di esaminare contemporaneamente tutti quegli indoni, che ci riuscirà preparare, di sottoporre essi nonchè le anidridi degli acidi di questa serie all'azione della luce, completando le esperienze colla luce di una lampada a mercurio, che potrebbe dare dei risultati speciali sugli acidi di questa serie, se le supposizioni dello Stoermer sono giuste.

Napoli, Dicembre, Istituto chimico della R. Università.

finita di stampare il dì 25 Febbrajo 1911

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

LE CONFIGURAZIONI

RICERCHE GEOMETRICHE

di GENEROSO GALLUCCI

Memoria premiata nel concorso dell' anno 1910.

Geometrica geometrice.

Dirò brevemente del contenuto di questa monografia. La prima parte contiene soltanto la bibliografia, che credo senza gravi lacune. Nelle altre due parti trovasi il contributo personale.

Chiamo figura ψ un gruppo di 9 rette che si possano disporre come elementi di un determinante del terz' ordine in modo che le rette delle tre orizzontali come anche delle verticali rappresentino tre triangoli a 2 a 2 tri-omologici. Trovo questa figura nell' esagramma di Pascal e nella configurazione armonica ed ottengo un gruppo di proprietà, che, a differenza di quelle già note, sono puramente planimetriche. Per mezzo delle figure ψ si può studiare la distribuzione dei *punti binari* (ove concorrono due sole rette) delle dette configurazioni.

Alla fine della 2ª parte sono studiate due nuove configurazioni, le cui proprietà si riconnettono alla figura delle 8 rette ed alle figure ψ.

Nella terza parte mi occupo della genesi delle configurazioni n_3 mediante figure più semplici (le figure α); le operazioni geometriche ω_1, ω_2 mi permettono di dedurre dalle figure α altre figure α il *cui gruppo* non è che una facile estensione del gruppo delle prime. Composta una configurazione mediante figure α se ne deduce il gruppo in modo molto facile dai gruppi delle stesse figure α.

Segue la generalizzazione delle figure α nel piano e nello spazio; si stabiliscono quattro identità fondamentali che permettono di classificare le Cfr. n_3 in un numero limitatissimo di tipi, che vengono dedotti da una figura *nucleare*.

Dai risultati già ottenuti si può prevedere che l'applicazione allo spazio ed agl' iperspazii non sarà senza frutto, tanto più che il metodo del **Martinetti** (deduzione delle n_3 dalle $(n-1)_3$) non è stato ancora esteso allo spazio.

In quanto alla teoria dei gruppi siamo ben lontani dalla possibilità di una teoria generale delle configurazioni in connessione coi gruppi di sostituzioni. In questo campo ho fatto quanto ho potuto. Ed a tale proposito ardisco richiamare l'attenzione del lettore su questi due punti:

1.° La nuova deduzione del gruppo della configurazione armonica (parte 2ª).

2.° La risoluzione del problema di determinare per un dato valore di n delle configurazioni il cui gruppo sia di ordine dato, della forma 2^k ($k=1, 2, 3, 4, 5$ e 6) oppure $3\ 2^k$ ($k=0, 1, \ldots, 7$) (parte 3ª).

PARTE PRIMA

CENNO SINTETICO SULLO STATO PRESENTE DELLE RICERCHE SU LE CONFIGURAZIONI GEOMETRICHE.

---

§ 1.

Definizioni, primi esempii.

1. Configurazione piana (m_q, n_p) è un insieme di m punti e di n rette tali che per ognuno dei punti passino p rette e su ognuna delle rette si trovino q punti.

Si ha evidentemente $mq = np$; se $m = n$ è pure $p = q$ ed allora la configurazione si indica col simbolo: Cfr. m_p.

Es. 1° la Cfr. 9_3 individuata da un esagono semplice inscritto in due rette.

v. 1. Pappo, *Collezioni matematiche* (libro 7°, prop. 139ª).

Es. 2° L'n^{gono} completo è una Cfr. $\left(n_{n-1}, \binom{n}{2}_2\right)$; l'$n^{latero}$ completo è una Cfr. $\left(\binom{n}{2}_2, n_{n-1}\right)$.

Es. 3° Una notevole Cfr. (m_q, n_p) con p e q diversi da 2 è la Cfr. $(16_3\ 12_4)$ che si può intendere costituita da tre quadrilateri a due a due prospettivi [1]) in 4 modi con gli assi di prospettività nei lati del terzo (duale della Cfr. $(12_4\ 16_3)$ armonica):

v. 2. J. Steiner, *Geometrische Sätze* (Giornale di Crelle, Vol. 1°, p. 44 nota).

Es. 4° Un mezzo per ricavare da figure spaziali infinite Cfr. (m_q, n_p) fu trovato da A. Cayley, il quale si occupò specialmente delle figure determinate secando un n^{gono} gobbo e un n^{edro} con un piano.

v. 3. A. Cayley, *Sur quelques théorèmes de la géométrie de position* (Giornale di Crelle, Vol. 31°, p. 213-226, 1846; Vol. 34, p. 270-275; Vol. 38, p. 97-106, 1847 e Vol. 41, p. 67-72, 1850.

2. Nello spazio, col simbolo Cfr. m_p si rappresenta un insieme di m punti e di m piani tali che per ogni punto passino m piani e su ogni piano giacciano m punti. Più generalmente Cfr. (m_q, n_p) rappresenta un insieme di m punti, m piani ed n rette disposte in modo che ad ogni piano appartengano q punti e p rette, per ogni punto passino q piani e p rette ed ogni retta appartenga a p piani ed a p punti.

Es. 1° La Cfr. 8_4 di punti e piani costituita da due tetraedri reciprocamente inscritti e circoscritti (tetraedri di Möbius):

v. 4. Möbius, *Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in bezug auf die andere um-und-ein geschrieben zugleich sein?* Giornale di Crelle, Vol. 3.°

---

[1]) Due quadrilateri si diranno prospettivi quando sono riferiti in modo che le coppie di lati corrispondenti s'incontrino in 4 punti in linea retta (*Collineare Lage* secondo Schröter).

Es. 2° La Cfr. (12_6, 16_3) di punti, piani e rette, formata da tre tetraedri a due a due tetra-omologici con i centri ed i piani di omologia nei vertici e nelle facce del terzo (tetraedri desmici):

v. 5. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, p. 409, 1822.

v. 6. Staudt, *Geometrie der Lage*, ultima parte del n. 102, 1847.

In Poncelet la configurazione apparisce come costituita dai 12 centri di similitudine di 4 sfere, dai 12 piani di similitudine e dai 16 assi. Invece nell'Opera di Staudt la figura è costruita tagliando un tetraedro con un piano e costruendo su ogni spigolo il coniugato armonico del punto d'incontro con i due vertici; genesi comune della configurazione desmica, la quale, perciò, va attribuita a Staudt.

Es. 3° La Cfr. (15_6, 20_3) individuata da due tetraedri omologici:

Cfr. v. 6, n. 92.

§ 2.

L'esagrammo di Pascal.

3. La prima occasione per lo studio delle configurazioni fu fornita dai « *Geometrische Lehrsätze und Aufgaben* » che Jacob Steiner pubblicò successivamente sugli « Annales de Math. » di Gergonne e nel « Journal für Math. » di Crelle e che poi riprodusse nella sua opera fondamentale: *Systematische Entwikelung*... Questi teoremi, dati senza dimostrazione e che il Poncelet designava sprezzantemente con la frase: « *géometrie combinatoirie de* M. Steiner », attirarono ciò non pertanto l'attenzione di matematici del più alto valore: Jacobi, Plücker, Hesse, Staudt, i quali non disdegnarono di occuparsene, e si ebbe una lunga serie di articoli sul Giornale di Crelle dedicati alla dimostrazione delle più importanti fra le proposizioni steineriane.

La più notevole fra le figure, il cui studio fu proposto da Steiner ai geometri del suo tempo, è senza dubbio quella costruita dalle 60 rette di Pascal corrispondenti ai 60 esagoni semplici, che si possono formare con 6 punti di una conica non degenere. Queste 60 rette s'incontrano a 3 a 3 in venti punti i quali a 4 a 4 stanno su 15 rette:

v. 7. Steiner, *Théorèmes à démontrer et problèmes à résoudre.* Annales de Math. de Gergonne, Vol. 18°, p. 339 (1828).

v. 8. Plücker, *Ueber ein neues Princip der Geometrie und den Gebrauch allgemeiner Symbole und unbestimmter Coefficienten.* Giornale di Crelle, Vol. 5°, p. 268-286 (1829).

v. 9. Steiner, *Systematische Entwikelung der Abhaengigkeit geometrischer Gestalten.* Edizione del 1832, Aufgaben und Lehrsätze, n. 54.

Veramente lo Steiner, nella v. 7 afferma erroneamente che i 20 punti stanno a 4 a 4 su 5 (non 15) rette. L'errore fu corretto da Plücker (v. 8) e la correzione fu accolta da Steiner (v. 9).

Nuove dimostrazioni e nuovi sviluppi furono dati da Jacobi e dallo stesso Plücker.

v. 10. Jacobi, *Auflosung und Beweise einer Reihe von Aufgaben und Lehrsätzen der ebenen Geometrie.* Giornale di Crelle, Vol 31°, p. 40-84 e 93-110, specialmente p. 72-73 (1846).

v. 11. Plücker, *Analytisch-geometrische Aphorismen.* Giornale di Crelle, Vol. 10°, p. 217-227, 293-299 (1832); Vol. 11°, p. 26-32, 117-129, 356-360.

La dimostrazione dei teoremi di Steiner condusse Plücker alla scoverta del metodo analitico della *notazione abbreviata* così fecondo nella trattazione analitica della geometria di posizione (v. 8 e v. 11).

v. 12. Plücker, *Note sur le théorème de Pascal.* Giornale di Crelle, Vol. 34, p. 337-340 (1846).

4. Otto Hesse si occupò anch'egli dell'esagrammo di Pascal e pervenne a dimostrare che i 20 punti di Steiner sono a 2 a 2 coniugati rispetto alla conica fondamentale:

v. 13. Hesse, *Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloid.* Giornale di Crelle, Vol. 24°, p. 40-43 (1842).

In questa memoria la dimostrazione è dedotta da considerazioni su figure spaziali, notevolissimo metodo che doveva poi esser seguito da Cayley, Cremona, Caporali ecc.

Hesse dimostrò inoltre che la figura dei 20 punti di Steiner e delle 15 rette di Plücker è identica a quella formata da tre triangoli a due a due prospettivi, con un medesimo centro:

v. 14. Hesse, *Eine Bemerkung zum Pascal'schen Theorem.* Giornale di Crelle, Vol. 41°, p. 269-271 (1850).

Il teorema di Hesse del v. 13 ed ulteriori sviluppi formano l'argomento di altre due notevoli memorie:

v. 15 Grassman, *Ueber eine neue Eigenschaft der Steiner'schen Gegenpunkte des Pascal'schen Sechseck.* Giornale di Crelle, Vol. 58°, p. 174-178 (1860).

v. 16. Staudt, *Ueber die Steiner'schen Gegenpunkte.* Giornale di Crelle, Vol. 62°, p. 142-150 (1863).

5. Nel 1849 Kirkman dimostrò che le 60 rette di Pascal concorrono a 3 a 3, oltre che nei 20 punti di Steiner, ancora in altri 60 punti.

v. 17. Kirkman, *Manchester Courrier*, 27 giugno 1849.

Il Cayley (v. 3; Crelle 41) fece conoscere ai geometri tedeschi il teorema di Kirkman ed aggiunse altri risultati, contemporaneamente al Salmon trovò che i 60 punti di Kirkman sono a 3 a 3 su 20 rette.

v. 18. Cayley, *Note sur quelques théorèmes de la géomètrie de position.* Giornale di Crelle, Vol. 41°, p. 84 (1850).

v. 19. Salmon, *Geometria analitica del piano* tradotta da Fiedler, 3ª ediz., n. 284 (1873).

Salmon dimostrò di più che le 20 rette passano a 3 a 3 per 15 punti (v. 18 e 19).

Quasi tutta la memoria v. 3 di Cayley è dedicata allo studio dell'esagrammo; notevolissima è l'osservazione del § 3° in cui nota che i 20 punti di Steiner formano una figura che può considerarsi come proiezione dei 20 vertici di un esaedro completo. Questo esaedro fu scoverto poi dal Cremona.

6. Gli studii sull'esagrammo furono ripresi da Hesse il quale trovò una certa corrispondenza fra le 60 rette di Pascal ed i 60 punti di Kirkman. Se dei 15 lati dell'esagono completo inscritto nella conica si tralasciano quelli di un esagono semplice, restano ancora 9 lati che determinano altri 3 esagoni le cui Pascal s'incontrano in un punto di Kirkman, che si fa corrispondere alla retta di Pascal del 1° esagono semplice. La corrispondenza è tale che i 3 punti di Kirkman cor-

rispondenti alle tre rette di **Pascal** concorrenti in un punto di **Kirkman** K_1 stanno sulla retta di **Pascal**, che corrisponde a K_1; a tre rette di **Pascal** che s'incontrano in un punto di **Steiner** corrispondono **3** punti di **Kirkman** situati su una retta di **Cayley** ecc. Anche **Bauer** e **Schröter** si occuparono di questa corrispondenza:

v. 20. Hess, *Ueber die Reciprocität der Pascal-Steinerschen und Kirkman-Salmon-Cayley'schen Sätze von dem Hexagrammum mysticum.* Giornale di Crelle, Vol. 68°, p. 193-207 (1868).

v. 21. Hess, *Eine analytische Erweiterung des Pascal'schen Theorems.* Giornale di Crelle, Vol. 75°, p. 1-12 (1872).

v. 22. Bauer, *Ueber das Pascal'sche Theorem.* Abhandl. der k. bayer. Ak. München, p. 109 (1874).

v. 23. Schröter, *Steiner'sche Vorlesungen,* edit. del 1876, p. 217-218.

7. Nè **Hesse**, nè **Bauer** e **Schröter** avevano potuto determinare l'intima natura della corrispondenza fra le rette di **Pascal** ed i punti di **Kirkman**. Fu il **Veronese** che risolvette la quistione dimostrando che con le **60 Pascal** e con i **60** punti di **Kirkman** si possono formare sei figure costituite ciascuna da **10** rette e **10** punti tali che per ogni punto passano tre rette e su ogni retta giacciono **3** punti (figure π):

v. 24. G. Veronese, *Nuovi teoremi sull'hexagramma mysticum.* Atti dell'Acc. dei Lincei, serie 3ª, vol. 1°, aprile 1877.

In questa memoria, mediante semplici considerazioni sui triangoli omologici, sono ritrovate le proprietà già note e moltissime altre nuove. Ad essa seguì immediatamente un'altra importantissima memoria del **Cremona**, nella quale è dimostrato che tutte le proprietà già note e quelle aggiunte dal **Veronese**, si deducono dalle proprietà del sistema di quindici rette nello spazio situate a **3** a **3** in **15** piani:

v. 25. Cremona, *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal.* Atti dell'Acc. dei Lincei, 1877.

In intima connessione con i lavori del **Veronese** e del **Cremona** sono i seguenti:

v. 26. C. Ladd, *The Pascal hexagram.* American Journal, Vol 2°, p. 1-13 (1879).

v. 27. E. Caporali, *Sull'esaedro completo.* Rend. Acc. Napoli, 1881 e Memorie di Geometria, p. 135-151 (1888).

v. 28. E. Caporali, *Studio sull'esagramma di Pascal.* Memorie di Geometria, p. 236-251.

v. 29. E. Caporali, *Frammenti sull'esagrammo di Pascal.* Memorie di Geometria, p. 252-258.

v. 30. H. W. Richmond, *A symmetrical system of equations of the lines on a cubic surface which has a conical point.* Quarterly Journal, Vol. 23°, p. 170-179 (1886).

v. 31. H. W. Richmond, *On Pascal's Hexagram.* Trans. of the Cambridge Philos. Soc., Vol. 15°, p. 267-302 (1894).

v. 32. L. Klug, *Die Configuration des Pascal'schen Sechseck.* Kolozsvar, edit. Albert K. Ajtai, 1898. Volume di 132 pagine con due tavole. Cfr. anche Monatshefte f. Math. Vol. 10° (1899).

Di tutti questi lavori i più notevoli sono quelli del **Caporali**, che, non solo portò un considerevole contributo allo studio della figura, (v. **27**) ma arrivò a trovare la notazione più semplice e più adatta. Un lato dell'esagono completo è incontrato da altri **6** lati in **6** punti diversi dai vertici (punti **D**); nella figura vi sono **45** punti **D** che si distribuiscono come vertici di triangoli $\triangle$ i cui lati sono lati dell'esagono e

contengono tutti e sei i punti fondamentali. Due triangoli △ formano una coppia quando non hanno lati comuni, tre triangoli formano una terna quando a 2 a 2 non hanno alcun lato comune. Presa una coppia, coi 9 lati dell'esagono si può in una sola maniera formare una terna; l'insieme dei 5 triangoli costituisce una *figura* di triangoli △, di queste, nell'esagrammo ve ne sono 6 che vengono indicati con i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6. Allora ogni △ può essere indicato per mezzo dei numeri delle due *figure* a cui appartiene, ecc. Adottata questa notazione, tutte le proprietà dell'esagrammo risultano dalla forma dei simboli dei suoi elementi.

8. I lavori che seguono contengono dettagli di non molto interesse:

v. 33. F. Graefe, *Einige Notizen ueber das Pascal'sche Sechseck.* Zeitsch. Schlömilch, Vol. 25°, p. 215-216 (1880). V. pure Crelle, Vol. 93°, p. 184-108 (1882).

v. 34. F. Graefe, *Erweiterungen des Pascal'schen Sechsecks und damit verwandter Figuren.* Wiesbaden ed. Limbarth (1880).

v. 35. L. Wedekind, *Lagenbeziehungen bei ebenen perspectivische Dreiecken.* Math. Annalen, Vol. 16°, p. 209-244 (1880).

v. 36. O. Dziobeck, *Neue Beiträge zur Theorie der Paschal'schen Sechseck.* Berlin ed. F. Dümmler, 1882.

v. 37. G. Lazzeri, *Nuovi teoremi sull'esagrammo di Pascal.* Atti dell'Ist. Veneto, 6ª serie, Vol. 3°, p. 481-500 (1885). (Proprietà riguardanti i punti doppi delle involuzioni determinate dai punti D).

v. 38. F. Palatini, *Sopra i triangoli formati con i lati dell'esagrammo.* Palmi, Tip. G. Lopresti, 1891, pagine 10. (Il massimo numero di triangoli △ che si possono ridurre ad un punto è sei).

v. 39. R. Moskwa, *Paschal'sches Sechseck und Brianchon'sches Sechsseit.* Pr. Drohobicz, 1ª parte, 1892; 2ª parte, 1893.

v. 40. V. Snyder, *On the Steiner points of Paschal's hexagon.* Boll. American Math. Soc., 2ª serie, Vol. 4°, p. 441-442 (1898). Cfr. v. 15 e 16.

9. Ben maggiore interesse hanno gli studii sugli esagoni iperspaziali che sono la generalizzazione naturale del metodo di Cremona e che pongono in nuova luce le proprietà dell'esagrammo, sia dal punto di vista analitico, sia dal punto di vista geometrico e della teoria dei gruppi:

v. 41. G. Veronese, *Interprétation géométrique de la théorie des substitutions de n lettres, particulièrement pour n = 3, 4, 5, 6, en relation avec les groupes de l'Hexagramme mystique.* Annali di Matem., 2ª serie, Vol. 11°, p. 93-236 (1862).

v. 42. H. W. Richmond, *The figure formed from six points in space of four dimensions.* Mat. Ann., Vol. 53°, p. 161-176 (1900). Cfr. pure Quarterly J., 1899, p. 125-160.

v. 43. A. Zoukis, *Sur l'hexacoryphe complet.* Journal de Math. Liouville, 5ª serie, Vol. 8°, p. 135-168 (1902).

v. 44. E. Ciani, *Una interpretazione geometrica del gruppo totale di sostituzioni sopra sei elementi.* Annali di Matem., serie 3ª, Vol. 16° (1908).

10. E finalmente, per completare la bibliografia dobbiamo far cenno di altri tre importanti lavori:

v. 45. V. Martinetti, *Sopra un gruppo di configurazioni regolari contenuto nell'esagrammo di Pascal.* Acc. Gioenia di Catania, 4ª serie, Vol. 5°, p. 20 (1891). Si tratta delle Cfr. $(12_4 16_3)$B di De Vries contenute nell'esagrammo (Cfr. il § seguente).

v. 46. E. Study, *Ueber das Pascal'sche Sechseck.* Leipz. Ber. 47, p. 532-552 (1895). Connessione fra la teoria dell'esagrammo e le sostituzioni ternarie ortogonali.

v. 47. F. Lindman, *Ueber das Paschal'sche Sechseck.* Munch. Ber. 1902, p. 153-161. Gruppi di triangoli formati da rette Pascal e prospettivi a triangoli △.

11. Le proprietà dell'esagrammo si possono distinguere in due gruppi: 1° pro-

prietà che discendono dalle figure spaziali connesse con l'esagrammo (proprietà Veronese-Cremona v. 42), 2° proprietà puramente planimetriche. Mentre le proprietà del 1° gruppo sono state ampiamente studiate, quelle del 2° gruppo sono rimaste quasi completamente nell'ombra (eccetto nella v. 47). Ora, vi è un filo conduttore anche per le proprietà del 2° gruppo ed è dato dalle *figure* ψ di cui si occupa il § 1° della 2ª parte di questa monografia.

§ 3.

La configurazione armonica.

12. I primi accenni alle configurazioni armoniche si trovano in v. 2, 4, 5 e 6. Hermes in un suo studio su l'esaedro trattò in modo esplicito del sistema desmico di tetraedri:

v. 48. *Ausdehnung eines Satzes vom ebenen Vierseit auf raumliche Figuren.* Giornale di Crelle, Vol. 56°, p. 210-216 (1859).

v. 49. *Ueber homologe Tetraeder.* Giornale di Crelle, Vol. 56°, p. 218-246.

v. 50. *Das allgemeine Sechsflach.* Giornale di Crelle, Vol. 100°, p. 258-285 (1886).

Lo stesso sistema si può anche ricavare dalla figura delle 15 rette di Cremona (v. 25). La trattazione dettagliata della figura fu fatta contemporaneamente da Stephanos e da Veronese:

v. 51. Stephanos, *Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres.* Bull. Darboux, 1879.

v. 52. Veronese, *Sopra alcune notevoli configurazioni...* Atti dei Lincei, transunti 1880 e memorie 1881.

13. Nel 1882 Reye richiamò l'attenzione dei geometri sul problema delle configurazioni e diede il primo l'esempio trattando con grande profondità della configurazione desmica e del suo gruppo:

v. 53. Reye, *Das Problem der Configurationen.* Acta Mathem., Vol. 1°, pag. 93-96 (1882).

v. 54. Reye, *Die Hexaeder und Octaeder Configuration.* Acta Mathem., Vol. 1°, p. 97-108 (1882).

Ancora del gruppo della configurazione trattò il Victor:

v. 55. Victor, *Die harmonische Configuration.* Freiburg, Ber. Vol. 8°, 1882.

Ma fu il Feder che partendo dalle ricerche del Reye arrivò a determinare l'intima costituzione di quel gruppo:

v. 56. J. Feder, *Die Configuration* $(12_6 16_3)$ *und die zugehörige Gruppe.* Math. Annalen, Vol. 47°, p. 375-407 (1896).

Lo studio più esauriente, dopo quello del Veronese, è stato fatto da Hedmund Hess in due ponderose memorie nelle quali tratta anche delle configurazioni connesse con la configurazione armonica (configurazione di Klein, di Kummer ecc.).

v. 57. E. Hess, *Beiträge zur Theorie der räumlichen Configurationen: Ueber die Klein'sche Cfr.* $(60_{15} 30_6)$ *und einige bemerkenswerte aus dieser ableitbare räumliche Configurationen.* Nova Acta Leop. Carol. Akad., Vol. 55°, p. 97-167 (1890).

v. 58. E. Hess, *Weitere Beiträge zur Theorie der räumlichen Configurationen.* Nova Acta Leop. Carol. Akad., Vol. 75°, p. 1-482 (1899).

Anche molto importante è un lavoro di Schröter nel quale applica la teoria dei tetraedri desmici alla curva del 4° ordine e di 1ª specie:

v. 59. Schröter, *Ueber eine Raumcurve vierter Ordnung erstes Species.* Giornale di Crelle, Vol. 93°, p. 132-176 (1882).

14. Ulteriori studii, ma che non contengono nulla di veramente essenziale sono:

v. 60. Vályi, *Zur Lehre der prospectiven Tetraeder.* Arch. Grunert, 2ª serie, Vol. 3°, 1884.

v. 61. Klug, *Mehrfach perspective Tetraeder.* Arch. Grunert, 2ª serie, Vol. 6°, 1887. Cfr. anche Berichte Math. u. Nat. Ungarn, p. 95-112 del Vol. 17° (1899).

v. 62. Steigmüller, *Die harmonische Configuration.* Diss. Tübingen, IV (1886).

v. 63. Schröter, *Elementare Construction der Figur dreier in dermischer Lage befindlichen Tetraeder.* Giorn. di Crelle, 109, p. 341-357 (1892).

v. 64. K. Spindeler, *Ein Beitrag zur Einführung in das Gebiet der raumlichen Configurationen.* Propr. Gymn. Diedenhofen n.ⁱ 510 (1894), 518 (1896) e 553 (1898).

v. 65. C. Hossfeld, *Ueber die mit der Lösung einer Steiner'schen Aufgabe zusammenhängende Configuration* $(12_6\ 16_3)$. Zeitschr. Schlömilch, Vol. 29°, p. 305-306 (1884) e 30° p. 116-119.

15. La configurazione armonica piana è stata profondamente studiata da J. de Vries e Schröter; essa può intendersi costituita dai 12 punti di contatto delle tangenti condotte ad una cubica da 3 suoi punti in linea retta. Il De Vries dimostrò che, oltre al caso dei quadrangoli anarmonicamente tetra-prospettivi sono da considerarsi i quadrangoli ciclicamente tetra-prospettivi (Cfr. $(12_4 16_3)$B), i quali furono studiati anche da Schröter e Martinetti (v. 45) il quale ultimo ne determinò anche il gruppo di sostituzioni.

v. 66. Hesse, *Ueber Curven dritter Ordnung.* Giornale di Crelle, Vol. 36, p. 153 (1848).

v. 67. Caporali, *Sulla figura costituita dai punti di contatto* ecc. Memorie di Geometria, p. 338-343 (1888).

v. 68. J. de Vries, *Ueber gewisse ebene Configurationen.* Acta Math., Vol. 12°, p. 1 (1888).

v. 69. Schröter, *Die Hesse'sche Configuration* $(12_4\ 16_3)$. Giornale di Crelle, Vol. 180°, p. 269-312 (1891). Cfr. pure:

v. 70. E. Hess, *Bemerkungen zu der Abhandlung von H. Schröter: «Die Hess'sche Configuration».* Giornale di Crelle, Vol. 111°, p. 53-58 (1893).

v. 71. L. Klug, *Desmische Vierseiten und Kegelschnitts Systeme.* Monatshefte f. Math., Vol. 14°, p. 74-91 (1903).

v. 72. J. de Vries, *Over de harmonische Configuratie.* Acc. de Amsterdam, 3ª serie, Vol. 5°, p. 210-219 (1886). Tradotta in francese in Archives Néerl., Vol. 23°, p. 93-14 (1886).

v. 73. J. de Vries, *Over vlakke Configuraties.* Acc. di Amsterdam, 3ª serie, Vol. 5°, p. 105-120 (1886).

v. 74. J. de Vries, *Nieuwe eigenschappen der harmonische Configuraties.* Acc. di Amsterdam, 3ª serie, Vol. 7°, p. 177-191 (1890). Tradotta in Archives Néerl., Vol. 25°, p. 57-69.

16. Un nuovo insieme di proprietà si ricava dalla considerazione dei tetraedri biomologici e dalla figura costituita da due quaderne incidenti projettive di rette di una quadrica.

v. 75. G. Gallucci, *Studio sui tetraedri biomologici con applicazione alla configurazione armonica ed alla configurazione di Klein.* Rend. Acc. Napoli, 1898. Cfr. pure Giornale di Battaglini, Vol. 37° della 2ª serie, 1899.

Ed infine accenniamo ad una nuova notazione degli elementi della configura-

zione. I punti si possono indicare con A_{iklm} ed i piani con α_{iklm} ove *iklm* è una delle 24 permutazioni di 4 elementi.

v. 76. E. Steinitz, *Die Geraden der Reyeschen Konfiguration.* Arch. der Math. u. Phys., 3ª serie, p. 124-132 (1901).

v. 77. G. Gallucci, *Su la configurazione armonica.* Attì del IV Congr. Int. dei Matem., 1908.

Questa notazione ci ha permesso di applicare alla configurazione armonica lo studio delle figure ψ ricavando un terzo gruppo di proprietà (§ 2° della 2ª parte di questo lavoro).

§ 4.

La geometria del Tetraedro.

17. Tetraedri in più modi omologici. La discussione dei tetraedri in più modi omologici è stata fatta da E. Hess il quale ha esteso al tetraedro il teorema di Rosanes-Schröter sui triangoli in tre modi omologici [1]).

v. 78. J. Rosanes, *Ueber Dreiecke in perspectivischer Lage.* Math. Ann., Vol. 2°, p. 549-552, 1870.

v. 79. Schröter, *Ueber perspectivisch liegende Dreiecke.* Math. Ann., Vol. 2°, p. 553-563, 1870.

v. 80. E. Hess, *Beiträge zur Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder.* Math. Ann. 28, 1887. Cfr. anche v. 60 e 61 ed inoltre:

v. 81. G. Gallucci, *Discussione elementare dei casi di pluri-omologia dei tetraedri.* Periodico di Mat., Vol. 13°, 1898.

18. Tetraedri iperboloidici. Se due tetraedri sono riferiti in modo che le congiungenti dei vertici corrispondenti sono iperboloidiche, anche le intersezioni delle facce corrispondenti sono iperboloidiche. Questo teorema trovasi solamente enunciato nell'*Aperçu historique* di Chasles, p. 547. Una dimostrazione analitica è stata data da Hermes (v. 49) e poi dal Vàlyi:

v. 82. Vàlyi, *Ueber das räumliche Analogon des Desargues'sche Satzes.* Monatshefte f. Math., 1893, p. 124.

ed una dimostrazione analitica dallo Schur.

v. 83. Schur, *Ueber eine besondere Classe von Flächen vierter Ordnung.* Math. Ann., Vol. 20°, p. 254-296, 1882.

Altre dimostrazioni analitiche e sintetiche si possono ricavare dal teorema, pure dovuto a Chasles: i tetraedri iperboloidici sono polari rispetto ad una quadrica e reciprocamente. Cfr. Chasles, Ann. de Gergonne, Vol. 19, p. 55; Cayley, Quarterly Journal, Vol. 1°, p. 19; Ferrero, Brioschi e Salmon: Quarterly Journal, Vol. 1°, p 191, 241, 368; Schäfli, Giornale di Crelle, Vol. 65°, p. 189 e Vàlyi, Monat. f. Math., Vol. 6°, 1895, p. 220-222.

Teoremi più speciali trovansi nei seguenti:

v. 84. Schur, *Ueber besondere Lage zweier Tetraeder.* Math. Ann., Vol. 19°, p. 429-32, 1882.

[1]) Se due triangoli ABC, A'B'C' sono omologici nei due modi $\begin{vmatrix} A\,B\,C \\ A'B'C' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A\,B\,C \\ B'C'A' \end{vmatrix}$ sono omologici anche nel 3° modo $\begin{vmatrix} A\,B\,C \\ C'A'B' \end{vmatrix}$. Analogamente, se due tetraedri sono omologici nei tre modi $\begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ A'B'C'D' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ B'A'D'C' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ D'C'B'A' \end{vmatrix}$ saranno anche omologici nel 4° modo $\begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ C'D'A'B' \end{vmatrix}$. La stessa proprietà vale per i quadrangoli prospettivi.

v. 85. E. Hess, *Ueber die unilineare Lage zweier Tetraeder.* Sitz. Nat. Ges. Marburg, 1900, p. 27-37.

v. 86. E. Study, *Beweis und Erweiterung eines von Hess angegebene Satzes.* Ivi, p. 78-80.

v. 87. G. Kokn, *Ueber Tetraeder in Schief-perspectiver Lage.* Wien. Ber. 107, p. 777-785.

v. 88. E. Hess. *Ueber die coincident-bilineare Lage zweier Tètraeder.* Sitz. Nat. Ges. Marburg, 1901, p. 178-201.

Il problema dei tetraedri in più modi iperboloidici fu trattato per la prima volta da Schur (v. 83) il quale però non lo risolvette in generale. Un altro tentativo fu fatto, per via analitica da Muth:

v. 89. M. Muth, *Ueber die möglichen Fälle mehrfach hyderboloidischer Lage zwei Tetraeder.* Inaug. Diss. Marburg, 1893.

La discussione analitica completa si trova in Vàlyi (v. 82) il quale però non ha data la costruzione geometrica, che si trova in:

v. 90. G. Gallucci, *Risoluzione del problema dei tetraedri iperboloidici.* Rendic. Acc. Napoli 1905.

I tetraedri in più modi iperboloidici s'incontrano nello studio della curva del quarto ordine e di 1ª specie. Cfr. v. 59 ed ancora

v. 91. A. Ameseder, *Ueber configurationen auf der Raumcurve vierter Ordnung erster species.* Wien. Berichte 87, p. 1179-1225, 1883.

v. 92. Vàlyi, *Mehrfach lineare Tetraeder auf einer Raumcurve vierter Ordnung erstes Species.* Ungarn. Ber., Vol. 13°, p. 183-188, 1893.

19. Tetraedri di Möbius. Dopo la scoverta dei tetraedri reciprocamente inscritti e circoscritti, fatta da Möbius (v. 4) il primo ad occuparsene fu Steiner.

v. 93. Steiner, *Systematische Enhvikelung.* § 58, 1832.

Egli trovò che, oltre al modo di Möbius, due tetraedri possono essere reciprocamente inscritti e circoscritti in altri modi, l'esame completo dei quali si trova in:

v. 94. P. Muth, *Ueber Tetraederpaare.* Zeitschrift di Schlömilch, Vol. 37, p. 117-127 (1892).

L'analisi del Muth è stata poi pienamente confermata dal Martinetti, il quale ha trovate tutte le possibili configurazioni 8_4 di punti e piani.

v. 95. Martinetti, *Le configurazioni 8_4 di punti e piani.* Giornale di Battaglini, Vol. 34°, 1897.

La trattazione più esauriente dei tetraedri di Möbius e delle quistioni che vi si connettono si trova in:

v. 96. E. Caporali e P. del Pezzo, *Introduzione alla teoria dello spazio rigato.* Mem. di Geometria di Caporali, 1888.

Cfr. pure:

v. 97. Bauer, *Von zwei Tetraedern welche einander zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind.* Münch. Ber. 27, p. 359-366 (1887).

v. 98. E. Muller, *Ueber einen Steiner'schen Satz und dessen Beziehungen zur Conf. zweier einander ein und umbeschriebenen Tetraeder.* Arch. der Math. u. Phys., 3ª serie, Vol. 2°, p. 129-136 (1901).

20. Tutta la geometria pura del tetraedro si può dedurre dallo studio della *figura delle 8 rette* cioè dalla figura formata da due quaderne incidenti di rette di una quadrica. Questo risultato si trova in:

v. 99. G. Gallucci, *Studio della figura delle otto rette.* Rend. Acc. Napoli, 1906.

In questa memoria si trovano anche studiate due configurazioni $(32_3 24_4)$ che costituiscono una notevole generalizzazione della configurazione desmica.

§ 5.

La configurazione di Kummer.

21. La superficie del 4° ordine dotata di 16 punti doppii e di 16 piani doppii costituenti una Cfr. 16_6 di punti e piani, fu scoverta dal Kummer.

v. 100. Kummer, *Ueber die Flächen vierten Grades mit sechszehn singulären Punkten*. Berliner, Ber. 1864.

La configurazione è stata studiata sia dal punto di vista sintetico, sia dal punto di vista analitico.

I più importanti scritti sintetici sono:

v. 101. Reye, *Ueber die Kummer'sche Configuration*. Giornale di Crelle, 86, p. 209-213.

v. 102. Reye, *Ueber Strahlensysteme zweiter Klasse und die Kummer'sche Flache*. Ivi.

v. 103. De Paolis, *Alcune proprietà della superficie di Kummer*. Rend. Lincei (4) 6_2, p. 3-11, 1890.

v. 104. Caporali, *Sopra i piani ed i punti singolari della superficie di Kummer*. Lincei (3) 5, 1878.

È il lavoro più completo dal punto di vista geometrico.

v. 105. C. F. Geiser, *Das räumliche Sechseck und die Kummer'sche Configuration*. Zürich Nat. Ger. 41.

v. 106. Schröter, *Ueber das Fünflach und Sechsflach und die damit zusammenhangende Kummer'sche Configuration*. Giornale di Grelle, 100, 1887, p. 231-257.

v. 107. Bertini, *Sulle configurazioni di Kummer più volte tetraedroidali*. Lomb. Ist. (2) 29, p. 566-570, 1898.

v. 108. H. E. Timerding, *Ueber die Sechszehn Doppelebenen einer Kummer'sche Fläche*. Math. Ann. 54 (1901).

v. 109. S. Berzolari, *Sopra la Configuration di Kummer e le cubiche gobbe*. Lincei Rend. (5) 16_2, p. 726-731 (1907).

Sono pure notevoli, per la teoria generale delle configurazioni, le ricerche del Ciani e del Martinetti che hanno condotto a questo risultato: una Cfr. 16_6 di punti e piani tale che non possieda rette appartenenti a più di due punti ed a più di due piani è una Cfr. di Kummer.

v. 110. Ciani, *Sopra la Configurazione di Kummer*. Giornale di Battaglini, p. 177-180 del Vol. 34°, 1896.

v. 111. Martinetti, *Su la Configurazione di Kummer*. Id., Vol. 35°, p. 235-241, 1897 e Vol. 34°.

v. 112. Ciani, *Alcune osservazioni su la Configurazione di Kummer*. Id., Vol. 37, p. 68-76.

22. La configurazione di Kummer dà l'esempio più notevole dell'applicazione della teoria delle funzioni ϑ alla geometria; vi è tutto un gruppo di lavori che trattano della configurazione da tal punto di vista.

v. 113. Weber, *Ueber die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechszehn Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit zwei Verhänderlichen*. Giornale di Crelle, Vol. 84°, p. 332-354 (1878).

v. 114. Cayley, *On the double Thetafunctions*. Giornale di Crelle, Vol. 83°, p. 210, 219 e 220-233.

v. 115. Id., *On the 16-nodal quartic surface*. Id., Vol. 84°, p. 238-241.

v. 116. Borchardt, *Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche.* Giornale di Crelle, Vol. 83°, p. 234-245.

v. 117. K. Kohn, *Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche und ihren Zusammenhang mit den hyperelliptischen Functionen* $p=2$. Diss. München, 1878.

v. 118. K. Kohn, *Transformation der hyperelliptischen Functionen* $p=2$ *und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche.* Math. Ann., Vol. 15°, p. 315-354, 1879.

v. 119. Id., *Die verschiedene Gestalten der Kummer'sche Fläche.* Math. Ann., Vol. 18, p. 96-160, 1881.

v. 120. Id., *Einige specielle Fälle der Kummer'schen Fläche.* Leipzig. Ber. 1884, p. 10-16.

v. 121. F. Klein, *Ueber Configurationen welche der Kummer'schen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind.*

v. 122. Darboux, *Sur la surface à seize points singuliers et les fonctions* Θ *à deux variables.* Comptes Rendus, Vol. 92°, p. 285-688 e 1493-1495 (1881).

v. 123. Brioschi, *Sur la surface à seize points singuliers.* Compt. Rend., Vol. 92°, p. 944-946, 1881.

v. 124. Reichardt, *Ueber die Darstellung Kummer'schen Flächen.* Nova Acta Acc. Scop., Vol. 50° (1887).

v. 125. Stuchs, *Zur Theorie der Kummer'schen Configuration und der Orthogonale substitution.* Leipzig. Ber. 44, 1882.

Ultimamente è stato pubblicato un libro riassuntivo che espone tutte le ricerche precedenti geometriche ed analitiche:

v. 126. Hardson, *Kummer's quartic surface.* Cambridge Univ. Press. XI. 1905.

§ 6.

Le 28 tangenti doppie della quartica piana e le 27 rette della superficie cubica.

23. Le prime ricerche sulle 28 tangenti doppie delle quartiche piane sono dovute a Steiner e ad Hesse:

v. 127. Steiner, *Eigenschaft der Curven vierten grades rücksichtlich ihrer Doppeltangenten.* Giornale di Crelle, Vol. 49° (1854).

v. 128. Hesse, *Ueber di Doppeltangenten vierter Ordnung.* Id., id., p. 279-332 (1854).

Nel 1869 Geiser scovrì la connessione fra lo studio delle 28 tangenti doppie e quello delle 27 rette di una cubica.

v. 129. Geiser, *Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curven vierten Grades.* Math. Ann., Vol. 1°, p. 129-138, 1869.

Dopo la configurazione è stata ampiamente studiata con metodo geometrico:

v. 130. Geiser, *Ueber die Steiner'schen Satze von den Doppeltangenten.* Giornale di Crelle, Vol. 72°, p. 370-378 (1870).

v. 131. Ameseder, *Geometrische Untersuchungen der ebenen Curven vierter Ordnung.* Wien Ber., 1882 e 1883.

v. 132. G. Kohn, *Ueber die Berührungskegelschnitte und Doppeltangenten der allgemeine Curve vierter Ordnung.* Giornale di Crelle, Vol. 107, p. 1-50, 1890.

v. 133. C. Crone, *Sur la distribution des tangentes doubles.* Math. Ann., Vol. 12°, p. 561-575.

Anche la figura delle 28 tangenti doppie della quartica ha dato luogo ad importanti lavori analitici:

v. 134. Aronhold, *Ueber den gegenseitigen Zusammenhang der 28 Doppeltangenten.* Berlin. Ber., 1864.

v. 135. Roch, *Ueber die Doppeltangenten.* Giornale di Crelle, Vol. 66°, 1886.

v. 136. Riemann, *Zur Theorie der Abelschen Functionen für den Fall p=3.* Ges. Math. Werke, 1876.

v. 137. Cayley, *On the Double tangent of a Curve of the Fourth Order.* Phil. Trans. 151, 1861. V. pure Giornale di Crelle, Vol. 68 (1886) e 94 (1883).

v. 138. Noether, *Ueber die Siebensysteme von Kegelschnitten welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten..... gehen.* Munch. Ber., 25, p. 93-100 (1895). V. pure Math. Ann., 46, p. 545 (1895).

v. 139. G. Humbert, *Sur les coniques inscrites à une quartique.* Toulouse Ann. (4), Vol. 1°, p. 1-8, 1890.

Sono notevoli ancora gli ultimi lavori geometrici del Ciani, che ha trovato un nuovo raggruppamento delle 28 bitangenti costituito da 9 di esse, che formano una figura analoga a quella di 9 rette di Pascal passanti per 3 punti di Kirkman di una retta di Cayley.

v. 140. E. Ciani, *Le bitangenti della quartica piana studiate mediante la Configurazione di Kummer.* Ist. Lomb. (2) 31, 1898.

v. 141. G. Ciani, *Sopra le serie quadratiche di coniche inviluppanti la quartica piana.* Ist. Lomb., 1895.

Di più è da notare il lavoro riassuntivo:

v. 142. H. E. Timerding, *Ueber die Gruppirungen der Doppeltangenten.* Giornale di Crelle, Vol. 122°, p. 209-226 (1900).

24. Le 27 rette della superficie cubica furono scoverte contemporaneamente da Cayley e Salmon e poi ritrovate da Steiner.

v. 143. Cayley e Salmon, *On the triple tangent planes of surfaces of the third Order.* (Cambridge J. 4, 1849).

v. 144. Steiner, *Ueber die Flächen dritten Grades.* Giornale di Crelle, Vol. 53° (1857).

Le bisestuple furono per la prima volta considerate in:

v. 145. Schläfli, *An attempt to determine the 27 Lines upon a surface of the third Order.* Quart. J. 2, 1858.

Tralasciando di citare i grandi lavori di Cremona e di Sturm ed il classico trattato di Reye, divideremo le memorie che si occupano specialmente della configurazione in due gruppi.

1° indirizzo geometrico:

v. 146. Cremona, *Sulle 27 rette della superficie del 3° ordine.* Rend. Ist. Lomb. (II) 3, 1870.

v. 147. De Paolis, *Sulle superficie del 3° ordine.* Atti dei Lincei, 3ª serie, Vol. 10°, 1880-1881,

v. 148. R. Sturm, *Ueber die 27 Geraden einer kubischen Fläche.* Math. Annal., Vol. 23°, 1884.

v. 149. Bertini, *Contribuzione alla teoria delle 27 rette.* Ann. di Mat. (II) 12, 1884.

v. 150. H. Schröter, *Nachweis der 27 Geraden.* Giornale di Crelle, Vol. 62°, p. 265-280 (1863). V. anche Giornale di Crelle, 96, 1884.

2° indirizzo trascendente.

v. 151. E. Pascal, *Rappresentazione geometrica delle caratteristiche di genere 3 e di genere 4 e loro gruppi di sostituzioni.* 3 memorie: 1ª Annali di mat., Vol. 20°, p. 163-226 (1892); 2ª Vol. 20°, p. 269-332 e 3ª Vol. 21°, p. 85-137 (1893). Nella 2ª e nella 3ª si trova lo studio più completo della figura delle 27 rette. Cfr. anche Lomb. Ist. (2) 25, p. 1098-1102, p. 1103-1106 e 1136-1139 (1892) e (2) 26, p. 80-82 (1893).

v. 152. F. Klein, *Sur la résolution par les fonctions hyperelliptiques de l'équation du 27ème degré de laquelle dépend la determination des 27 droites d'une surface cubique.* Journ. de Liouv. (4) 4°, 169-176.

v. 153. E. Pascal, *Sulle 315 coniche coordinate alla curva piana del 4° ordine.* Lincei (5) I_2 e II_2.

v. 154. L. E. Dickson, *The configuration of the 27 lines on a cubic surface and the 28 bitangents to a quartic curve.* American M. S. Bull. (2) 8°, p. 63-70 (1901).

Nei due ultimi lavori si tratta della connessione fra le 28 tangenti doppie e le 27 rette della superficie cubica.

§ 7.

Configurazioni con elementi in parte immaginarii. Legame con la teoria dei gruppi.

25. La più semplice configurazione ad elementi immaginarii (in parte), dopo la Cfr. 8_3 di Kantor (§ 8°), è quella dei 9 flessi di una cubica scoverta, anche questa, da Steiner.

v. 155. Steiner, *Sätze ueber Curven zweiter und dritter Ordnung.* Giornale di Crelle, Vol. 32°, p. 300-304 (1846).

Per una trattazione completa v. Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen ueber Geometrie.*

Dopo vengono altre due notevolissime configurazioni di questo tipo: la figura delle 28 tangenti doppie di una quartica (§ 6) e la configurazione di Klein in intima connessione con la configurazione armonica e con la configurazione di Kummer (Klein, Math. Ann., 2° volume, e v. 41, 52, 57, 58, 96).

In intimo legame con le profonde ricerche del Klein su la geometria della retta è la configurazione nuova del Maschke costituita da 140 rette, 120 punti e 120 piani tali che per ogni punto passano 7 rette, in ogni piano stanno 7 rette; in ogni piano stanno 21 punti e per ogni punto passano 21 piani.

v. 156. H. Maschke, *Ueber eine merkwürdige Configuration gerader Linien im Raume.* Math. Ann., Vol. 36°, 1890.

v. 157. E. Meyer, *Ueber eine Configuration von geraden Linien im Raume.* Math. Ann., Vol. 65° (1908).

Un'altra nuova configurazione di rette, ma meno importante di quella del Maschke è stata trovata da F. Morley.

v. 158. F. Morley, *On a regular rectangular configuration of ten lines.* Proc. Math. S. London, Vol. 29°, 1898.

v. 159. F. Morley, *On a regular configurationen of ten linenpairs coniugate as to a quadric.* Bull. American Math. Soc. (II) 5°, 1899.

26. L'applicazione della teoria dei gruppi di sostituzioni alla teoria delle configurazioni è un argomento di grandissima importanza, ma le ricerche fatte sin ora non hanno condotto a risultati generali. Lasciando da parte l'interpretazione geometrica iperspaziale del Veronese (v. 41), che si è dimostrata poco feconda, daremo un cenno dell'interpretazione analitica del gruppo di una configurazione; è in questo campo che si sono ottenuti risultati di grandissima importanza. Non è qui il caso di riferire la ricca bibliografia sul gruppo dei 9 flessi, delle 28 tangenti doppie, delle 27 rette ecc. Sono esempi classici che si possono studiare sui trattati di Jordan e di Weber. Diremo soltanto dell'applicazione più recente.

Nel 1889 il Valentiner riuscì a scovrire un gruppo lineare di 360 collineazioni piane sfuggito all'enumerazione del Jordan. Questo gruppo fu studiato dal

Wiman, dal Friecke, dal Lachthin ed il Klein dimostrò la sua importanza per la risoluzione dell' equazione di 6° grado.

Il Gerbaldi fin dal 1882 in un suo studio sui gruppi di 6 coniche in involuzione aveva preparato il materiale per una chiara interpretazione geometrica del gruppo. Egli aveva dimostrato che i 45 vertici ed i 45 lati dei 15 triangoli autopolari rispetto alle coppie formate con due delle 6 coniche, sono talmente situati che i 45 lati concorrono a 4 a 4 nei 45 vertici, a 3 a 3 nei 60 punti comuni alle coniche delle coppie ed ancora a 3 a 3 in altri 60 punti. Ebbene i 45 vertici ed i 45 lati sono i centri e gli assi delle omologie armoniche di G_{360} ed i due sistemi di 50 punti in cui concorrono a 3 a 3 sono i punti uniti dei due sistemi di collineazioni di 3° ordine di G_{360}.

Allo stesso Gerbaldi si deve poi uno studio poderoso analitico sul gruppo di Valentiner. Ultimamente anche il Gordan trattò di questo gruppo in vista delle applicazioni alle equazioni di 6° grado.

v. 160. Gerbaldi, *Sui gruppi di 6 coniche in involuzione.* Torino, Atti, Vol. 17°, p. 566-580 (1882).

v. 161. Valentiner, *De endelige Trasformations Gruppes Theori.* Acc. di Copenhagen, (6) 5° (1889).

v. 162. Wiman, *Ueber eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen.* Math. Ann., Vol. 47° (1896).

v. 163. Fricke, *Ueber eine einfache Gruppe von 360 Operationen.* Göttinger Nachr. (1896).

v. 164. Gerbaldi, *Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane.* Math. Ann., Vol. 50° (1898).

v. 165. Lachtin, *Die Differentialresolventen einer algebraischen Gleichung sechsten Grades.* Math. Ann., Vol. 51°, 1898.

v. 166. Klein, *Sulla risoluzione delle equazioni di 6° grado.* Rend. Lincei, Vol. 8°, 1° sem., 1899.

v. 167. Gerbaldi, *Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane.* Rend. Circ. mat. di Palermo, Vol. 12° (1898), 13° (1899), 14° (1900) e 16° (1902).

v. 168. Gordan, *Die partielle Differential Gleichungen des Valentiner'problems.* Math. Ann., Vol. 61°, (1905).

v. 169. Gordan, *Ueber die Gleichungen sechsten Grades.* Congresso di Heidelberg e di Roma.

Da quel poco che abbiamo riferito si rileva la grandissima importanza delle applicazioni della teoria delle configurazioni ai gruppi ed insieme la loro estrema difficoltà.

§ 8.

Ricerche più generali su le configurazioni.

27. *Classi notevoli di configurazioni.*

1° Le configurazioni atrigone studiate dal Martinetti.

v. 170. Martinetti, *Sopra alcune configurazioni piane.* Annali di Matem. (2) Vol. 14° (1886).

2° Le configurazioni piane regolari studiate da Schönflies.

v. 171. A. Sconflies, *Ueber die regelmässigen Configurationen* n_3. Math. Ann., Vol. 31°, p. 43-69 (1888). V. pure Gotting. Nach. 1885, p. 414-417 e Math. Ann., Vol. 42°, p. 595-597 (1893).

v. 172. A. Schönflies, *Ueber regelmässige Configurationen* n_3 *auf der Curven dritter Ordnung*. Gotting. Nach. 334-344 del 1889.

v. 173. A. Schönflies, *Ueber eine specielle Classe von Configurationen auf den elliptischen Normalcurven n. Ordnung*. Math. Ann., Vol. 35°, p. 527-540 (1890).

v. 174. Ada Puccini, *Le configurazioni piane regolari d' indice 3*. Padova, Tip. P. Prosperini, 1909.

3° Configurazioni che si deducono dai poliedri regolari.

v. 175. J. de Vries, *Ueber räumliche Configurationen welche sich aus den regelmässigen Polyedern herleiten lassen*. Wien. Ber., Vol. 100°, p. 822-842 (1891).

v. 176. E. Hess, *Ueber gewisse räumliche Configurationen*. Marburg. Nat. Ges., 1892, p. 86-98.

4° *Le configurazioni poliedrali*. Configurazioni piane che si deducono da poliedri completi mediante proiezione o sezione (Cayley, v. 3, Giornale di Crelle, Vol 31°). Analoghe a queste sono le configurazioni che risultano da tre o più poligoni prospettivi rispetto allo stesso centro.

v. 177. Schubert, *Ueber eine gewisse Familie von Configurationen*. Hamburger Mittheil. 1883.

v. 178. Veronese, *Ueber die Behandlung der projectivischen*... Mat. Ann. 19.

v. 179. Caporali, *Frammenti su le configurazioni*. Memorie di Geom., p. 262-265, 1888.

v. 180. G. Lazzeri, *Le configurazioni piane di Caporali*. Periodico di mat., Vol. 12°, p. 1-16 (1897).

v. 181. G. Lazzeri, *Sulle configurazioni nello spazio*. Periodico di mat., Vol. 15°, p. 89-98 (1899).

v. 182. Jung, *Sull' equilibrio dei poligoni articolati*. Annali di mat., (2) Vol. 12°, p. 169-288 (1884).

v. 183. Jung, *Sopra una classe di configurazioni d'indice 3*. Ist. Lomb., (2) Vol. 18°, p. 231-238 (1885).

v. 184. S. Kantor, *Ueber eine Gattung von Configurationen*. Wien Ber., Vol. 80°, 1879 (configurazioni costituite da tre o più poligoni o poliedri prospettivi in uno stesso punto).

I lavori più completi su queste classi di configurazioni sono:

v. 185. J. de Vries, *Ueber polyedrale Configurationen*. Math. Ann., Vol. 34°, p. 227 (1889).

v. 186. J. de Vries, *Ueber eine Gattung regelmässiger ebener Configurationen*. Math. Ann., Vol. 35°, p. 401, 1890. Cfr. pure Accad. di Amsterdam, (3) Vol. 6°, p. 8-38, p. 45-68 e Zeitsch. Schlömilch, Vol. 35, p. 61-64.

Della generalizzazione agli iperspazii tratta anche il

v. 187. I. A. Carp, *Combinatorische Configurationen in meerdimensionale Ruimten*. Diss. Utrecht, 1902.

5° Le configurazioni inscritte nella cubica piana, in connessione col problema della chiusura di Steiner.

v. 188. J. de Vries, *Ueber der allgemeinen kubischen Curve eingeschriebene Configurationen*. Wien. Ber., Vol. 98° (1886). V. pure Acc. di Amsterdam, (3) Vol. 7°, p. 430-461 ed Arch. Néerl., Vol. 25°, p. 1-32.

v. 189. Martinetti, *Sui poligoni di Steiner*. Rend. Ist. Lombardo, 1891.

v. 190. R. Tesorone, *Sulle figure iperprospettive piane*. Lanciano, ed. D. Masciangelo, 1904.

28. *Configurazioni negli iperspazii*. Poco si sa delle configurazioni iperspaziali, a prescindere dalla facile generalizzazione delle configurazioni poliedrali. La figura che ha attirata la maggiore attenzione è quella dell' esagono gobbo nello spazio

a 4 dimensioni (v. 42, 43, 44). Altra configurazione iperspaziale importante è quella dei 10 punti doppii della varietà di Segre.

v. 191. Segre, *Sulla varietà cubica con 10 punti doppii.* Atti Accad. Torino, 1887 e 1888.

v. 192. Castelnuovo, *Ricerche di geometria della retta nello spazio a 4 dimensioni.* (Atti Ist. Veneto, serie 7ª, Vol. 2°, p. 855).

v. 193. Schoute, *Beschowing naar anleiding van een configuratie van Segre.* Accad. di Amsterdam, Vol. 10°, p. 239-250 (1901).

Sono anche notevoli i lavori del Berzolari sulle piramidi iperspaziali omologiche oppure di Möbius (Atti Lincei, 1904; Rend. Circolo mat. di Palermo, 1906).

29. *Le configurazioni* n_3 *in generale.* Il risultato più generale che si conosca nella teoria delle configurazioni è dovuto al Martinetti, il quale ha dato il mezzo di ricavare dallo schema di una Cfr. n_3 lo schema di una Cfr. $(n+1)_3$. Prima S. Kantor aveva trovati tutti i tipi di Cfr. 9_3 e 10_3; il Martinetti col suo metodo ricavò tutte le Cfr. 11_3. La sua analisi fu confermata dal paziente lavoro di Daublebsky von Sterneck il quale trovò anche le Cfr. 12_3.

v. 194. Martinetti, *Sulle configurazioni piane* μ_3. Annali di Matem., (2) Vol. 15°, p. 1-26 (1887).

v. 195. S. Kantor, *Ueber die Configurationen* (3, 3) *mit den Indices* 8, 9 *und ihren Zusammenhang mit den Curven dritter Ordnung.* Wien. Ber., Vol. 84°, p. 915-932.

v. 196. S. Kantor, *Ueber die Configurationen* $(3,3)_{10}$. Wien. Ber., Vol. 84°, p. 1291-1314, 1881.

v. 197. H. Schröter, *Ueber lineare Construction zur Herstellung der Configurationen* n_3. Gött. Nach., 1886, p. 337-253.

v. 198. H. Schröter, *Ueber die Bildungsweise und geom. Constr. der Configurationen* 10_3. Gött. Nach., 1889, p. 193-236.

v. 199. Daublebsky von Sterneck, *Die Configurationen* 11_3. (Monatsh. 5°, 1894).

v. 200. Id. *Die Configurationen* 12_3. (Monatsh. 6°, 1895).

v. 201. E. Steinitz, *Ueber die Construction der Configurationen* n_3. Inag. Diss. Breslau, 1894.

v. 202. E. Steinitz, *Ueder die Unmöglichkeit gewisse* Cfr. n_3 *in einem Zuge zu durchlaufen.* Monatsh. Vol. 8°, p. 293-296, 1897.

Al Martinetti si deve pure il primo inizio dello studio delle Cfr. n_4 nelle spazio:

v. 203. Martinetti, *I gruppi di tre tetraedri l'un l'altro inscritti e circoscritti.* Giornale di Battaglini, Vol. 41°, 1904. (V. anche v. 95).

v. 204. Martinetti, *Un gruppo di configurazioni* 9_4 *di punti e piani.* Atti Accad. Peloritana, Vol. 15°, 1901.

Altre ricerche di una certa generalità sono le seguenti:

v. 205. K. A. Andrejew, *Zur Frage ueber Configurationen.* Acc. di Charkow, (2) Vol. 2°, p. 94-107 (in russo). Contiene la genesi delle Cfr. $(n^{n-1})_n$ tipo Möbius.

v. 206. J. de Vries, *Sur les configurations planes dont chaque point supposte deux droites.* (Palermo Rend., Vol. 5°, 1891).

v. 207. K. Zindler, *Zur Theorie der Netze und Configurationen.* Wien. Ber., Vol. 98°, p. 499-519.

Si considerano figure più generali delle configurazioni.

v. 208. K. Zindler, *Eine Methode, aus gegebenen Configurationen andere abzuleiten.* Wien. Ber., Vol. 105° (1896).

Si considera la varietà lineare R_7 costituito dalle punteggiate proiettive; da una Cfr. in R_7 si deduce una configurazione di punteggiate, schiere rigate e congruenze appartenenti ad un complesso tetraedale.

PARTE SECONDA

CONTRIBUTO ALLO STUDIO DI SPECIALI CONFIGURAZIONI.

Studio su le figure ψ.

§ 1.

Le figure ψ nell'esagrammo di Pascal.

1. Siano i, k, l, m, n, p sei punti di una conica; col simbolo $\binom{ikl}{mnp}$ indicheremo la retta di Pascal dell'esagono semplice *kilnmp*, cioè la retta contenente i 3 *punti* D: $\binom{ik}{mn}, \binom{il}{mp}, \binom{ln}{kp}$. Di questi, i primi due sono intersezioni di lati corrispondenti nei due triangoli

$$\left\{\begin{matrix} ikl \\ mnp \end{matrix}\right.$$

ed il terzo si ricava unendo in croce gli estremi della terza coppia di lati $\left\{\begin{matrix} kl \\ np \end{matrix}\right.$.

Delle 60 rette di Pascal corrispondenti ai 60 esagoni semplici, che si possono formare con i 6 punti, consideriamo le 18 seguenti:

$$(\mathrm{I})\ \begin{vmatrix} \binom{ikl}{mnp} & \binom{kli}{mnp} & \binom{lik}{mnp} \\ \binom{ikl}{npm} & \binom{kli}{npm} & \binom{lik}{npm} \\ \binom{ikl}{pmn} & \binom{kli}{pmn} & \binom{lik}{pmn} \end{vmatrix} \qquad (\mathrm{II})\ \begin{vmatrix} \binom{ikl}{mpn} & \binom{kli}{mpn} & \binom{lik}{mpn} \\ \binom{ikl}{nmp} & \binom{kli}{nmp} & \binom{lik}{nmp} \\ \binom{ikl}{pnm} & \binom{kli}{pnm} & \binom{lik}{pnm} \end{vmatrix}$$

Dalla prima verticale di (I) si passa alle altre due lasciando inalterato il 2° triangolo: *mnp*, oppure *npm*, oppure *pmn*, e permutando ciclicamente i vertici del 1° triangolo: da *ikl* a *kli* ed a *lik*. Dalla prima orizzontale di I si passa alle altre due lasciando inalterato il 1° triangolo: *ikl*, oppure *kli*, oppure *lik*, e permutando ciclicamente i vertici del 2° triangolo: da *mnp* ad *npm* ed a *pmn*. In modo analogo si formano i simboli del determinante (II), però nel passaggio da una orizzontale all'altra si permutano i vertici del 2° triangolo passando da *mpn* ad *nmp* e da *nmp* a *pnm*.

I determinanti (I) e (II) si potrebbero anche rappresentare mediante i simboli dei loro primi elementi $\binom{ikl}{mnp}, \binom{ikl}{mpn}$.

Per trovare i 3 punti D situati su una retta di (I) o (II) bisogna procedere come si è fatto per il simbolo $\binom{ikl}{mnp}$. Tutti i punti D determinati dalle 9 rette di

Pascal di (I) si possono raggruppare così:

$$(a)\quad \begin{vmatrix} \binom{ik}{mn}\binom{il}{mp} & \binom{kl}{mn}\binom{ik}{mp} & \binom{il}{mn}\binom{kl}{mp} \\ \binom{ik}{np}\binom{il}{mn} & \binom{kl}{np}\binom{ik}{mn} & \binom{il}{np}\binom{kl}{mn} \\ \binom{ik}{mp}\binom{il}{np} & \binom{kl}{mp}\binom{ik}{np} & \binom{il}{mp}\binom{kl}{np} \end{vmatrix} \qquad (b)\quad \begin{vmatrix} \binom{kp}{ln} & \binom{lp}{in} & \binom{ip}{kn} \\ \binom{km}{lp} & \binom{lm}{ip} & \binom{im}{kp} \\ \binom{kn}{lm} & \binom{ln}{im} & \binom{in}{km} \end{vmatrix}$$

Similmente, i punti D determinati dalle 9 rette di (II) si possono raggruppare negli altri due quadri:

$$(a')\quad \begin{vmatrix} \binom{ik}{mp}\binom{il}{mn} & \binom{kl}{mp}\binom{ik}{mn} & \binom{il}{mp}\binom{kl}{mn} \\ \binom{ik}{mn}\binom{il}{np} & \binom{kl}{mn}\binom{ik}{np} & \binom{il}{mn}\binom{kl}{np} \\ \binom{ik}{np}\binom{il}{mp} & \binom{kl}{np}\binom{ik}{mp} & \binom{il}{np}\binom{kl}{mp} \end{vmatrix} \qquad (b')\quad \begin{vmatrix} \binom{kn}{lp} & \binom{ln}{ip} & \binom{in}{kp} \\ \binom{kp}{lm} & \binom{lp}{im} & \binom{ip}{km} \\ \binom{km}{ln} & \binom{lm}{in} & \binom{im}{kn} \end{vmatrix}$$

Ogni elemento di (b) è allineato con i due punti dell'elemento corrispondente di (a), ed ogni elemento di (b') è allineato con i due punti dell'elemento corrispondente di (a').

2. I termini positivi dello sviluppo di (I) rappresentano tre triangoli i cui lati sono rispettivamente:

$$\begin{matrix} \binom{ikl}{mnp}, & \binom{kli}{npm}, & \binom{lik}{pmn} \\ \binom{kli}{pmn}, & \binom{lik}{mnp}, & \binom{ikl}{npm} \\ \binom{lik}{npm}, & \binom{ikl}{pmn}, & \binom{kli}{mnp} \end{matrix} \qquad \text{(A)}$$

Tenendo presenti i punti D del determinante (a) si trova che i vertici di questi triangoli sono:

$$\begin{matrix} \binom{ik}{mn}, & \binom{kl}{np}, & \binom{il}{mp} \\ \binom{kl}{mp}, & \binom{il}{mn}, & \binom{ik}{np} \\ \binom{il}{np}, & \binom{ik}{mp}, & \binom{kl}{mn} \end{matrix}$$

I vertici corrispondenti dei primi due triangoli stanno sulle tre rette di Pascal:

$$\binom{kli}{mpn}, \quad \binom{lik}{nmp}, \quad \binom{ikl}{pnm}$$

concorrenti in un punto di Kirkman, che si può indicare con uno qualunque dei 3 simboli: K^{kli}_{mpn}, K^{lik}_{nmp}, K^{ikl}_{pnm}.

I vertici del 2° e del 3° triangolo sono sulle 3 rette di Pascal:

$$\binom{lik}{pnm}, \binom{ikl}{mpn}, \binom{kli}{nmp}$$

concorrenti in un punto di Kirkman: $K^{lik}_{pnm} \equiv K^{ikl}_{mpn} \equiv K^{kli}_{nmp}$.

Ed i vertici corrispondenti del 1° e del 3° triangolo sono sulle 3 rette di Pascal:

$$\binom{ikl}{nmp}, \binom{kli}{pnm}, \binom{lik}{mpn}$$

concorrenti in un terzo punto di Kirkman: $K^{ikl}_{nmp} \equiv K^{kli}_{pnm} \equiv K^{lik}_{mpn}$.

3. I termini negativi dello sviluppo di (I) rappresentano le terne di lati dei triangoli (A) disposte nelle 3 verticali e si scorge subito che tali terne di rette Pascal concorrono rispettivamente nei 3 punti di Kirkman:

$$K^{ikl}_{mnp} \equiv K^{kli}_{pmn} \equiv K^{lik}_{npm}$$

$$K^{kli}_{npm} \equiv K^{lik}_{mnp} \equiv K^{ikl}_{pmn}$$

$$K^{lik}_{pmn} \equiv K^{ikl}_{npm} \equiv K^{kli}_{mnp}$$

situati sulla retta di Cayley che si può indicare col simbolo c^{ikl}_{mnp}.

Dunque i 3 trilateri (A) sono a 2 a 2 prospettivi con lo stesso asse di prospettiva c^{ikl}_{mnp}; i 3 centri di prospettiva, cioè K^{kli}_{mpn}, K^{kli}_{nmp}, K^{kli}_{pnm} stanno sulla retta di Cayley c^{ikl}_{mpn} coniugata all'altra c^{ikl}_{mnp}.

4. In modo analogo si tratta il determinante (II) tenendo presenti i punti D compreso in (a') e si conchiude che:

I termini negativi dello sviluppo di (I) *ed i termini positivi dello sviluppo di* (II) *dànno due terne di punti di Kirkman situate su due rette di Cayley* c^{ikl}_{mnp}, c^{ikl}_{mpn} *coniugate; i termini positivi dello sviluppo di* (I) *dànno una terna di triangoli a due a due prospettivi con l'asse comune* c^{ikl}_{mnp} *e con i centri di prospettiva nei 3 punti di Kirkman di* c^{ikl}_{mpn}; *i termini negativi dello sviluppo di* (II) *dànno un'altra terna di triangoli a due a due prospettivi con l'asse comune* c^{ikl}_{mpn} *e con i centri di prospettiva nei tre punti di Kirkman di* c^{ikl}_{mnp}.

5. Anche in una memoria del Veronese (v. 41) i punti di Kirkman si fanno corrispondere ai termini dello sviluppo di un certo determinante, però gli elementi di questo non sono rette di Pascal, come in (I) e (II), ma triangoli Δ. I determinanti da noi considerati forniscono una nuova notazione per gli elementi dell'esagrammo, notazione un po' più complicata di quelle di Veronese e Capo-

rali (v. 27) ma che pone in evidenza non solo le proprietà già note, ma tutto un gruppo di proprietà nuove.

6. L'insieme delle 9 rette (I) e (II) gode della seguente proprietà:

Le orizzontali rappresentano i lati di tre trilateri a due a due triomologici; lo stesso dicasi per le verticali.

Consideriamo prima le 3 orizzontali di (I). Le prime due rappresentano trilateri omologici nei due modi seguenti:

$$\left|\begin{matrix} \binom{ikl}{mnp} & \binom{kli}{mnp} & \binom{lik}{mnp} \\ \binom{lik}{npm} & \binom{ikl}{npm} & \binom{kli}{npm} \end{matrix}\right| \quad \text{asse d'omologia } c^{ikl}_{mnp}\text{; centro } B_{12}$$

$$\left|\begin{matrix} \binom{ikl}{mnp} & \binom{kli}{mnp} & \binom{lik}{mnp} \\ \binom{kli}{npm} & \binom{lik}{npm} & \binom{ikl}{npm} \end{matrix}\right| \quad \text{asse } \binom{ik}{mn}\binom{kl}{mn}\binom{li}{mn} \equiv mn\text{; centro } C_{12}$$

e quindi omologici nel 3° modo:

$$\left|\begin{matrix} \binom{ikl}{mnp} & \binom{kli}{mnp} & \binom{lik}{mnp} \\ \binom{ikl}{npm} & \binom{kli}{npm} & \binom{lik}{npm} \end{matrix}\right| \quad \text{asse } a_{12}\text{, centro } A_{12}$$

La 2ª e la 3ª orizzontale rappresentano due trilateri omologici nei due modi seguenti:

$$\left|\begin{matrix} \binom{ikl}{npm} & \binom{kli}{npm} & \binom{lik}{npm} \\ \binom{lik}{pmn} & \binom{ikl}{pmn} & \binom{kli}{pmn} \end{matrix}\right| \quad \text{asse } c^{ikl}_{mnp}\text{; centro } B_{23}$$

$$\left|\begin{matrix} \binom{ikl}{npm} & \binom{kli}{npm} & \binom{lik}{npm} \\ \binom{kli}{pmn} & \binom{lik}{pmn} & \binom{ikl}{pmn} \end{matrix}\right| \quad \text{asse } \binom{ik}{np}\binom{kl}{np}\binom{li}{np} \equiv np\text{; centro } C_{23}$$

e quindi omologici anche nel 3° modo:

$$\left|\begin{matrix} \binom{ikl}{npm} & \binom{kli}{npm} & \binom{lik}{npm} \\ \binom{ikl}{pmn} & \binom{kli}{pmn} & \binom{lik}{pmn} \end{matrix}\right| \quad \text{asse } a_{23}\text{; centro } A_{23}$$

La 1ª e la 3ª orizzontale rappresentano due trilateri omologici nei due modi:

$$\left|\begin{array}{ccc}\binom{ikl}{mnp} & \binom{kli}{mnp} & \binom{lik}{mnp} \\ \binom{kli}{pmn} & \binom{lik}{pmn} & \binom{ikl}{pmn}\end{array}\right| \text{asse } c^{ikl}_{mnp}\text{; centro } B_{13}$$

$$\left|\begin{array}{ccc}\binom{ikl}{mnp} & \binom{kli}{mnp} & \binom{lik}{mnp} \\ \binom{lik}{pmn} & \binom{ikl}{pmn} & \binom{kli}{pmn}\end{array}\right| \text{asse } \binom{il}{mp}\binom{ik}{mp}\binom{lk}{mp} \equiv mp\text{; centro } C_{13}$$

e quindi omologici anche nel 3° modo:

$$\left|\begin{array}{ccc}\binom{ikl}{mnp} & \binom{kli}{mnp} & \binom{lik}{mnp} \\ \binom{ikl}{pmn} & \binom{kli}{pmn} & \binom{lik}{pmn}\end{array}\right| \text{asse } a_{13}\text{; centro } A_{13}$$

Analogamente per le verticali:
La 1ª e la 2ª dànno due trilateri omologici nei tre modi:

$$\left|\begin{array}{ccc}\binom{ikl}{mnp} & \binom{ikl}{npm} & \binom{ikl}{pmn} \\ \binom{kli}{pmn} & \binom{kli}{mnp} & \binom{kli}{npm}\end{array}\right| \begin{array}{l}\text{asse } c^{ikl}_{mnp} \\ \text{centro } B'_{12}\end{array};$$

$$\left|\begin{array}{ccc}\binom{ikl}{mnp} & \binom{ikl}{npm} & \binom{ikl}{pmn} \\ \binom{kli}{npm} & \binom{kli}{pmn} & \binom{kli}{mnp}\end{array}\right| \begin{array}{l}\text{asse } ik \\ \text{centro } C'_{12}\end{array}; \quad \left|\begin{array}{ccc}\binom{ikl}{mnp} & \binom{ikl}{npm} & \binom{ikl}{pmn} \\ \binom{kli}{mnp} & \binom{kli}{npm} & \binom{kli}{pmn}\end{array}\right| \begin{array}{l}\text{asse } a'_{12} \\ \text{centro } A'_{12}\end{array}.$$

La 2ª e la 3ª dànno due trilateri omologici nei tre modi:

$$\left|\begin{array}{ccc}\binom{kli}{mnp} & \binom{kli}{npm} & \binom{kli}{pmn} \\ \binom{lik}{pmn} & \binom{lik}{mnp} & \binom{lik}{npm}\end{array}\right| \begin{array}{l}\text{asse } c^{ikl}_{mnp} \\ \text{centro } B'_{23}\end{array};$$

$$\left|\begin{array}{ccc}\binom{kli}{mnp} & \binom{kli}{npm} & \binom{kli}{pmn} \\ \binom{lik}{npm} & \binom{lik}{pmn} & \binom{lik}{mnp}\end{array}\right| \begin{array}{l}\text{asse } kl \\ \text{centro } C'_{23}\end{array}; \quad \left|\begin{array}{ccc}\binom{kli}{mnp} & \binom{kli}{npm} & \binom{kli}{pmn} \\ \binom{lik}{mnp} & \binom{lik}{npm} & \binom{lik}{pmn}\end{array}\right| \begin{array}{l}\text{asse } a'_{23} \\ \text{centro } A'_{23}\end{array}.$$

La 1ª e la 3ª dànno due trilateri omologici nei tre modi:

$$\left|\begin{array}{ccc}\binom{ikl}{mnp} & \binom{ikl}{npm} & \binom{ikl}{pmn} \\ \binom{lik}{npm} & \binom{lik}{pmn} & \binom{lik}{mnp}\end{array}\right| \begin{array}{l}\text{asse } c^{ikl}_{mnp} \\ \text{centro } B'_{13}\end{array};$$

$$\left|\begin{array}{ccc}\binom{ikl}{mnp} & \binom{ikl}{npm} & \binom{ikl}{pmn} \\ \binom{lik}{pmn} & \binom{lik}{mnp} & \binom{lik}{npm}\end{array}\right| \begin{array}{l}\text{asse } il \\ \text{centro } C'_{13}\end{array}; \quad \left|\begin{array}{ccc}\binom{ikl}{mnp} & \binom{ikl}{npm} & \binom{ikl}{pmn} \\ \binom{lik}{mnp} & \binom{lik}{npm} & \binom{lik}{pmn}\end{array}\right| \begin{array}{l}\text{asse } a'_{13} \\ \text{centro } A'_{13}\end{array}.$$

Come per le orizzontali, la terza omologia in ciascuna coppia di triangoli è conseguenza delle prime due, in virtù del teorema di Rosanes-Schröter.

7. Chiameremo *figura* ψ un gruppo di nove rette che godono delle proprietà delle nove rette del determinante (I) (n.[i] 3, 4 e 6).

Questa figura si presenta non solo nell'esagramma di Pascal, ma anche, come vedremo in seguito, in altre configurazioni; essa ci permette di ricavare la distribuzione degli elementi di tali configurazioni in terne cicliche di triangoli (Cfr. 9_3 di Pappo).

8. È facile vedere che i 3 assi d'omologia a_{12}, a_{13}, a_{23} concorrono in un punto O′ ed i 3 altri assi: $a'_{12}, a'_{13}, a'_{23}$ in un altro punto O. Infatti:

$$\begin{array}{lll} a_{12} \text{ contiene i punti} & \binom{ikl}{mnp}\binom{ikl}{npm} \quad \binom{kli}{mnp}\binom{kli}{npm} \quad \binom{lik}{mnp}\binom{lik}{npm} \\ a_{13} \quad \text{»} \quad \text{»} & \binom{ikl}{mnp}\binom{ikl}{pmn} \quad \binom{kli}{mnp}\binom{kli}{pmn} \quad \binom{lik}{mnp}\binom{lik}{pmn} \\ a_{23} \quad \text{»} \quad \text{»} & \binom{ikl}{npm}\binom{ikl}{pmn} \quad \binom{kli}{npm}\binom{kli}{pmn} \quad \binom{lik}{npm}\binom{lik}{pmn}. \end{array}$$

Ora, i due trilateri rappresentati dalle verticali 1^a e 2^a di (I) sono omologici nel modo:

$$\begin{vmatrix} \binom{ikl}{mnp} & \binom{ikl}{npm} & \binom{ikl}{pmn} \\ \binom{kli}{mnp} & \binom{kli}{npm} & \binom{kli}{pmn} \end{vmatrix},$$

con l'asse d'omologia a'_{12} e col centro d'omologia:

$$A'_{12} \equiv \begin{cases} \binom{ikl}{mnp}\binom{ikl}{npm} \cdot \binom{kli}{mnp}\binom{kli}{npm} \\ \binom{ikl}{mnp}\binom{ikl}{pmn} \cdot \binom{kli}{mnp}\binom{kli}{pmn} \\ \binom{ikl}{npm}\binom{ikl}{pmn} \cdot \binom{kli}{npm}\binom{kli}{pmn} \end{cases}.$$

Dunque le 3 rette a_{12}, a_{13}, a_{23} passano per il punto A'_{12}. Considerando invece la 1^a e la 3^a verticale si troverebbe come punto d'incontro A'_{13} e considerando la 2^a e la 3^a verticale si troverebbe come punto d'incontro A'_{23}. Se ne deduce che i 3 punti $A'_{12}, A'_{13}, A'_{23}$ coincidono in un punto O′ ove concorrono i 3 assi a_{12}, a_{13}, a_{23}.

Similmente si dimostra che i 3 punti A_{12}, A_{13}, A_{23} coincidono col punto O di incontro dei 3 assi $a'_{12}, a'_{13}, a'_{23}$ e si conchiude che:

I triangoli rappresentati dalle orizzontali di (I) *sono riferiti in modo da risultare omologici a due a due secondo tre assi d'omologia concorrenti in un punto che è il centro d'omologia comune dei tre triangoli rappresentati dalle verticali e viceversa: i triangoli rappresentati dalle verticali di* (I) *sono riferiti in modo da risultare a due a due omologici secondo tre assi concorrenti in un punto, che è il centro d'omologia comune dei tre triangoli rappresentati dalle orizzontali.*

9. Il determinante (II) si tratta come (I) e si trova che:

Le orizzontali danno 3 trilateri a 2 a 2 tri-omologici; gli assi d'omologia sono: 1.° c^{ikl}_{mpn}; 2.° i lati del triangolo mnp; *3.° tre rette* (a_{ik}) *concorrenti in un punto* (O') *nel quale coincidono i 3 centri d'omologia dei trilateri rappresentati dalle verticali.*

Le verticali danno 3 trilateri a 2 a 2 tri-omologici; gli assi d'omologia sono: 1.° c^{ikl}_{mpn}; 2.° i lati del triangolo ikl; *3.° tre rette* (a'_{ik}) *concorrenti in un punto* (O) *nel quale coincidono i 3 centri d'omologia dei trilateri rappresentati dalle orizzontali.*

10. Le figure ψ rappresentate dai determinanti (I) e (II) si diranno *coniugate.* Le relazioni fra i due gruppi di nove rette sono espresse dal teorema del n.° 4 e dall'altro:

Una orizzontale di (I) *e la corrispondente di* (II) *rappresentano due triangoli tri-omologici; lo stesso per le verticali.*

Una orizzontale di (I) *ed una non corrispondente di* (II) *rappresentano due triangoli semplicemente omologici; lo stesso per le verticali.*

Infatti, tenendo presenti i quadri (a) ed (a') si osservano le seguenti omologie:

1.° Per le orizzontali corrispondenti:

$$\left|\begin{matrix} \binom{ikl}{mnp} & \binom{kli}{mnp} & \binom{lik}{pmn} \\ \binom{kli}{mpn} & \binom{lik}{mpn} & \binom{ikl}{mpn} \end{matrix}\right| \text{ asse } mn \quad ; \quad \left|\begin{matrix} \binom{ikl}{mnp} & \binom{kli}{mnp} & \binom{lik}{mnp} \\ \binom{lik}{mpn} & \binom{ikl}{mpn} & \binom{kli}{mpn} \end{matrix}\right| \text{ asse } mp ,$$

e quindi la 3ª

$$\left|\begin{matrix} \binom{ikl}{mnp} & \binom{kli}{mnp} & \binom{lik}{mnp} \\ \binom{ikl}{mpn} & \binom{kli}{mpn} & \binom{lik}{mpn} \end{matrix}\right| \text{ asse } r_1 .$$

$$\left|\begin{matrix} \binom{ikl}{npm} & \binom{kli}{npm} & \binom{lik}{npm} \\ \binom{kli}{nmp} & \binom{lik}{nmp} & \binom{ikl}{nmp} \end{matrix}\right| \text{ asse } np \quad ; \quad \left|\begin{matrix} \binom{ikl}{npm} & \binom{kli}{npm} & \binom{lik}{npm} \\ \binom{lik}{nmp} & \binom{ikl}{nmp} & \binom{kli}{nmp} \end{matrix}\right| \text{ asse } nm ,$$

e quindi la 3ª

$$\left|\begin{matrix} \binom{ikl}{npm} & \binom{kli}{npm} & \binom{lik}{npm} \\ \binom{ikl}{nmp} & \binom{kli}{nmp} & \binom{lik}{nmp} \end{matrix}\right| \text{ asse } r_2 .$$

$$\left|\begin{matrix} \binom{ikl}{pmn} & \binom{kli}{pmn} & \binom{lik}{pmn} \\ \binom{kli}{pnm} & \binom{lik}{pnm} & \binom{ikl}{pnm} \end{matrix}\right| \text{ asse } mp \quad ; \quad \left|\begin{matrix} \binom{ikl}{pmn} & \binom{kli}{pmn} & \binom{lik}{pmn} \\ \binom{lik}{pnm} & \binom{ikl}{pnm} & \binom{kli}{pnm} \end{matrix}\right| \text{ asse } np ,$$

e quindi la 3ª

$$\left|\begin{matrix} \binom{ikl}{pmn} & \binom{kli}{pmn} & \binom{lik}{pmn} \\ \binom{ikl}{pnm} & \binom{kli}{pnm} & \binom{lik}{pnm} \end{matrix}\right| \text{ asse } r_3 .$$

2.° Per le verticali corrispondenti:

$$\begin{vmatrix} \binom{ikl}{mnp} & \binom{ikl}{npm} & \binom{ikl}{pmn} \\ \binom{ikl}{nmp} & \binom{ikl}{pnm} & \binom{ikl}{mpn} \end{vmatrix} \text{ asse } ik \quad ; \quad \begin{vmatrix} \binom{ikl}{mnp} & \binom{ikl}{npm} & \binom{ikl}{pmn} \\ \binom{ikl}{pnm} & \binom{ikl}{mpn} & \binom{ikl}{nmp} \end{vmatrix} \text{ asse } il \, ,$$

e quindi la 3ª

$$\begin{vmatrix} \binom{ikl}{mnp} & \binom{ikl}{npm} & \binom{ikl}{pmn} \\ \binom{ikl}{mpn} & \binom{ikl}{nmp} & \binom{ikl}{pnm} \end{vmatrix} \text{ asse } r'_1 \, .$$

$$\begin{vmatrix} \binom{kli}{mnp} & \binom{kli}{npm} & \binom{kli}{pmn} \\ \binom{kli}{nmp} & \binom{kli}{pnm} & \binom{kli}{mpn} \end{vmatrix} \text{ asse } kl \quad ; \quad \begin{vmatrix} \binom{kli}{mnp} & \binom{kli}{npm} & \binom{kli}{pmn} \\ \binom{kli}{pnm} & \binom{kli}{mpn} & \binom{kli}{nmp} \end{vmatrix} \text{ asse } ik \, ,$$

e quindi la 3ª

$$\begin{vmatrix} \binom{kli}{mnp} & \binom{kli}{npm} & \binom{kli}{pmn} \\ \binom{kli}{mpn} & \binom{kli}{nmp} & \binom{kli}{pnm} \end{vmatrix} \text{ asse } r'_2 \, .$$

$$\begin{vmatrix} \binom{lik}{mnp} & \binom{lik}{npm} & \binom{lik}{pmn} \\ \binom{lik}{nmp} & \binom{lik}{pnm} & \binom{lik}{mpn} \end{vmatrix} \text{ asse } il \quad ; \quad \begin{vmatrix} \binom{lik}{mnp} & \binom{lik}{npm} & \binom{lik}{pmn} \\ \binom{lik}{pnm} & \binom{lik}{mpn} & \binom{lik}{npm} \end{vmatrix} \text{ asse } kl \, ,$$

e quindi la 3ª

$$\begin{vmatrix} \binom{lik}{mnp} & \binom{lik}{npm} & \binom{lik}{pmn} \\ \binom{lik}{mpn} & \binom{lik}{nmp} & \binom{lik}{pnm} \end{vmatrix} \text{ asse } r'_3 \, .$$

3.° Per le orizzontali non corrispondenti:

$$\begin{vmatrix} \binom{ikl}{mnp} & \binom{kli}{mnp} & \binom{lik}{mnp} \\ \binom{ikl}{nmp} & \binom{kli}{nmp} & \binom{lik}{nmp} \end{vmatrix} \text{ asse } mn \quad ; \quad \begin{vmatrix} \binom{ikl}{mnp} & \binom{kli}{mnp} & \binom{lik}{mnp} \\ \binom{ikl}{pnm} & \binom{kli}{pnm} & \binom{lik}{pnm} \end{vmatrix} \text{ asse } mp \, ,$$

$$\begin{vmatrix} \binom{ikl}{npm} & \binom{kli}{npm} & \binom{lik}{npm} \\ \binom{ikl}{mpn} & \binom{kli}{mpn} & \binom{lik}{mpn} \end{vmatrix} \text{ asse } mn \quad ; \quad \begin{vmatrix} \binom{ikl}{npm} & \binom{kli}{npm} & \binom{lik}{npm} \\ \binom{ikl}{pnm} & \binom{kli}{pnm} & \binom{lik}{pnm} \end{vmatrix} \text{ asse } np \, ,$$

$$\begin{vmatrix} \binom{ikl}{pmn} & \binom{kli}{pmn} & \binom{lik}{pmn} \\ \binom{ikl}{mpn} & \binom{kli}{mpn} & \binom{lik}{mpn} \end{vmatrix} \text{ asse } mp \quad ; \quad \begin{vmatrix} \binom{ikl}{pmn} & \binom{kli}{pmn} & \binom{lik}{pmn} \\ \binom{ikl}{nmp} & \binom{kli}{nmp} & \binom{lik}{nmp} \end{vmatrix} \text{ asse } np \, ,$$

4.° Per le verticali non corrispondenti:

$$\left|\begin{matrix}\binom{ikl}{mnp} & \binom{ikl}{npm} & \binom{ikl}{pmn} \\ \binom{kli}{mpn} & \binom{kli}{nmp} & \binom{kli}{pnm}\end{matrix}\right| \text{ asse } ik \quad ; \quad \left|\begin{matrix}\binom{ikl}{mnp} & \binom{ikl}{npm} & \binom{ikl}{pmn} \\ \binom{lik}{mpn} & \binom{lik}{nmp} & \binom{lik}{pnm}\end{matrix}\right| \text{ asse } il$$

$$\left|\begin{matrix}\binom{kli}{mnp} & \binom{kli}{npm} & \binom{kli}{pmn} \\ \binom{ikl}{mpn} & \binom{ikl}{nmp} & \binom{ikl}{pnm}\end{matrix}\right| \text{ asse } ik \quad ; \quad \left|\begin{matrix}\binom{kli}{mnp} & \binom{kli}{npm} & \binom{kli}{pmn} \\ \binom{lik}{mpn} & \binom{lik}{nmp} & \binom{lik}{pnm}\end{matrix}\right| \text{ asse } kl$$

$$\left|\begin{matrix}\binom{lik}{mnp} & \binom{lik}{npm} & \binom{lik}{pmn} \\ \binom{ikl}{mpn} & \binom{ikl}{nmp} & \binom{ikl}{pnm}\end{matrix}\right| \text{ asse } il \quad ; \quad \left|\begin{matrix}\binom{lik}{mnp} & \binom{lik}{npm} & \binom{lik}{pmn} \\ \binom{kli}{mpn} & \binom{kli}{nmp} & \binom{kli}{pnm}\end{matrix}\right| \text{ asse } kl$$

11. Consideriamo i 6 trilateri rappresentati dalle 6 orizzontali dei determinanti (I) e (II), così come sono disposti, risultano omologici a due a due. I 15 assi di omologia sono:

1.° le 3 rette: a_{12}, a_{13}, a_{23} concorrenti in O′;

2.° le 3 rette: $(a_{12}), (a_{13}), (a_{23})$ concorrenti in (O′);

3.° le 3 rette: r_1, r_2, r_3

e gli altri 6 coincidono a 2 a 2 con i lati del trilatero *mnp*.

Similmente, i 6 trilateri rappresentati dalle 6 verticali, così come sono disposti, risultano a 2 a 2 omologici. I 15 assi d'omologia sono:

1.° le 3 rette: $a'_{12}, a'_{13}, a'_{23}$ concorrenti in O;

2.° le 3 rette: $(a'_{12}), (a'_{13}), (a'_{23})$ concorrenti in (O);

3.° le 3 rette: r'_1, r'_2, r'_3

e gli altri 6 coincidono a 2 a 2 con i lati del trilatero *ikl*.

Dunque: *Le figure ψ coniugate danno due gruppi formati ciascuno da sei triangoli a due a due omologici.*

12. Poichè con le 60 rette di Pascal si possono formare 10 coppie di determinanti come (I) e (II) ed ogni coppia dà luogo a 4 terne di triangoli a due a due tri-omologici, risulta che:

Con le 60 rette di Pascal dell'esagrammo si possono formare 40 terne di triangoli a 2 a 2 tri-omologici; ad ognuna delle 20 rette di Cayley sono associate due terne siffatte.

E ricordando i risultati dei n. 8 e 9 si ha pure che:

Fra i punti d'incontro di due sole rette di Pascal dell'esagrammo ve ne sono 360 che risultano dall'incontro di elementi corrispondenti di orizzontali e verticali nelle 10 coppie di determinanti in cui si possono raggruppare le 60 rette; questi 360 punti stanno a 3 a 3 su 120 rette a, *le quali a 3 a 3 passano per 10 punti* O.

Gli stessi 360 punti sono i vertici delle 10 terne di triangoli tri-omologici, che si possono formare con le 60 rette di Pascal.

Ogni terna di triangoli a 2 a 2 tri-omologici dà luogo a 3 configurazioni 9_3 di Pappo, costituita ciascuna da una terna ciclica di triangoli; una delle coppie,

che si possono formare con i 3 triangoli di una terna va associata ad un terzo triangolo i cui lati sono i 3 assi d'omologia, cioè una retta di Cayley, una retta a ed una delle congiungenti due punti i, k, l, m, n, p. Dunque:

Le 60 rette di Pascal, le 20 rette di Cayley, le 15 congiungenti i punti fondamentali a 2 a 2 e le 120 rette a *costituiscono 120 Cfr.* 9_3 *di Pappo.*

13. I punti d'incontro di tutte le rette di (I) con quelle di (II) e che non cadono in punti D si distinguono in due gruppi: 1° i punti d'incontro delle coppie di lati corrispondenti nei trilateri rappresentati da due orizzontali o da due verticali omologhe; questi 9 punti sono a 3 a 3 sulle 6 rette $r_1, r_2, r_3; r'_1, r'_2, r'_3$ (n. 10); 2° i punti d'incontro delle coppie non corrispondenti di lati di trilateri rappresentati da orizzontali o verticali non omonime. Poichè i 6 punti d'incontro dei lati non corrispondenti in due trilateri prospettivi sono su una conica, i 36 punti di cui si tratta stanno a 6 a 6 su 12 coniche, le quali a 2 a 2 passano per i 36 punti.

Inoltre, le coppie di orizzontali o verticali omologhe dànno triangoli omologici in 3 modi, gli assi d'omologia essendo due lati dei triangoli ikl, mnp ed una retta r ed r'.

Si conchiude quindi che:

Dei punti d'incontro di due sole rette di Pascal dell'esagrammo ve ne sono 360 situate a 6 a 6 su 120 coniche, le quali a 2 a 2 passano per i 360 punti; le 60 rette di Pascal, le 15 congiungenti i punti fondamentali a due a due e le 60 rette r, r' *danno 60 configurazioni* 9_3 *di Pappo.*

14. La rappresentazione delle 60 rette di Pascal in coppie di determinanti come (I) e (II) ci dà anche il mezzo di dedurre molto semplicemente il gruppo G_{72} di Veronese (v. 41) ed i suoi sottogruppi.

Osserviamo che la sostituzione $S \equiv (mnp)$ opera lo scambio ciclico delle orizzontali e l'altra $T \equiv (ikl)$ opera lo scambio ciclico delle verticali. Così otteniamo i primi sottogruppi del gruppo delle figure ψ:

$$G_3 \equiv (1, S, S^2) \quad ; \quad G'_3 \equiv (1, T, T^2)$$

$$G_9 \equiv (1, S, S^2, T, T^2, ST, ST^2, S^2T, S^2T^2).$$

La sostituzione $Q \equiv (im)(kn)(lp)$ muta le orizzontali di (I) nelle verticali, e lo stesso per (II). In tal modo si ha il gruppo $G_{18} \equiv (G_9, Q)$ che muta in sè stesso l'insieme delle rette di ciascuna delle due figure ψ coniugate.

La sostituzione $R \equiv (im)(kpln)$ muta le orizzontali di (I) nelle verticali di (II) e viceversa, e si ottiene il gruppo $G_{36} \equiv (G_{18}, R)$.

Finalmente, la sostituzione $R' \equiv (np)$ muta le orizzontali di (I) nelle orizzontali di (II), e così si ottiene il gruppo $G_{72} \equiv (G_{36}, R')$ del Veronese.

Questo gruppo, non solo muta in sè stessa una coppia coniugata di rette di Cayley, ma ancora tutta la figura costituita dalle 18 rette (I) e (II).

15. I punti D, che si trovano sulle rette di (I) e (II) si distinguono, come abbiamo visto (n. 1) in due categorie: quelli della prima categoria sono raggruppati nei determinanti (a) ed (a') e quelli della seconda nei determinanti (b) e (b). I primi sono stati già utilizzati nello studio delle figure (I) e (II); restano quelli di deter-

minanti (b) e (b') cioè:

$$(b)\quad \begin{vmatrix} \binom{kp}{ln} & \binom{lp}{in} & \binom{ip}{kn} \\ \binom{km}{lp} & \binom{lm}{ip} & \binom{im}{kp} \\ \binom{kn}{lm} & \binom{ln}{im} & \binom{in}{km} \end{vmatrix} ; \qquad (b')\quad \begin{vmatrix} \binom{kn}{lp} & \binom{ln}{ip} & \binom{in}{kp} \\ \binom{kp}{lm} & \binom{lp}{im} & \binom{ip}{km} \\ \binom{km}{ln} & \binom{lm}{in} & \binom{im}{kn} \end{vmatrix} .$$

Or bene, questi 18 punti *costituiscono due figure* ψ *coniugate* (figure di punti, mentre (I) e (II) sono figure di rette).

I termini positivi dello sviluppo di (b) sono:

$$\binom{kn}{lm} \quad \binom{lp}{in} \quad \binom{im}{kp} \qquad \text{sulla retta di Pascal} \quad \binom{knp}{mli}$$

$$\binom{kp}{ln} \quad \binom{lm}{ip} \quad \binom{in}{km} \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \binom{kpm}{nli}$$

$$\binom{km}{lp} \quad \binom{ln}{im} \quad \binom{ip}{kn} \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \binom{kmn}{pli}$$

Queste 3 rette di Pascal corrispondono ai 3 esagoni semplici:

m i n k p l

n i p k m l

p i m k n l

e perciò passano per un punto di Steiner, che si può indicare col simbolo G^{ikl}_{mnp} (gl'indici superiori restano fermi e gl'inferiori si permutano ciclicamente).

I termini negativi invece danno tre triangoli a 2 a 2 omologici:

$$\binom{ip}{kn} \quad \binom{lm}{ip} \quad \binom{kn}{lm}$$

$$\binom{km}{lp} \quad \binom{in}{km} \quad \binom{lp}{in}$$

$$\binom{ln}{im} \quad \binom{kp}{ln} \quad \binom{im}{kp}$$

I vertici corrispondenti sono nelle tre rette di Pascal: $\binom{kmn}{pli}$, $\binom{kpm}{nli}$, $\binom{knp}{mli}$ che sono precisamente quelle ora trovate e che passano per il punto G^{ikl}_{mnp}.

I tre assi d'omologia del 1° e 2°; 2° e 3°; 1° e 3° triangolo, sono rispettivamente le rette di Pascal $\binom{knm}{pli}$, $\binom{kmp}{nli}$, $\binom{kpn}{mli}$, che corrispondono ai 3 esagoni semplici:

p i n k m l

n i m k p l

m i p k n l

e quindi concorrono nel punto di Steiner G^{ikl}_{mpn} coniugato all'altro G^{ikl}_{mnp}.

Similmente si dimostra che:

I termini negativi di (b') danno tre punti D situati nelle rette di Pascal passanti per il punto di Steiner G^{ikl}_{mpn}. I termini positivi invece dànno **3** triangoli a due a due omologici col centro d'omologia comune in G^{ikl}_{mpn} e con i **3** assi d'omologia passanti pel punto di Steiner G^{ikl}_{mnp} coniugato al primo.

Così rimane verificata la prima proprietà delle figure ψ coniugate.

16. *Le orizzontali di* (b) *rappresentano tre triangoli a due a due tri-omologici:* Infatti si hanno le seguenti omologie:

Per la 1ª e la 2ª orizzontale:

$$\left|\begin{array}{ccc|l} \binom{kp}{ln} & \binom{lp}{in} & \binom{ip}{kn} & \text{centro } G^{ikl}_{mnp} \\ \binom{lm}{ip} & \binom{im}{kp} & \binom{km}{lp} & \text{asse } h_{12} \end{array}\right. ; \qquad \left|\begin{array}{ccc|l} \binom{kp}{ln} & \binom{lp}{in} & \binom{ip}{kn} & \text{centro } p \\ \binom{im}{kp} & \binom{km}{lp} & \binom{lm}{ip} & \text{asse } k_{12} \end{array}\right. ,$$

e quindi la 3ª

$$\left|\begin{array}{ccc|l} \binom{kp}{ln} & \binom{lp}{in} & \binom{ip}{kn} & \text{centro } G_{12} \\ \binom{km}{lp} & \binom{lm}{ip} & \binom{im}{kp} & \text{asse } g_{12} \end{array}\right. .$$

Per la 1ª e la 3ª orizzontale:

$$\left|\begin{array}{ccc|l} \binom{kp}{ln} & \binom{lp}{in} & \binom{ip}{kn} & \text{centro } G^{ikl}_{mnp} \\ \binom{in}{km} & \binom{kn}{lm} & \binom{ln}{im} & \text{asse } h_{13} \end{array}\right. ; \qquad \left|\begin{array}{ccc|l} \binom{kp}{ln} & \binom{lp}{in} & \binom{ip}{kn} & \text{centro } n \\ \binom{ln}{im} & \binom{in}{km} & \binom{kn}{lm} & \text{asse } k_{13} \end{array}\right. ,$$

e quindi la 3ª

$$\left|\begin{array}{ccc|l} \binom{kp}{ln} & \binom{lp}{in} & \binom{ip}{kn} & \text{centro } G_{13} \\ \binom{kn}{lm} & \binom{ln}{im} & \binom{in}{km} & \text{asse } g_{13} \end{array}\right. .$$

Per la 2ª e la 3ª orizzontale:

$$\left|\begin{array}{ccc|l} \binom{km}{lp} & \binom{lm}{ip} & \binom{im}{kp} & \text{centro } G^{ikl}_{mnp} \\ \binom{ln}{im} & \binom{in}{km} & \binom{kn}{lm} & \text{asse } h_{23} \end{array}\right. ; \qquad \left|\begin{array}{ccc|l} \binom{km}{lp} & \binom{lm}{ip} & \binom{im}{kp} & \text{centro } m \\ \binom{in}{km} & \binom{kn}{lm} & \binom{ln}{im} & \text{asse } k_{23} \end{array}\right. ,$$

e quindi la 3ª

$$\left|\begin{array}{ccc|l} \binom{km}{lp} & \binom{lm}{ip} & \binom{im}{kp} & \text{centro } G_{23} \\ \binom{kn}{lm} & \binom{ln}{im} & \binom{in}{km} & \text{asse } g_{23} \end{array}\right. .$$

Le verticali di (b) *rappresentano tre triangoli a due a due tri-omologici.*
Infatti si hanno le seguenti omologie:
Per la 1ª e la 2ª verticale:

$$\left|\begin{matrix}\binom{kp}{ln} & \binom{km}{lp} & \binom{kn}{lm}\\ \binom{lm}{ip} & \binom{ln}{im} & \binom{lp}{in}\end{matrix}\right| \begin{matrix}\text{centro } G^{ikl}_{mnp}\\ \text{asse } h'_{12}\end{matrix}\;; \qquad \left|\begin{matrix}\binom{kp}{ln} & \binom{km}{lp} & \binom{kn}{lm}\\ \binom{ln}{im} & \binom{lp}{in} & \binom{lm}{ip}\end{matrix}\right| \begin{matrix}\text{centro } l\\ \text{asse } k'_{12}\end{matrix}\;,$$

e quindi la 3ª

$$\left|\begin{matrix}\binom{kn}{ln} & \binom{km}{lp} & \binom{kn}{lm}\\ \binom{lp}{in} & \binom{lm}{ip} & \binom{ln}{im}\end{matrix}\right| \begin{matrix}\text{centro } G'_{12}\\ \text{asse } g'_{12}\end{matrix}\;.$$

Per la 1ª e la 3ª verticale:

$$\left|\begin{matrix}\binom{kp}{ln} & \binom{km}{lp} & \binom{kn}{lm}\\ \binom{in}{km} & \binom{ip}{kn} & \binom{im}{kp}\end{matrix}\right| \begin{matrix}\text{centro } G^{ikl}_{mnp}\\ \text{asse } h'_{13}\end{matrix}\;; \qquad \left|\begin{matrix}\binom{kp}{ln} & \binom{km}{lp} & \binom{kn}{lm}\\ \binom{im}{kp} & \binom{in}{km} & \binom{ip}{kn}\end{matrix}\right| \begin{matrix}\text{centro } k\\ \text{asse } k'_{13}\end{matrix}\;.$$

e quindi la 3ª

$$\left|\begin{matrix}\binom{kp}{ln} & \binom{km}{lp} & \binom{kn}{lm}\\ \binom{ip}{kn} & \binom{im}{kp} & \binom{in}{km}\end{matrix}\right| \begin{matrix}\text{centro } G'_{13}\\ \text{asse } g'_{13}\end{matrix}\;.$$

Per la 2ª e la 3ª verticale:

$$\left|\begin{matrix}\binom{lp}{in} & \binom{lm}{ip} & \binom{ln}{im}\\ \binom{im}{kp} & \binom{in}{km} & \binom{ip}{kn}\end{matrix}\right| \begin{matrix}\text{centro } G^{ikl}_{mnp}\\ \text{asse } h'_{23}\end{matrix}\;; \qquad \left|\begin{matrix}\binom{lp}{in} & \binom{lm}{ip} & \binom{ln}{im}\\ \binom{in}{km} & \binom{ip}{kn} & \binom{im}{kp}\end{matrix}\right| \begin{matrix}\text{centro } i\\ \text{asse } k'_{23}\end{matrix}\;,$$

e quindi la 3ª

$$\left|\begin{matrix}\binom{lp}{in} & \binom{lm}{ip} & \binom{ln}{im}\\ \binom{ip}{kn} & \binom{im}{kp} & \binom{in}{km}\end{matrix}\right| \begin{matrix}\text{centro } G'_{23}\\ \text{asse } g'_{23}\end{matrix}\;.$$

17. Poichè h_{12}, h_{13}, h_{23} sono assi d'omologia corrispondenti allo stesso centro G^{ikl}_{mnp} concorrono in un punto; lo stesso per $h'_{12}, h'_{13}, h'_{23}$.

I 3 centri d'omologia G_{12}, G_{13}, G_{23} stanno su una retta $o' \equiv g'_{12} \equiv g'_{13} \equiv g'_{23}$.
Infatti i triangoli delle prime due verticali sono omologici nel modo:

$$\left|\begin{matrix}\binom{kp}{ln} & \binom{km}{lp} & \binom{kn}{lm}\\ \binom{lp}{in} & \binom{lm}{ip} & \binom{ln}{im}\end{matrix}\right|$$

col centro d'omologia G'_{12} e con l'asse d'omologia:

$$g'_{12} = \begin{cases} \binom{kp}{ln} \; \binom{km}{lp} \cdot \binom{lp}{in} \; \binom{lm}{ip} \equiv G_{12} \\ \binom{kp}{ln} \; \binom{kn}{lm} \cdot \binom{lp}{in} \; \binom{ln}{im} \equiv G_{13} \\ \binom{km}{lp} \; \binom{kn}{lm} \cdot \binom{lm}{ip} \; \binom{ln}{im} \equiv G_{23} \end{cases}$$

Sicchè g'_{12} contiene i tre punti G_{12}, G_{13}, G_{23}.

Considerando invece la 1ª e la 3ª verticale si trova $g'_{13} \equiv G_{12}G_{13}G_{23}$ e considerando la 2ª e la 3ª verticale si trova $g'_{13} \equiv G_{12}G_{23}G_{13}$.

Allo stesso modo si dimostra che $G'_{12}\,G'_{13}\,G'_{12}$ stanno su un' altra retta: $o \equiv g_{12} \equiv g_{13} \equiv g_{23}$. Dunque:

I triangoli rappresentati dalle orizzontali di (b) *sono a due a due prospettivi secondo tre centri che sono su una retta, asse di prospettiva comune dei tre triangoli rappresentati dalle verticali, e viceversa.*

18. Il determinante (b') si tratta come (b) e si trova che:

Le orizzontali costituiscono 3 triangoli a due a due tri-omologici; i centri d'omologia sono: 1.° G^{ikl}_{mpn}; 2.° i tre punti m, n, p; *3.° i tre punti* (G_{ik}) *situati su una retta* (o′) *nella quale coincidono i tre assi d'omologia dei tre triangoli rappresentati dalle verticali.*

Le verticali costituiscono tre triangoli a due a due tri-omologici; i centri di omologia sono: 1.° G^{ikl}_{mpn}; 2.° i tre punti i, k, l; *3.° i tre punti* (G'_{ik}) *su una retta* (o) *nella quale coincidono i tre assi d'omologia dei triangoli rappresentati dalle orizzontali.*

19. *Due orizzontali o verticali omonime di* (b) *e* (b′) *rappresentano triangoli tri-omologici. Due orizzontali o verticali non omonime rappresentano triangoli semplicemente omologici.*

Infatti, tenendo presente i determinanti (b) e (b') si osservano le seguenti omologie:

1° Per le orizzontali corrispondenti:

$$\left|\begin{matrix} \binom{kp}{ln} & \binom{lp}{in} & \binom{ip}{kn} \\ \binom{ln}{ip} & \binom{in}{kp} & \binom{kn}{lp} \end{matrix}\right| \text{ centro } n \; ; \qquad \left|\begin{matrix} \binom{kp}{ln} & \binom{lp}{in} & \binom{ip}{kn} \\ \binom{in}{kp} & \binom{kn}{lp} & \binom{ln}{ip} \end{matrix}\right| \text{ centro } p \; ;$$

$$\left|\begin{matrix} \binom{kp}{ln} & \binom{lp}{in} & \binom{ip}{kn} \\ \binom{kn}{lp} & \binom{ln}{ip} & \binom{in}{kp} \end{matrix}\right| \text{ centro } O_1 \; .$$

$$\left|\begin{matrix} \binom{km}{lp} & \binom{lm}{ip} & \binom{im}{kp} \\ \binom{lp}{im} & \binom{ip}{km} & \binom{kp}{lm} \end{matrix}\right| \text{ centro } p \; ; \qquad \left|\begin{matrix} \binom{km}{lp} & \binom{lm}{ip} & \binom{im}{kp} \\ \binom{ip}{km} & \binom{kp}{lm} & \binom{lp}{im} \end{matrix}\right| \text{ centro } m \; ;$$

$$\left|\begin{matrix} \binom{km}{lp} & \binom{lm}{ip} & \binom{im}{kp} \\ \binom{kp}{lm} & \binom{lp}{im} & \binom{ip}{km} \end{matrix}\right| \text{ centro } O_2 \; .$$

$$\left|\begin{matrix} \binom{kn}{lm} & \binom{ln}{im} & \binom{in}{km} \\ \binom{lm}{in} & \binom{im}{kn} & \binom{km}{ln} \end{matrix}\right| \text{ centro } m \; ; \qquad \left|\begin{matrix} \binom{kn}{lm} & \binom{ln}{im} & \binom{in}{km} \\ \binom{im}{kn} & \binom{km}{ln} & \binom{lm}{in} \end{matrix}\right| \text{ centro } n \; ;$$

$$\left|\begin{matrix} \binom{kn}{lm} & \binom{ln}{im} & \binom{in}{km} \\ \binom{km}{ln} & \binom{lm}{in} & \binom{im}{kn} \end{matrix}\right| \text{ centro } O_3 \; .$$

2.° Per le verticali corrispondenti:

$$\left|\begin{matrix} \binom{kp}{ln} & \binom{km}{lp} & \binom{kn}{lm} \\ \binom{kp}{lm} & \binom{km}{ln} & \binom{kn}{lp} \end{matrix}\right| \text{ centro } k \; ; \qquad \left|\begin{matrix} \binom{kp}{ln} & \binom{km}{lp} & \binom{kn}{lm} \\ \binom{km}{ln} & \binom{kn}{lp} & \binom{kp}{lm} \end{matrix}\right| \text{ centro } l \; ;$$

$$\left|\begin{matrix} \binom{kp}{ln} & \binom{km}{lp} & \binom{kn}{lm} \\ \binom{kn}{lp} & \binom{kp}{lm} & \binom{km}{ln} \end{matrix}\right| \text{ centro } O'_1 \; .$$

$$\left|\begin{matrix} \binom{lp}{in} & \binom{lm}{ip} & \binom{ln}{im} \\ \binom{lp}{im} & \binom{lm}{in} & \binom{ln}{ip} \end{matrix}\right| \text{ centro } l \; ; \qquad \left|\begin{matrix} \binom{lp}{in} & \binom{lm}{ip} & \binom{ln}{im} \\ \binom{lm}{in} & \binom{ln}{ip} & \binom{lp}{im} \end{matrix}\right| \text{ centro } i \; ;$$

$$\left|\begin{matrix} \binom{lp}{in} & \binom{lm}{ip} & \binom{ln}{im} \\ \binom{ln}{ip} & \binom{lp}{im} & \binom{lm}{in} \end{matrix}\right| \text{ centro } O'_2 \; .$$

$$\left|\begin{matrix} \binom{ip}{kn} & \binom{im}{kp} & \binom{in}{km} \\ \binom{ip}{km} & \binom{im}{kn} & \binom{in}{kp} \end{matrix}\right| \text{ centro } i \; ; \qquad \left|\begin{matrix} \binom{ip}{kn} & \binom{im}{kp} & \binom{in}{km} \\ \binom{im}{kn} & \binom{in}{kp} & \binom{ip}{km} \end{matrix}\right| \text{ centro } k \; ;$$

$$\left|\begin{matrix} \binom{ip}{kn} & \binom{im}{kp} & \binom{in}{km} \\ \binom{in}{kp} & \binom{ip}{km} & \binom{im}{kn} \end{matrix}\right| \text{ centro } O'_3 \; .$$

Tanto per le orizzontali quanto per le verticali, le prime due omologie si verificano immediatamente, la terza se ne deduce in virtù del teorema di Rosanes-Schröter.

3.° Per le orizzontali non corrispondenti:

$$\left|\begin{matrix} \binom{kp}{ln} & \binom{lp}{in} & \binom{ip}{kn} \\ \binom{km}{ln} & \binom{lm}{in} & \binom{im}{kn} \end{matrix}\right| \text{ centro } n \; ; \qquad \left|\begin{matrix} \binom{kp}{ln} & \binom{lp}{in} & \binom{ip}{kn} \\ \binom{kp}{lm} & \binom{lp}{im} & \binom{ip}{km} \end{matrix}\right| \text{ centro } p \; ;$$

$$\begin{vmatrix} \binom{km}{lp} & \binom{lm}{ip} & \binom{im}{kp} \\ \binom{kn}{lp} & \binom{ln}{ip} & \binom{in}{kp} \end{vmatrix} \text{ centro } p \; ; \qquad \begin{vmatrix} \binom{km}{lp} & \binom{lm}{ip} & \binom{im}{kp} \\ \binom{km}{ln} & \binom{lm}{in} & \binom{im}{kn} \end{vmatrix} \text{ centro } m \; ;$$

$$\begin{vmatrix} \binom{kn}{lm} & \binom{ln}{im} & \binom{in}{km} \\ \binom{kn}{lp} & \binom{ln}{ip} & \binom{in}{kp} \end{vmatrix} \text{ centro } l \; ; \qquad \begin{vmatrix} \binom{kn}{lm} & \binom{ln}{im} & \binom{in}{km} \\ \binom{kp}{lm} & \binom{lp}{im} & \binom{ip}{km} \end{vmatrix} \text{ centro } m \; .$$

4.° Per le verticali non corrispondenti:

$$\begin{vmatrix} \binom{kp}{ln} & \binom{km}{lp} & \binom{kn}{lm} \\ \binom{ln}{ip} & \binom{lp}{im} & \binom{lm}{in} \end{vmatrix} \text{ centro } l \; ; \qquad \begin{vmatrix} \binom{kp}{ln} & \binom{km}{lp} & \binom{kn}{lm} \\ \binom{in}{kp} & \binom{ip}{km} & \binom{im}{kn} \end{vmatrix} \text{ centro } k \; ;$$

$$\begin{vmatrix} \binom{lp}{in} & \binom{lm}{ip} & \binom{ln}{im} \\ \binom{kn}{lp} & \binom{kp}{lm} & \binom{km}{ln} \end{vmatrix} \text{ centro } l \; ; \qquad \begin{vmatrix} \binom{lp}{in} & \binom{lm}{ip} & \binom{ln}{im} \\ \binom{in}{kp} & \binom{ip}{km} & \binom{im}{kn} \end{vmatrix} \text{ centro } i \; ;$$

$$\begin{vmatrix} \binom{ip}{kn} & \binom{im}{kp} & \binom{in}{km} \\ \binom{kn}{lp} & \binom{kp}{lm} & \binom{km}{ln} \end{vmatrix} \text{ centro } k \; ; \qquad \begin{vmatrix} \binom{ip}{kn} & \binom{im}{kn} & \binom{in}{km} \\ \binom{ln}{ip} & \binom{lp}{im} & \binom{lm}{in} \end{vmatrix} \text{ centro } i \; .$$

20. Con i **45** punti D si possono formare **10** coppie di determinanti come (b) e (b'); ogni coppia dà luogo a **4** terne di triangoli a due a due tri-omologici ed a due sestuple di triangoli a due a due omologici; dunque:

Con i 45 punti D *dell'esagrammo si possono formare 40 terne di triangoli a due a due tri-omologici e 20 sestuple di triangoli a due a due omologici.*

E ricordando i risultati dei numeri **16** e **17**:

Fra le rette congiungenti due soli punti D *ve ne sono 360 che risultano dall'incontro di elementi corrispondenti di orizzontali e verticali nelle dieci coppie di determinanti nelle quali si possono raggruppare i 45 punti* D; *queste 360 rette concorrono a tre a tre in 120 punti, che a tre a tre stanno su 40 rette* o. *Le stesse 360 rette sono i lati delle 40 terne di triangoli, che si possono formare con i 45 punti* D.

21. Ogni terna di triangoli a due a due tri-omologici dà **3** Cfr. 9_3 di Pappo; una delle coppie, che si possono formare con i **3** triangoli viene associata ad un terzo triangolo i cui vertici sono i tre centri d'omologia, cioè un punto di Steiner, uno dei **6** punti fondamentali ed un punto G_{ik}.

Da ciò risulta che: *I 45 punti* D, *i 20 punti di Steiner, i 6 punti fondamentali ed i 120 punti* G_{ik} *costituiscono 120 configurazioni* 9_3 *di Pappo.*

22. Disposte le **60** rette di Pascal ed i **45** punti D nelle **10** coppie di determinanti come (I) e (II), oppure (b) e (b'), dal paragone delle figure ψ appartenenti a coppie diverse, si possono ricavare altre moltissime proprietà, che riguardano le rette di Steiner-Plücker, i punti di Salmon, le figure π del Veronese ecc.

§ 2.

Le figure ψ nella configurazione armonica.

23. La nuova notazione degli elementi della configurazione armonica (v. 76 e 77) ci permette di ricavare un insieme di proprietà nuove, che si connettono alle figure ψ.

Le 32 rette a sulle quali a tre a tre giacciono i punti fondamentali, si possono distribuire nei due determinanti:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix} \qquad \Delta' \equiv \begin{vmatrix} a^{11}a^{12}a^{13}a^{14} \\ a^{21}a^{22}a^{23}a^{24} \\ a^{31}a^{32}a^{33}a^{34} \\ a^{41}a^{42}a^{43}a^{44} \end{vmatrix}$$

I 12 termini positivi dello sviluppo di Δ rappresentano i 12 punti d'incontro delle rette a_{ij} a quattro a quattro (vertici del 1° sistema desmico):

$$\begin{cases} A_{1234} \equiv a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \\ A_{1342} \equiv a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} \\ A_{1423} \equiv a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \end{cases} \quad \begin{cases} A_{2143} \equiv a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \\ A_{2431} \equiv a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\ A_{2314} \equiv a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \end{cases} \quad \begin{cases} A_{3412} \equiv a_{13}a_{24}a_{34}a_{42} \\ A_{3124} \equiv a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} \\ A_{3241} \equiv a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} \end{cases} \quad \begin{cases} A_{4321} \equiv a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \\ A_{4213} \equiv a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ A_{4132} \equiv a_{14}a_{21}a_{23}a_{42} \end{cases}$$

La permutazione dei primi indici delle a è la permutazione principale, le permutazioni dei secondi indici sono le 12 permutazioni pari, compresa la principale.

I 12 termini negativi dello sviluppo di Δ' rappresentano i 12 punti d'incontro delle rette a^{ij} a quattro a quattro (vertici del 2° sistema desmico):

$$\begin{cases} A_{1243} \equiv a^{11}a^{22}a^{34}a^{43} \\ A_{1432} \equiv a^{11}a^{24}a^{33}a^{42} \\ A_{1324} \equiv a^{11}a^{23}a^{32}a^{40} \end{cases} \quad \begin{cases} A_{2134} \equiv a^{12}a^{21}a^{33}a^{44} \\ A_{2341} \equiv a^{12}a^{23}a^{34}a^{41} \\ A_{2413} \equiv a^{12}a^{24}a^{31}a^{43} \end{cases} \quad \begin{cases} A_{3421} \equiv a^{13}a^{24}a^{32}a^{41} \\ A_{3214} \equiv a^{13}a^{22}a^{31}a^{44} \\ A_{3142} \equiv a^{13}a^{21}a^{34}a^{42} \end{cases} \quad \begin{cases} A_{4312} \equiv a^{14}a^{22}a^{31}a^{42} \\ A_{4123} \equiv a^{14}a^{21}a^{32}a^{43} \\ A_{4231} \equiv a^{14}a^{22}a^{23}a^{41} \end{cases}$$

La permutazione dei primi indici è 1234, le permutazioni dei secondi indici sono le 12 permutazioni dispari.

In tal modo i 24 punti fondamentali sono rappresentati mediante le 24 permutazioni di 4 elementi. Partendo dai 3 punti: A_{1234}, A_{1342}, A_{1423} ed operando sugli indici le sostituzioni del gruppo anarmonico si hanno i 3 tetraedri (o quadrangoli) desmici del 1° sistema (punti disposti sulle 3 orizzontali). Partendo dai punti: A_{1243}, A_{1432}, A_{1324} si ricavano in maniera analoga i 3 tetraedri (o quadrangoli) desmici del 2° sistema.

I 24 punti A e le 32 rette a^{ij}, a_{ij} costituiscono una Cfr. $(24_4\, 32_3)$ di punti e rette.

Ad ogni sottogruppo del gruppo totale di sostituzioni su 4 elementi corrisponde un raggruppamento notevole degli elementi della configurazione armonica. Per esempio, operando le sostituzioni di un sottogruppo ciclico sulla permutazione di un punto A_{iklm} si ottiene il gruppo armonico dei 4 punti situati su una delle 18 rette, spigoli dei tetraedri dei due sistemi desmici, e così via.

I 18 spigoli dei tetraedri dei sistemi desmici (*rette diagonali* della configurazione) sono:

$1 \equiv A_{1234}A_{2143}A_{3421}A_{4312}$	$4 \equiv A_{1342}A_{2431}A_{3214}A_{4123}$	$7 \equiv A_{1423}A_{2314}A_{3142}A_{4231}$
$2 \equiv A_{1234}A_{2341}A_{3412}A_{4123}$	$5 \equiv A_{1342}A_{2413}A_{3124}A_{4231}$	$8 \equiv A_{1423}A_{2134}A_{3241}A_{4312}$
$3 \equiv A_{1234}A_{2413}A_{3142}A_{4321}$	$6 \equiv A_{1342}A_{2134}A_{3421}A_{4213}$	$9 \equiv A_{1423}A_{2341}A_{3214}A_{4132}$
$10 \equiv A_{1243}A_{2134}A_{3412}A_{4321}$	$13 \equiv A_{1432}A_{2341}A_{3124}A_{4213}$	$16 \equiv A_{1324}A_{2413}A_{3241}A_{4132}$
$11 \equiv A_{1243}A_{2314}A_{3421}A_{4132}$	$14 \equiv A_{1432}A_{2143}A_{3214}A_{4321}$	$17 \equiv A_{1324}A_{2431}A_{3142}A_{4213}$
$12 \equiv A_{1243}A_{2431}A_{3124}A_{4312}$	$15 \equiv A_{1432}A_{2314}A_{3241}A_{4123}$	$18 \equiv A_{1324}A_{2143}A_{3412}A_{4231}$

I 12 punti *pari* ed i 12 punti *dispari* con le 18 rette precedenti formano due Cfr. $(12_3\, 18_4)$ coniugate.

Aggiungiamo ancora il quadro delle rette a_{ij}:

$a_{11} \equiv A_{1234}A_{1342}A_{1423}$	$a_{21} \equiv A_{2143}A_{3124}A_{4132}$
$a_{12} \equiv A_{2143}A_{2431}A_{2314}$	$a_{22} \equiv A_{1234}A_{3241}A_{4213}$
$a_{13} \equiv A_{3412}A_{3124}A_{3241}$	$a_{23} \equiv A_{1342}A_{2314}A_{4321}$
$a_{14} \equiv A_{4321}A_{4213}A_{4132}$	$a_{24} \equiv A_{1423}A_{2431}A_{3412}$
$a_{31} \equiv A_{2314}A_{3412}A_{4213}$	$a_{41} \equiv A_{2431}A_{3241}A_{4321}$
$a_{32} \equiv A_{1423}A_{3124}A_{4321}$	$a_{42} \equiv A_{1342}A_{3412}A_{4132}$
$a_{33} \equiv A_{1234}A_{2431}A_{4132}$	$a_{43} \equiv A_{1423}A_{2143}A_{4213}$
$a_{34} \equiv A_{1342}A_{2143}A_{3241}$	$a_{44} \equiv A_{1234}A_{2314}A_{3124}$

Per avere i 3 punti situati su una retta a_{ik} basta trovare fra le permutazioni pari di 4 elementi quelle che hanno k all'i^{mo} posto.

24. Premesso questo, dimostreremo che: *la figura di nove rette* a *rappresentate da un minore del 3° ordine di* Δ *o* Δ' *costituisce una figura* ψ.

A tal uopo consideriamo il minore:

$$\Delta_{11} \equiv \begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix}$$

aggiunto di a_{11} in Δ.

1.° I termini positivi dello sviluppo di Δ_{11}, cioè:

$$a_{22}a_{33}a_{44}$$
$$a_{24}a_{32}a_{43}$$
$$a_{23}a_{34}a_{42}$$

rappresentano tre terne di rette concorrenti rispettivamente nei punti: A_{1234}, A_{1423}, A_{1342} situati su a_{11}.

2.° I termini negativi:

$$a_{24}a_{33}a_{42}$$
$$a_{32}a_{44}a_{23}$$
$$a_{43}a_{22}a_{34}$$

dànno tre trilateri a due a due prospettivi, con l'asse comune a_{11}.

3.° I trilateri rappresentati dalle orizzontali sono a due a due tri-omologici:

$$\left|\begin{matrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{33}a_{34}a_{32} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse } a_{11} \\ \text{centro } \mathrm{A}^{11}_{23} \end{matrix} ; \quad \left|\begin{matrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{34}a_{32}a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse } a_{41} \\ \text{centro } \mathrm{A}^{41}_{23} \end{matrix} ; \quad \left|\begin{matrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse } s_{23} \\ \text{centro } \mathrm{S}_{23} \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{43}a_{44}a_{42} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse } a_{31} \\ \text{centro } \mathrm{A}^{(31)}_{24} \end{matrix} ; \quad \left|\begin{matrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{44}a_{42}a_{43} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse } a_{11} \\ \text{centro } \mathrm{A}^{11}_{34} \end{matrix} ; \quad \left|\begin{matrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse } s_{24} \\ \text{centro } \mathrm{S}_{24} \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{43}a_{44}a_{42} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse } a_{11} \\ \text{centro } \mathrm{A}^{11}_{34} \end{matrix} ; \quad \left|\begin{matrix} a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{44}a_{42}a_{43} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse } a_{12} \\ \text{centro } \mathrm{A}^{(21)}_{34} \end{matrix} ; \quad \left|\begin{matrix} a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse } s_{34} \\ \text{centro } \mathrm{S}_{34} \end{matrix}$$

4.° I trilateri rappresentati dalle verticali sono a due a due tri-omologici:

$$\left|\begin{matrix} a_{22}a_{32}a_{42} \\ a_{33}a_{43}a_{23} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse } a_{11} \\ \text{centro } (\mathrm{A}^{11}_{23}) \end{matrix} ; \quad \left|\begin{matrix} a_{22}a_{32}a_{42} \\ a_{43}a_{23}a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse } a_{21} \\ \text{centro } (\mathrm{A}^{21}_{23}) \end{matrix} ; \quad \left|\begin{matrix} a_{22}a_{32}a_{42} \\ a_{23}a_{33}a_{43} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse } s'_{23} \\ \text{centro } \mathrm{S}'_{23} \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} a_{22}a_{32}a_{42} \\ a_{34}a_{44}a_{24} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse } a_{13} \\ \text{centro } (\mathrm{A}^{13}_{14}) \end{matrix} ; \quad \left|\begin{matrix} a_{22}a_{32}a_{42} \\ a_{44}a_{24}a_{34} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse } a_{11} \\ \text{centro } (\mathrm{A}^{11}_{24}) \end{matrix} ; \quad \left|\begin{matrix} a_{22}a_{32}a_{42} \\ a_{24}a_{34}a_{44} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse } s'_{24} \\ \text{centro } \mathrm{S}'_{24} \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} a_{23}a_{33}a_{43} \\ a_{34}a_{44}a_{24} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse } a_{11} \\ \text{centro } (\mathrm{A}^{11}_{34}) \end{matrix} ; \quad \left|\begin{matrix} a_{23}a_{33}a_{43} \\ a_{44}a_{24}a_{34} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse } a_{12} \\ \text{centro } (\mathrm{A}^{12}_{34}) \end{matrix} ; \quad \left|\begin{matrix} a_{23}a_{33}a_{43} \\ a_{24}a_{34}a_{44} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse } s'_{34} \\ \text{centro } \mathrm{S}'_{34} \end{matrix}$$

tanto per le orizzontali quanto per le verticali le prime due omologie sono di verifica immediata e la terza se ne deduce per il solito teorema di **Rosanes-Schröter**.

25. Anche qui è facile dimostrare che i 3 centri d'omologia $\mathrm{S}'_{23}, \mathrm{S}'_{24}, \mathrm{S}'_{34}$ coincidono in un punto S′ ed i 3 centri $\mathrm{S}_{23}, \mathrm{S}_{24}, \mathrm{S}_{34}$ in un altro punto S.

Infatti:

s_{23} contiene i punti $a_{22}a_{32}$; $a_{23}a_{33}$; $a_{24}a_{34}$

s_{24} » » $a_{22}a_{42}$; $a_{23}a_{43}$; $a_{24}a_{44}$

s_{34} » » $a_{32}a_{42}$; $a_{33}a_{43}$; $a_{34}a_{44}$

I triangoli rappresentati dalle prime due verticali sono omologici:

$$\left|\begin{matrix} a_{22}a_{32}a_{42} \\ a_{23}a_{33}a_{43} \end{matrix}\right| \text{asse } s'_{23} \quad , \quad \text{centro} \left\{\begin{matrix} a_{22}a_{32} \cdot a_{23}a_{33} \\ a_{22}a_{42} \cdot a_{23}a_{43} \equiv \mathrm{S}' \\ a_{32}a_{42} \cdot a_{33}a_{43} \end{matrix}\right.$$

Ove $S' \equiv S'_{23} \equiv S'_{24} \equiv S'_{34} \equiv$ punto d'incontro delle s_{23}, s_{24}, s_{34}.

Similmente si dimostra che $s'_{23}, s'_{24}, s'_{34}$ concorrono in un punto $S \equiv S_{23} \equiv S_{24} \equiv S_{34}$.

Dunque: *Le 3 rette* s_{23}, s_{24}, s_{34} *concorrono in un punto* S' *centro d'omologia comune dei 3 trilateri rappresentati dalle verticali; le 3 rette* s_{23}, s_{24}, s_{34} *concorrono in un punto* S *centro d'omologia comune dei trilateri rappresentati dalle orizzontali.*

26. Consideriamo le due coppie di trilateri omologici:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{22}a_{23}a_{24} \end{vmatrix}$$

appartenenti alle due figure ψ associate agli elementi di a_{44}, a_{41}. I due assi d'omologia hanno due punti comuni $a_{12}a_{22}, a_{13}a_{23}$ e quindi coincidono. Cioè i 4 punti d'incontro delle rette corrispondenti delle prime due orizzontali di Δ stanno in linea retta.

Ripetendo lo stesso ragionamento per le altre cinque coppie di orizzontali di Δ si deduce che:

I quattro punti d'incontro delle rette corrispondenti in ciascuna delle 6 coppie possibili di orizzontali di Δ stanno in linea retta. Si hanno così 6 rette $s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{23}, s_{24}, s_{34}$ che sono lati di un quadrangolo completo i cui vertici sono il punto S' (v. 25) e gli altri 3 punti analoghi che si ottengono considerando le altre figure ψ corrispondenti agli elementi della 2ª, 3ª, 4ª orizzontale.

Analogamente: i 4 punti d'incontro delle rette corrispondenti in ciascuna delle 6 coppie possibili di verticali stanno in linea retta. Si hanno così 6 rette $s'_{12}, s'_{13}, s'_{14}, s'_{23}, s'_{24}, s'_{34}$ lati di un quadrangolo completo i cui vertici sono il punto S e gli altri 3 punti analoghi, che si ottengono considerando le altre figure ψ corrispondenti agli elementi della 2ª, 3ª e 4ª verticale.

27. Il determinante Δ' si tratta come Δ, però le figure ψ che se ne ricavano non sono coniugate alle figure ψ di Δ.

Ogni coppia di triangoli di una terna di una figura ψ dà luogo ad una Cfr. 9_3; il 3° triangolo (dei 3 assi d'omologia) è formato da due rette a_{ik} e da una retta s, oppure da due rette a^{ik} e da una retta (s). Ogni aggiunto di un termine a_{ik} di Δ dà 6 configurazioni 9_3, ma ogni coppia di triangoli appartiene agli aggiunti di due termini di Δ o Δ', dunque:

Le 33 rette a_{ik}, a^{ik} e le 24 rette s dànno 96 configurazioni 9_3; 48 per la figura formata dalle a_{ik} ed altre 48 per la figura formata dalle a^{ik}.

28. Fissato l'elemento a_{ik} di Δ si considerino le altre 3 rette della orizzontale i^{ma} e le altre 3 rette della verticale k^{ma}; si avranno due trilateri tangenti ad una stessa conica H_{ik} (nella figura spaziale si avrebbero due terne incidenti di rette di un'iperboloide). Così si hanno 32 coppie di trilateri, che corrispondono, nella figura spaziale, ai 32 iperboloidi H_{ik} del Veronese (v. 52). Ogni coppia è associata ad una figura ψ, quella costituita dall'aggiunto di a_{ik} in Δ o di a^{ik} in Δ'.

Per esempio, alla figura ψ già studiata, cioè Δ_{11}, si associa la coppia di trilateri $a_{12}a_{13}a_{14}, a_{21}a_{31}a_{41}$ circoscritti ad una stessa conica. Formiamo i due determinanti

(I) e (II) relativi a questa coppia:

$$(\mathrm{I})\quad \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{31}a_{41} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{13}a_{14}a_{12} \\ a_{21}a_{31}a_{41} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{14}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{31}a_{41} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{31}a_{41}a_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{13}a_{14}a_{12} \\ a_{31}a_{41}a_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{14}a_{12}a_{13} \\ a_{31}a_{41}a_{21} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{41}a_{21}a_{31} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{13}a_{14}a_{12} \\ a_{41}a_{21}a_{31} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{14}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{31}a_{41} \end{pmatrix} \end{vmatrix} \qquad (\mathrm{II})\quad \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{41}a_{31} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{13}a_{14}a_{12} \\ a_{21}a_{41}a_{31} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{14}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{41}a_{31} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{31}a_{21}a_{41} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{13}a_{14}a_{12} \\ a_{31}a_{21}a_{41} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{14}a_{12}a_{13} \\ a_{31}a_{21}a_{41} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{41}a_{31}a_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{13}a_{14}a_{12} \\ a_{41}a_{31}a_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{14}a_{12}a_{13} \\ a_{41}a_{31}a_{21} \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

Essi rappresentano due figure ψ coniugate, costituite da 18 punti di Brianchon dall'esalatero formato dai due triangoli $a_{12}a_{13}a_{14}$, $a_{21}a_{31}a_{41}$. Tali figure ci fornirebbero tutto un gruppo di proprietà nuove della configurazione armonica. Sono però più interessanti le proprietà che si ricavano considerando le figure ψ costituite dalle rette d (duali dei punti D), che dànno le due rette di Steiner coniugate (duali dei punti di Steiner).

Formiamo perciò i determinanti (b), (b') corrispondenti ad (I) e (II):

$$(b)\quad \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} a_{13}a_{41} \\ a_{31}a_{14} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{14}a_{41} \\ a_{31}a_{12} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{12}a_{41} \\ a_{31}a_{13} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{13}a_{21} \\ a_{14}a_{41} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{14}a_{21} \\ a_{41}a_{12} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{12}a_{21} \\ a_{41}a_{13} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{13}a_{31} \\ a_{21}a_{14} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{14}a_{31} \\ a_{21}a_{12} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{12}a_{41} \\ a_{31}a_{13} \end{pmatrix} \end{vmatrix} \qquad (b')\quad \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} a_{13}a_{31} \\ a_{14}a_{41} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{14}a_{31} \\ a_{12}a_{41} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{12}a_{31} \\ a_{13}a_{41} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{13}a_{41} \\ a_{14}a_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{14}a_{41} \\ a_{12}a_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{12}a_{41} \\ a_{13}a_{21} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{13}a_{21} \\ a_{14}a_{31} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{14}a_{21} \\ a_{12}a_{31} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{12}a_{21} \\ a_{14}a_{31} \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

Ora, si vede subito che il determinante (b) ha per elementi le rette a_{ik} dell'aggiunto di a_{11} in $\Delta \left[\begin{pmatrix} a_{13}a_{41} \\ a_{31}a_{14} \end{pmatrix} \equiv A_{3241}A_{4213} \equiv a_{22} ; \begin{pmatrix} a_{14}a_{41} \\ a_{31}a_{12} \end{pmatrix} \equiv A_{4321}A_{2314} \equiv a_{23} \text{ ecc.} \right]$.

Dunque (b) coincide col determinante

$$\Delta_{11} \equiv \begin{vmatrix} a_{22}a_{32}a_{42} \\ a_{23}a_{33}a_{43} \\ a_{24}a_{34}a_{44} \end{vmatrix}$$

Da ciò risulta che la figura ψ coniugata a Δ_{11} non è Δ^{11}, ma la (b'), che ha per elementi nove delle 18 *rette diagonali*, cioè

$$\begin{vmatrix} A_{3412}A_{4321} & A_{4213}A_{2431} & A_{2314}A_{3241} \\ A_{3241}A_{4132} & A_{4321}A_{2143} & A_{2431}A_{3124} \\ A_{3124}A_{4213} & A_{4132}A_{2314} & A_{2143}A_{3412} \end{vmatrix} \equiv \delta_{11}$$

E ricordando la notazione del n. 23:

$$\begin{vmatrix} 10 & 17 & 15 \\ 16 & 14 & 12 \\ 13 & 11 & 18 \end{vmatrix} \equiv \delta_{11}$$

se si scambiano gli indici inferiori in superiori si trova che la figura ψ coniugata alla:

$$\Delta^{11} \equiv \begin{vmatrix} a^{22}a^{32}a^{42} \\ a^{23}a^{33}a^{43} \\ a^{24}a^{34}a^{44} \end{vmatrix}$$

è formata dalle altre 9 *rette diagonali*

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 7 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & 3 \end{vmatrix} \equiv \delta^{11}$$

29. Abbiamo visto (v. 24) che i termini positivi di Δ_{11} rappresentano 3 terne di rette concorrenti nei punti: A_{1234}, A_{1342}, A_{1423} di a_{11} e che i 3 trilateri rappresentati dai termini negativi sono a 2 a 2 omologici con l'asse comune a_{21}; ora possiamo aggiungere che i 3 centri d'omologia sono i punti in cui concorrono le terne di rette di δ_{11} rappr. dai termini negativi, cioè i punti A_{1432}, A_{1243}, A_{1324} situati su a^{11}. Reciprocamente, i 3 trilateri rappr. dai termini positivi di δ_{11} sono a 2 a 2 prospettivi con l'asse a^{11} ed i 3 centri d'omologia A_{1234}, A_{1342}, A_{1423} situati su a_{11}.

Le rette di a_{11}, a^{11} sono dunque rette di Steiner coniugate corrispondenti alla coppia di triangoli: $a_{12}a_{13}a_{14}$, $a_{21}a_{31}a_{41}$. Similmente si prova che le stesse a_{11}, a^{11} sono rette di Steiner coniugate corrispond. all'altra coppia di triangoli: $a^{12}a^{13}a^{14}$, $a^{21}a^{31}a^{41}$.

30. Ripetendo per tutti gli elementi di Δ e Δ' le considerazioni fatte per a_{11} ed a^{11} si conchiude che: *Le 18 rette diagonali della configurazione armonica si distribuiscono in 16 modi diversi come elementi di due figure* ψ.

Queste coppie di figure ψ si possono raggruppare nei seguenti due quadri:

(A)

$$\delta_{11} \equiv \begin{vmatrix} 10 & 17 & 15 \\ 16 & 14 & 12 \\ 13 & 11 & 18 \end{vmatrix} \quad \delta_{12} \equiv \begin{vmatrix} 10 & 9 & 5 \\ 16 & 6 & 2 \\ 13 & 3 & 8 \end{vmatrix} \quad \delta_{13} \equiv \begin{vmatrix} 17 & 9 & 1 \\ 14 & 6 & 7 \\ 11 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \delta_{14} \equiv \begin{vmatrix} 15 & 5 & 1 \\ 12 & 2 & 7 \\ 18 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\delta_{21} \equiv \begin{vmatrix} 10 & 17 & 15 \\ 4 & 8 & 3 \\ 7 & 2 & 6 \end{vmatrix} \quad \delta_{22} \equiv \begin{vmatrix} 10 & 9 & 5 \\ 4 & 18 & 11 \\ 7 & 12 & 14 \end{vmatrix} \quad \delta_{23} \equiv \begin{vmatrix} 17 & 9 & 1 \\ 8 & 18 & 13 \\ 2 & 12 & 16 \end{vmatrix} \quad \delta_{24} \equiv \begin{vmatrix} 15 & 5 & 1 \\ 3 & 11 & 13 \\ 6 & 14 & 16 \end{vmatrix}$$

$$\delta_{31} \equiv \begin{vmatrix} 16 & 14 & 12 \\ 4 & 8 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} \quad \delta_{32} \equiv \begin{vmatrix} 16 & 6 & 2 \\ 4 & 18 & 11 \\ 1 & 15 & 7 \end{vmatrix} \quad \delta_{33} \equiv \begin{vmatrix} 14 & 6 & 7 \\ 8 & 18 & 13 \\ 5 & 15 & 10 \end{vmatrix} \quad \delta_{34} \equiv \begin{vmatrix} 12 & 2 & 7 \\ 3 & 11 & 13 \\ 9 & 17 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\delta_{41} \equiv \begin{vmatrix} 13 & 11 & 18 \\ 7 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} \quad \delta_{42} \equiv \begin{vmatrix} 13 & 3 & 8 \\ 7 & 12 & 14 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} \quad \delta_{43} \equiv \begin{vmatrix} 11 & 3 & 4 \\ 2 & 12 & 16 \\ 5 & 15 & 10 \end{vmatrix} \quad \delta_{44} \equiv \begin{vmatrix} 18 & 8 & 4 \\ 6 & 14 & 16 \\ 9 & 17 & 10 \end{vmatrix}$$

$$
(B)\left\{
\begin{array}{llll}
\delta^{11} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 7 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & 3 \end{vmatrix} &
\delta^{12} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 15 & 17 \\ 7 & 12 & 14 \\ 4 & 18 & 11 \end{vmatrix} &
\delta^{13} \equiv \begin{vmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 2 & 12 & 16 \\ 8 & 18 & 13 \end{vmatrix} &
\delta^{14} \equiv \begin{vmatrix} 9 & 17 & 10 \\ 6 & 14 & 16 \\ 3 & 11 & 13 \end{vmatrix} \\
\delta^{21} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 13 & 11 & 18 \\ 16 & 14 & 12 \end{vmatrix} &
\delta^{22} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 15 & 17 \\ 13 & 3 & 8 \\ 16 & 6 & 2 \end{vmatrix} &
\delta^{23} \equiv \begin{vmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 11 & 3 & 4 \\ 14 & 6 & 7 \end{vmatrix} &
\delta^{24} \equiv \begin{vmatrix} 9 & 17 & 10 \\ 18 & 8 & 4 \\ 12 & 2 & 7 \end{vmatrix} \\
\delta^{31} \equiv \begin{vmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 13 & 11 & 18 \\ 10 & 17 & 15 \end{vmatrix} &
\delta^{32} \equiv \begin{vmatrix} 7 & 12 & 14 \\ 13 & 3 & 8 \\ 10 & 9 & 5 \end{vmatrix} &
\delta^{33} \equiv \begin{vmatrix} 2 & 12 & 16 \\ 11 & 3 & 4 \\ 17 & 9 & 1 \end{vmatrix} &
\delta^{34} \equiv \begin{vmatrix} 6 & 14 & 16 \\ 18 & 8 & 4 \\ 15 & 5 & 1 \end{vmatrix} \\
\delta^{41} \equiv \begin{vmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 16 & 14 & 12 \\ 10 & 17 & 15 \end{vmatrix} &
\delta^{42} \equiv \begin{vmatrix} 4 & 18 & 11 \\ 16 & 6 & 2 \\ 10 & 9 & 5 \end{vmatrix} &
\delta^{43} \equiv \begin{vmatrix} 8 & 18 & 13 \\ 14 & 6 & 7 \\ 17 & 9 & 1 \end{vmatrix} &
\delta^{44} \equiv \begin{vmatrix} 3 & 11 & 13 \\ 12 & 2 & 7 \\ 15 & 5 & 1 \end{vmatrix}
\end{array}
\right\}
$$

31. La prima verticale di (A) e la prima verticale di (B) sono formate dalle figure ψ: $\delta_{11}\delta_{21}\delta_{31}\delta_{41}$; $\delta^{11}\delta^{21}\delta^{31}\delta^{41}$; i trilateri delle orizzontali di queste figure sono in tutto sei: **1 , 5 , 9 ; 7 , 2 , 6 ; 4 , 8 , 3 ; 13 , 11 , 8 ; 10 , 17 , 15 ; 16 , 14 , 12** e si dividono in 3 coppie:

$$
\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 10 & 17 & 15 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 16 & 14 & 12 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 13 & 11 & 18 \end{vmatrix} .
$$

I triangoli di ogni coppia sono triomologici ai quattro altri triangoli della sestupla.

Inoltre, così come sono disposti, gli stessi 6 trilateri sono a 2 a 2 omologici e con lo stesso centro. Infatti i 3 trilateri di δ_{11} così come sono scritti risultano a 2 a 2 omologici con lo stesso centro, e più propriamente le 3 terne di vertici: 10.17 , 16 14 , 13.11 ; 10.15 , 16.12 , 13 18 ; 17.15 , 14.12 , 11.18 sono su tre rette a , b , c e concorrenti in un punto $S^{(1)}$. Consideriamo allora le coppie:

$$
\begin{vmatrix} 16 & 14 & 12 \\ 13 & 11 & 18 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 10 & 17 & 15 \\ 16 & 14 & 12 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 10 & 17 & 15 \\ 13 & 11 & 18 \end{vmatrix} .
$$

La 1ª si trova in δ^{21}, dunque anche i vertici dell'altro triangolo 1 . 5 . 9 si trovano su a , b , c. La 2ª si trova anche in δ^{41}, dunque i vertici dell'altro triangolo 4 . 8 . 3 si trovano su a , b , c; e la 3ª coppia trovandosi anche in δ^{31}, i vertici del triangolo 7 . 2 . 6 dovranno pure trovarsi su a , b , c. Ne risulta che i 18 vertici dei 6 triangoli stanno a 6 a 6 sulle 3 rette a , b , c concorrenti in $S^{(1)}$.

Allo stesso modo si può verificare che:

1.° I triangoli rappresentati dalle orizzontali delle figure ψ disposte nelle seconde verticali di (A) e (B) si riducono a 6 ed hanno i vertici situati a 6 a 6 su 3 rette d , e , c passanti per un punto $S^{(2)}$.

2.° I triangoli delle orizzontali delle figure ψ disposte nelle terze verticali di (A) e (B) si riducono a 6 ed hanno i vertici situati a 6 a 6 su 3 rette f, e, b passanti per un punto $S^{(3)}$.

3.° I triangoli delle orizzontali delle figure ψ disposte nelle quarte verticali di (A) e (B) si riducono a 6 ed hanno i vertici situati a 6 a 6 su tre rette f, d, a passanti per un punto $S^{(4)}$.

In tutto si hanno 6 rette a, b, c, d, e, f che sono lati del quadrangolo completo $S^{(1)}S^{(2)}S^{(3)}S^{(4)}$.

Se si considerano le figure disposte nelle orizzontali omonime di (A) e (B), si trova che le verticali di queste figure costituiscono altre quattro sestuple di triangoli analoghe alle precedenti.

Riassumendo si hanno le seguenti proprietà:

Le 18 rette diagonali della configurazione armonica si distribuiscono in otto sestuple di trilateri; ogni triangolo di una sestupla è tri-omologico ad altri quattro della stessa sestupla ed è semplicemente omologica al rimanente; di più i 6 triangoli di ogni sestupla sono a 2 a 2 omologici con lo stesso centro d'omologia.

Le stesse 18 rette s'incontrano a 2 a 2, oltre che nei 24 punti fondamentali e nei 9 punti diagonali dei quadrangoli desmici, ancora in altri 72 punti i quali sono i vertici dei trilateri precedenti. Questi 72 punti stanno a 6 a 6 su 12 rette: a, b, c, d, e, f e le altre 6 analoghe ottenute considerando le orizzontali di (A) e (B).

La disposizione dei 72 punti a 6 a 6 su 12 rette è stata notata da Schröter (v. 69); ora possiamo aggiungere che *queste 12 rette costituiscono due quadrangoli completi* ($S^{(1)}S^{(2)}S^{(3)}S^{(4)}$ ed il quadrangolo analogo che si ricava dalle orizzontali di (A) e (B)).

§ 3.

Nuova deduzione del gruppo della configurazione armonica.

32. Premettiamo la deduzione del gruppo della Cfr. 9_3 di Pappo. Arriveremo allo scopo mediante ovvie considerazioni su determinanti del 3° ordine.

Adottando la notazione della fig. 1ª, la Cfr. 9_3 si può rappresentare mediante il determinante:

$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} .$$

Le nove rette saranno rappresentate così: 1° le tre orizzontali $A_{11}A_{12}A_{13}$, $A_{21}A_{22}A_{23}$, $A_{31}A_{32}A_{33}$; 2° i 6 termini dello sviluppo di α, cioè: $A_{11}A_{22}A_{33}$, $A_{12}A_{23}A_{31}$, $A_{13}A_{21}A_{32}$; $A_{11}A_{23}A_{32}$, $A_{12}A_{21}A_{33}$, $A_{13}A_{22}A_{31}$.

Siccome vi sono 3 terne di rette a due a due estranee, si avranno altri due determinanti, che, come α, rappresentano la configurazione, cioè.

$$\alpha' \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} \\ A_{21} & A_{32} & A_{13} \\ A_{31} & A_{12} & A_{23} \end{vmatrix} \qquad \alpha'' \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{32} & A_{23} \\ A_{21} & A_{12} & A_{33} \\ A_{31} & A_{22} & A_{13} \end{vmatrix} .$$

I triangoli rappresentati dalle verticali di α, α' od α'' sono gli stessi e formano la terna di triangoli triomologici della configurazione. Le altre proprietà si possono pure dedurre dalla forma di questi determinanti.

33. Preso il determinante α come rappresentante della configurazione si possono immediatamente trovare le sostituzioni, che operando sui 9 punti trasformano in sè stesso ciascuno degli aggregati costituiti dalle 3 rette estranee: $A_{11}A_{12}A_{13}$, $A_{21}A_{22}A_{23}$, $A_{31}A_{32}A_{33}$ e dalle altre 6 rette.

Sia S la sostituzione, che si ottiene permutando ciclicamente le orizzontali di α, cioè:

$$S \equiv (A_{11}A_{21}A_{31})(A_{12}A_{22}A_{32})(A_{13}A_{23}A_{33}) .$$

Sarà $S^2 \equiv (A_{11}A_{31}A_{21})(A_{12}A_{32}A_{22})(A_{13}A_{33}A_{23})$ ed $S^3 \equiv 1$.

Il sottogruppo $G_3 \equiv (1, S, S^2)$ permuta ciclicamente ciascuna delle 3 terne di rette estranee.

Sia $T \equiv (A_{11}A_{13}A_{12})(A_{21}A_{23}A_{22})(A_{31}A_{33}A_{32})$ la sostituzione che si ottiene permutando ciclicamente le verticali di α, sarà $T^2 \equiv (A_{11}A_{12}A_{13})(A_{21}A_{22}A_{23})(A_{31}A_{32}A_{33})$ e $T^3 \equiv 1$. Il sottogruppo $G'_3 \equiv (1, T, T^2)$ lascia inalterate le rette della prima terna e permuta circolarmente le rette delle altre due.

Mediante S e T formiamo le altre sostituzioni ST, ST^2, S^2T, S^2T^2, che insieme alle precedenti dànno un gruppo abeliano G_9.

Indichiamo ora con U_i la sostituzione, che lascia inalterata la i^{ma} orizzontale di α mentre permuta le altre due e con W_i quella che lascia inalterata l'i^{ma} verticale permutando le altre due. È facile vedere che le U_i, W_i sono legate alle S, T dalle relazioni:

$$\begin{cases} U_1U_2 \equiv U_2U_3 \equiv U_3U_1 \equiv S^2 \\ U_1U_3 \equiv U_3U_2 \equiv U_2U_1 \equiv S \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_1W_2 \equiv W_2W_3 \equiv W_3W_1 \equiv T^2 \\ W_1W_3 \equiv W_3W_2 \equiv W_2W_3 \equiv T . \end{cases}$$

Moltiplicando le U_i per le W_i si hanno le altre nove sostituzioni $U_{ij} \equiv U_iW_j$, anch'esse del 2° ordine. I prodotti U_iW_j sono permutabili e dalle relazioni precedenti risulta che:

$$U_{ij}W_k \equiv \begin{cases} U_i \text{ se } j = k \\ U_iT \text{ oppure } U_iT^2 \text{ se } j \neq k \end{cases}$$

$$U_{ij}U_k \equiv \begin{cases} W_j \text{ se } i = k \\ SW_j \text{ oppure } S^2W_j \text{ se } i \neq k . \end{cases}$$

Anche i prodotti U_iT, U_iT^2, SW_j ed S^2W_j sono permutabili.

In tutto si hanno 36 sostituzioni: le 9 di G_9; le 6 sostituzioni U_i, W_i; le nove U_{ij} e le dodici $TU_i, T^2U_i, SW_i, S^2W_i$.

Aggiungiamo le altre relazioni:

$$\begin{cases} SU_1 \equiv U_2 \\ SU_2 \equiv U_3 \\ SU_3 \equiv U_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} U_1S \equiv U_3 \\ U_2S \equiv U_1 \\ U_3S \equiv U_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} TW_1 \equiv W_2 \\ TW_2 \equiv W_3 \\ TW_3 \equiv W_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} W_1T \equiv W_3 \\ W_2T \equiv W_1 \\ W_3T \equiv W_2 \end{cases}$$

ed inoltre:

$$\begin{cases} SU_{ij} \equiv (SU_i)W_j \equiv U_k W_j \equiv U_{kj} \\ U_{ij}S \equiv U_i W_i S \equiv (U_i S)W_i \equiv U_{k'j} \end{cases} ; \qquad \begin{cases} TU_{ij} \equiv (TU_i)W_j \equiv (TW_i)U_i \equiv U_{ik} \\ U_{ij}T \equiv U_i W_j T \equiv U_i(W_i T) \equiv U_{ik'} \end{cases} .$$

Se ne deduce che G_9 è invariante in G_{36}, *ma non invariante massimo.* Fra G_{36} e G_9 vi è un altro sottogruppo:

$$G_{18} \equiv (1, S, S^2, T, T^2, ST, ST^2, S^2T, S^2T^2, W_i, W_iS, W_iS^2)$$

che è anch'esso invariante in G_{36} e rispetto al quale è invariante G_9.

Sicchè una serie di composizione di G_{36} è

$$(G_{36}, G_{18}, G_9, G_3, G_1)$$

con gli indici di composizione (2, 2, 3, 3).

Un'altra serie di composizione si ottiene considerando un altro sottogruppo:

$$G_6 \equiv (1, S, S^2, U_1, U_2, U_3)$$

invariante in G_{18} e rispetto al quale è invariante G_3. Si trova così la seconda serie di composizione:

$$(G_{36}, G_{18}, G_6, G_3, G_1)$$

con gli indici (2, 3, 2, 3).

Un'altro sottogruppo di G_{36} è

$$G_{12} \equiv (1, S, S^2, U_1, U_2, U_3, W_1, W_1S, W_1S^2, W_1U_1, W_1U_2, W_1U_3)$$

ma questo non è invariante in G_{36}. Infatti la T muta W_1 in W_2 non compresa in G_{12}:

$$T^{-1}W_1T \equiv T^2W_1T \equiv T(TW_1)T \equiv TW_2T \equiv W_3T \equiv W_2 .$$

Si conchiude quindi che le due serie di composizione ora trovate sono le sole possibili.

36. Per completare la ricerca del gruppo della Cfr. 9_3 dobbiamo tener conto delle sostituzioni con le quali dal determinante α si passa agli altri due: α' ed α''.

Perciò poniamo

$$\theta \equiv (A_{11})(A_{21})(A_{31})(A_{12}A_{22}A_{32})(A_{13}A_{33}A_{23})$$
$$\theta' \equiv (A_{11})(A_{21})(A_{31})(A_{12}A_{32}A_{22})(A_{13}A_{23}A_{33}) \equiv \theta^2 .$$

Le θ e θ' sono distinte dalle sostituzioni di G_{36} perchè, mentre queste trasformano $A_{11}A_{12}A_{13}$ in un'altra retta della 1ª terna di rette estranee, θ la muta in $A_{11}A_{22}A_{33}$ e θ' la muta in $A_{11}A_{32}A_{23}$.

Dunque il quadro di Cauchy:

$$\begin{array}{lllll} g_1=1 & g_2 & g_3 & \ldots & g_{36} \longrightarrow G_{36} \\ \theta & \theta g_2 & \theta g_3 & \ldots & \theta g_{36} \\ \theta' & \theta' g_2 & \theta' g_3 & \ldots & \theta' g_{36} \end{array}$$

fornisce sostituzioni tutte diverse, che costituiscono il gruppo G_{108} della Cfr. 9_3.

Si vede pure facilmente che G_{36} è invariante massimo in G_{108}, dunque si hanno le due serie di composizione:

$$(G_{108} \;\; G_{36} \;\; G_{18} \;\; G_9 \;\; G_3 \;\; G_1)$$
$$(G_{108} \;\; G_{36} \;\; G_{18} \;\; G_6 \;\; G_3 \;\; G_1)\,.$$

35. Lo studio del gruppo della configurazione armonica si trova nella memoria del Feder (v. 56) nella quale sono anche trovate, ma molto laboriosamente, le due serie di composizione.

Noi dimostreremo che il gruppo G_{576} della configurazione armonica è meriedricamente isomorfo al sottogruppo invariante massimo G_{36} del gruppo G_{108} della Cfr. 9_3 e da ciò dedurremo con la massima semplicità la costituzione intima di G_{576}.

Disponiamo i 12 punti del 1° sistema desmico nel seguente quadro:

$$\begin{array}{|ccc|} A_{2143} & A_{4213} & A_{3241} \\ A_{4321} & A_{3124} & A_{2314} \\ A_{3412} & A_{2431} & A_{4132} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A_{1234} & A_{1342} & A_{1423} \end{array} \qquad (A)$$

La 1ª verticale si ottiene eseguendo sugli indici di A_{1234} le 3 permutazioni del gruppo anarmonico diverse dall'identità; analogamente la 2ª e la 3ª verticale si ricavano da A_{1342}, A_{1423}.

Allora, i 6 termini dello sviluppo di A dànno le 6 rette a_{12}, a_{13}, a_{14}; a_{21}, a_{31}, a_{41}; la a_{11} contiene i tre punti $A_{1234}, A_{1342}, A_{1423}$ e le altre 9 rette sono i lati dei triangoli rappresentati dalle orizzontali e che passano a 3 a 3 per i 3 punti precedenti. Queste nove rette si possono distribuire così

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{34} & a_{43} \\ a_{44} & a_{23} & a_{32} \\ a_{33} & a_{42} & a_{24} \end{vmatrix}\,. \qquad (a)$$

Le rette della 1ª orizzontale passano per A_{1234}, quelle della 2ª per A_{1342} e quelle della 3ª per A_{1423}.

Eseguendo sul determinante (A) gli stessi scambii di linee e colonne, che hanno

dato luogo al gruppo G_{36} (n. 33) si hanno 36 sostituzioni del gruppo della Cfr. armonica. Esse lasciano inalterata la retta a_{11}, scambiano ciclicamente le rette delle due terne $a_{12}a_{13}a_{14}$, $a_{21}a_{31}a_{41}$ ed operano nelle 9 rette del determinante (a) gli stessi scambi di linee e colonne operati su (A).

In tal modo abbiamo trovato il sottogruppo G_{36} della configurazione armonica, che lascia inalterata una delle 16 rette a_{ik}. Siccome il gruppo è transitivo, il suo ordine sarà 16 $\times$ 36, cioè 576.

Le sostituzioni fondamentali di G_{36} sono:

$$S \equiv (A_{2143}A_{4321}A_{3412})(A_{4213}A_{3124}A_{2431})(A_{3241}A_{2314}A_{4132})(A_{1234})(A_{1342})(A_{1423})$$
$$T \equiv (A_{2143}A_{4213}A_{3241})(A_{4321}A_{3124}A_{2314})(A_{3412}A_{2431}A_{4132})(A_{1234}A_{1342}A_{1423})$$
$$U_1 \equiv (A_{2143})(A_{4213})(A_{3241})(A_{1234})(A_{1342})(A_{1423})(A_{4321}A_{3412})(A_{3124}A_{2431})(A_{2314}A_{4132})$$
$$W_1 \equiv (A_{2143})(A_{4321})(A_{3412})(A_{1234})(A_{1342}A_{1423})(A_{4213}A_{3241})(A_{3124}A_{2314})(A_{2431}A_{4132})$$

36. Consideriamo ora il sottogruppo G_{16} le cui sostituzioni corrispondono alle 16 collineazioni che lasciano fermi i 3 tetraedri del sistema ed anche quelli del sistema coniugato (Feder v. 56). Esso si può generare nel seguente modo:

Poniamo:

$$\gamma_2 \equiv (A_{1234})(A_{2143})(A_{3412})(A_{4321})(A_{1342}A_{2431})(A_{4213}A_{3124})(A_{1423}A_{4132})(A_{3241}A_{2314})$$

Sarà:

$$S^{-1}\gamma_2 S \equiv (A_{1234})(A_{2143})(A_{3412})(A_{4321})(A_{1342}A_{4213})(A_{2431}A_{3124})(A_{1423}A_{3241})(A_{4132}A_{2314}) \equiv \gamma_3$$
$$S^{-1}\gamma_3 S \equiv (A_{1234})(A_{2143})(A_{3412})(A_{4321})(A_{1342}A_{3124})(A_{2431}A_{4213})(A_{1423}A_{2314})(A_{4132}A_{3241}) \equiv \gamma_4$$
$$S^{-1}\gamma_4 S \equiv \gamma_2 \,.$$

Così si ottengono i primi due sottogruppi $(1, \gamma_2)$, $(1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$.

Altre 6 sostituzioni si ottengono trasformando le precedenti mediante T:

$$T^{-1}\gamma_2 T \equiv (A_{1342})(A_{2431})(A_{4213})(A_{3124})(A_{1234}A_{3412})(A_{2143}A_{4321})(A_{1423}A_{4132})(A_{3241}A_{2314}) \equiv \gamma_5$$
$$T^{-1}\gamma_5 T \equiv (A_{1423})(A_{4132})(A_{3241})(A_{2314})(A_{1234}A_{3412})(A_{2143}A_{4321})(A_{1342}A_{2431})(A_{4213}A_{3124}) \equiv \gamma_6$$
$$T^{-1}\gamma_5 T \equiv \gamma_2 \,,$$

$$T^{-1}\gamma_3 T \equiv (A_{1342})(A_{2431})(A_{4213})(A_{3124})(A_{1234}A_{2143})(A_{3412}A_{4321})(A_{1423}A_{3241})(A_{4132}A_{2314}) \equiv \gamma_7$$
$$T^{-1}\gamma_7 T \equiv (A_{1423})(A_{4132})(A_{3241})(A_{2314})(A_{1234}A_{2143})(A_{3412}A_{4321})(A_{1342}A_{4213})(A_{3124}A_{2431}) \equiv \gamma_8$$
$$T^{-1}\gamma_8 T \equiv \gamma_3 \,,$$

$$T^{-1}\gamma_4 T \equiv (A_{1342})(A_{2431})(A_{4213})(A_{3124})(A_{1234}A_{4321})(A_{3412}A_{2143})(A_{1423}A_{2314})(A_{4132}A_{3241}) \equiv \gamma_9$$
$$T^{-1}\gamma_9 T \equiv (A_{1423})(A_{4132})(A_{3241})(A_{2314})(A_{1234}A_{4321})(A_{3412}A_{2143})(A_{1342}A_{3124})(A_{2431}A_{4213}) \equiv \gamma_{10}$$
$$T^{-1}\gamma_{10} T \equiv \gamma_4 \,.$$

L'insieme di tutte queste γ è mutato in sè stesso dalle S, T, U_1 e W_1 le quali per conseguenza muteranno prodotti di γ in altri prodotti di γ. Siccome da questi

risultano altre 6 sostituzioni $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{14}, \gamma_{15}$ e γ_{16} che insieme alle prime costituiscono il sottogruppo G_{16}, si deduce che questo G_{16} *è mutato in sè stesso da tutte le sostituzioni di* G_{36} cioè si ha:

$$\gamma_i g_k \equiv g_k \gamma_j .$$

Di più G_{16} è formato da sostituzioni che mutano a_{11} in a_{11} (l'identità) e nelle 15 rette a_{ik}. Difatti: $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ mutano a_{11} rispettivamente in a_{33}, a_{22}, a_{44} e

$$\gamma_5 \equiv \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{42} \end{Bmatrix}, \quad \gamma_6 \equiv \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{24} \end{Bmatrix}; \quad \gamma_7 \equiv \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{34} \end{Bmatrix}, \quad \gamma_8 \equiv \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{43} \end{Bmatrix}; \quad \gamma_9 \equiv \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{23} \end{Bmatrix}, \quad \gamma_{10} \equiv \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{32} \end{Bmatrix}$$

ed inoltre le altre 6 γ mutano a_{11} rispettivamente in $a_{12}, a_{13}, a_{14}; a_{21} a_{31} a_{41}$.

Dunque si potrà formare il quadro di Cauchy del gruppo G_{576}:

$$\begin{matrix} 1, & g_2, & g_3 \cdots & g_{36} \\ \gamma_2, & \gamma_2 g_2, & \gamma_2 g_3 \cdots & \gamma_2 g_{36} \\ \gamma_3, & \gamma_3 g_2, & \gamma_3 g_3 \cdots & \gamma_3 g_{36} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{16}, & \gamma_{16} g_2, & \gamma_{16} g_3 \cdots & \gamma_{16} g_{36} . \end{matrix}$$

Facciamo corrispondere all'identità di G_{36} il sottogruppo G_{16} delle γ ed alla sostituzione g_i l'insieme di sostituzioni $g_i, \gamma_2 g_i, \gamma_3 g_i, \ldots, \gamma_{16} g_i$. Poichè $\gamma_i g_k \equiv g_k \gamma_j$ resta definito l'isomorfismo meriedrico fra il G_{36} ed il G_{576}; ad ogni gruppo G_n di G_{36} corrisponderà un gruppo G_{16n} di G_{576}.

Ora, le due serie di composizione di G_{36} sono: $(G_{36} G_{18} G_6 G_3 G_1)$ e $(G_{36} G_{18} G_9 G_3 G_1)$; la serie di composizione di G_{16} è $(G_{16} G_8 G_4 G_2 G_1)$, quindi *le due serie di composizione di* G_{576} *saranno*

1.ª $(G_{576}, G_{288}, G_{96}, G_{48}, G_{16}, G_8, G_4, G_2, G_1)$

2.ª $(G_{576}, G_{288}, G_{144}, G_{48}, G_{16}, G_8, G_4, G_2, G_1)$.

Al gruppo G_{12} di G_{36} corrisponde in G_{576} il gruppo G_{192} il quale però non è invariante in G_{576}, come il G_{12} non è invariante in G_{36}.

§ 4.

La configurazione iperboloidica $(24_4 32_3)$ A.

37. Chiameremo Cfr. $(24_4 32_3)$ A la configurazione costituita dai punti d'incontro dei 6 spigoli di un tetraedro con le facce di un secondo tetraedro anarmonicamente tetra-iperboloidico al primo (v. 90). Essa è rappresentata dalla fig. 2ª (segnata a parte).

Le 32 rette sono:

$$\begin{aligned}
a_1 &\equiv A_{12}A_{13}A_{14} & \qquad a^{(1)} &\equiv A_{21}A_{31}A_{41} \\
a_2 &\equiv A_{21}A_{23}A_{24} & a^{(2)} &\equiv A_{12}A_{32}A_{42} \\
a_3 &\equiv A_{31}A_{32}A_{34} & a^{(3)} &\equiv A_{13}A_{23}A_{43} \\
a_4 &\equiv A_{41}A_{42}A_{43} & a^{(4)} &\equiv A_{14}A_{24}A_{34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^1{}_{41} &\equiv A_{41}A^{21}A^{31} & \qquad a_1{}^{14} &\equiv A_{14}A^{12}A^{13} \\
a^2{}_{32} &\equiv A_{32}A^{42}A^{12} & a_2{}^{23} &\equiv A_{23}A^{21}A^{24} \\
a^3{}_{23} &\equiv A_{23}A^{43}A^{13} & a_3{}^{32} &\equiv A_{32}A^{34}A^{31} \\
a^4{}_{14} &\equiv A_{14}A^{34}A^{24} & a_4{}^{41} &\equiv A_{41}A^{43}A^{42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^1{}_{21} &\equiv A_{21}A^{41}A^{31} & \qquad a_1{}^{12} &\equiv A_{12}A^{14}A^{13} \\
a^2{}_{12} &\equiv A_{12}A^{32}A^{42} & a_2{}^{21} &\equiv A_{21}A^{24}A^{23} \\
a^3{}_{43} &\equiv A_{43}A^{23}A^{13} & a_3{}^{34} &\equiv A_{34}A^{32}A^{31} \\
a^4{}_{34} &\equiv A_{34}A^{14}A^{24} & a_4{}^{43} &\equiv A_{43}A^{41}A^{42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^1{}_{31} &\equiv A_{31}A^{41}A^{21} & \qquad a_1{}^{13} &\equiv A_{13}A^{14}A^{12} \\
a^2{}_{42} &\equiv A_{42}A^{32}A^{12} & a_2{}^{24} &\equiv A_{24}A^{21}A^{23} \\
a^3{}_{13} &\equiv A_{13}A^{23}A^{43} & a_3{}^{31} &\equiv A_{31}A^{32}A^{34} \\
a^4{}_{24} &\equiv A_{24}A^{14}A^{34} & a_4{}^{42} &\equiv A_{42}A^{41}A^{43}\,.
\end{aligned}$$

I 24 punti sono:

$$\left\{\begin{aligned}
A_{21} &\equiv a^1 a_2 a^1{}_{21} a_2{}^{21} \\
A_{31} &\equiv a^1 a_3 a^1{}_{31} a_3{}^{31} \\
A_{41} &\equiv a^1 a_4 a^1{}_{41} a_4{}^{41}
\end{aligned}\right.
\quad
\left\{\begin{aligned}
A_{12} &\equiv a^2 a_1 a^2{}_{12} a_1{}^{12} \\
A_{32} &\equiv a^2 a_3 a^2{}_{32} a_3{}^{32} \\
A_{42} &\equiv a^2 a_4 a^2{}_{42} a_4{}^{42}
\end{aligned}\right.
\quad
\left\{\begin{aligned}
A_{13} &\equiv a^3 a_1 a^3{}_{13} a_1{}^{13} \\
A_{23} &\equiv a^3 a_2 a^3{}_{23} a_2{}^{23} \\
A_{43} &\equiv a^3 a_4 a^3{}_{43} a_4{}^{43}
\end{aligned}\right.
\quad
\left\{\begin{aligned}
A_{14} &\equiv a^4 a_1 a^4{}_{14} a_1{}^{14} \\
A_{24} &\equiv a^4 a_2 a^4{}_{24} a_2{}^{24} \\
A_{34} &\equiv a^4 a_3 a^4{}_{34} a_3{}^{34}
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
A^{21} &\equiv a^1{}_{41} a_2{}^{23} a^1{}_{31} a_2{}^{24} \\
A^{31} &\equiv a^1{}_{41} a_3{}^{32} a^1{}_{21} a_3{}^{34} \\
A^{41} &\equiv a^1{}_{31} a_4{}^{42} a^1{}_{21} a_4{}^{43}
\end{aligned}\right.
\quad
\left\{\begin{aligned}
A^{12} &\equiv a^2{}_{32} a_1{}^{13} a^2{}_{42} a_1{}^{14} \\
A^{32} &\equiv a^2{}_{12} a_3{}^{34} a^2{}_{42} a_3{}^{31} \\
A^{42} &\equiv a^2{}_{12} a_4{}^{43} a^2{}_{32} a_4{}^{41}
\end{aligned}\right.
\quad
\left\{\begin{aligned}
A^{13} &\equiv a^3{}_{23} a_1{}^{12} a^3{}_{43} a_1{}^{14} \\
A^{23} &\equiv a^3{}_{13} a_2{}^{21} a^3{}_{43} a_2{}^{24} \\
A^{43} &\equiv a^3{}_{13} a_4{}^{41} a^3{}_{23} a_4{}^{42}
\end{aligned}\right.
\quad
\left\{\begin{aligned}
A^{14} &\equiv a^4{}_{24} a_1{}^{12} a^4{}_{34} a_1{}^{13} \\
A^{24} &\equiv a^4{}_{34} a_2{}^{23} a^4{}_{14} a_2{}^{21} \\
A^{34} &\equiv a^4{}_{24} a_3{}^{31} a^4{}_{14} a_3{}^{32}
\end{aligned}\right.$$

Se *iklm* è una permutazione qualunque dei 4 indici 1, 2, 3, 4 si pone:

$$\begin{aligned}
a^i &\equiv A_{ik}A_{il}A_{im} & \qquad a^i{}_{ki} &\equiv A_{ki}A^{li}A^{mi} \\
a^{(i)} &\equiv A_{ki}A_{li}A_{mi} & a_i{}^{ik} &\equiv A_{ik}A^{il}A^{im}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^{kl} &\equiv a_k{}^{km} a_k{}^{ki} a^l{}_{il} a^l{}_{ml} \\
A_{kl} &\equiv a^l \quad a_k \quad a^l{}_{kl} a_k{}^{kl}\,.
\end{aligned}$$

38. Per costruire la configurazione si parte da una figura delle otto rette costituita cioè da due quaderne incidenti di rette: $a^1a^2a^3a^4$, $a_1a_2a_3a_4$; sia **1234** un *tetraedro annesso* a questa figura e propriamente il tetraedro che ha per facce i piani determinati dalle 4 coppie di rette

$$a_1a^1\ ,\ a_2a^2\ ,\ a^3a_3\ ,\ a^4a_4\ .$$

Si ponga:

$$\begin{array}{llll}
A_{21}\equiv 34\cdot a^1 \ ; & A_{12}\equiv 34\cdot a^2 & \qquad A_{24}\equiv 13\cdot a^4 \ ; & A_{42}\equiv 13\cdot a^2 \\
A_{13}\equiv 24\cdot a^3 \ ; & A_{31}\equiv 24\cdot a^1 & \qquad A_{14}\equiv 32\cdot a^4 \ ; & A_{41}\equiv 32\cdot a^1 \\
A_{23}\equiv 14\cdot a^3 \ ; & A_{32}\equiv 14\cdot a^2 & \qquad A_{34}\equiv 12\cdot a^4 \ ; & A_{43}\equiv 12\cdot a^3 \ .
\end{array}$$

Di modo che: $a_1\equiv A_{12}A_{13}A_{14}$ ecc., $a^1\equiv A_{21}A_{31}A_{41}$ ecc.

Scelto su **12** un punto arbitrario $A^{(12)}$ si trovino i punti: $A^{13}\equiv(\mathbf{13})\,.\,A^{12}A_{14}$; $A^{14}\equiv 14\,.\,A^{13}A_{12}$; è facile vedere che $A^{12}A^{14}$ passa per A_{13}. Inoltre si ponga successivamente: $A^{32}\equiv A^{12}A_{42}\,.\,\mathbf{23}$; $A^{34}\equiv A^{32}A_{31}\,.\,\mathbf{34}$; $A^{24}\equiv A^{34}A_{14}\,.\,\mathbf{24}$; $A^{23}\equiv A^{24}A_{21}\,.\,\mathbf{23}$; $A^{21}\equiv A^{23}A_{24}\,.\,\mathbf{12}$; $A^{31}\equiv A^{21}A_{41}\,.\,\mathbf{13}$; $A^{41}\equiv A^{31}A_{21}\,.\,\mathbf{14}$; $A^{43}\equiv A^{41}A_{42}\,.\,\mathbf{34}$; $A^{42}\equiv A^{43}A_{41}\,.\,\mathbf{42}$; si dimostra che $A^{42}A_{32}$ passa per il primo punto A^{12}. In seguito si verificano gli allineamenti: $A^{21}A^{24}A_{23}$; $A^{24}A^{14}A_{34}$; $A^{14}A^{34}A_{24}$; $A^{34}A^{31}A_{32}$; $A^{31}A^{32}A_{34}$; $A^{32}A^{42}A_{12}$; $A^{42}A^{41}A_{43}$; $A^{41}A^{21}A_{31}$, come pure gli altri: $A^{12}A^{43}A_{23}$; $A^{43}A^{23}A_{13}$; $A^{23}A^{13}A_{43}$.

La configurazione così costituita si comporta allo stesso modo rispetto a tutti i punti A^{ik} donde si ricava una prima proprietà: *fissato uno dei punti* A^{ik} *questo forma con altri due un triangolo e con gli altri nove un decagono semplice; escluso* A^{ik}, *gli altri 11 punti formano un ottagono semplice ed un triangolo della configurazione.*

Le 6 rette, lati dei due triangoli, le 18 rette, lati del decagono e dell'ottagono e le 8 rette a^i, a_i dànno precisamente le 32 rette della configurazione.

39. Disponiamo le 32 rette come elementi dei due determinanti:

$$(\mathrm{I})\ \left|\begin{matrix} a_1 & a_2^{21} & a_3^{31} & a_4^{41} \\ a_1^{12} & a_2 & a_3^{32} & a_4^{42} \\ a_1^{13} & a_2^{23} & a_3 & a_4^{43} \\ a_1^{14} & a_2^{24} & a_3^{34} & a_4 \end{matrix}\right| \qquad (\mathrm{II})\ \left|\begin{matrix} a^1 & a^2_{12} & a^3_{13} & a^4_{14} \\ a^1_{21} & a^2 & a^3_{23} & a^4_{24} \\ a^1_{31} & a^2_{32} & a^3 & a^4_{34} \\ a^1_{41} & a^2_{42} & a^3_{43} & a^4 \end{matrix}\right|$$

Le verticali rappresentano altrettanti quadrilateri completi i cui vertici sono punti della configurazione:

$$\left\{\begin{array}{l}
a_1\ \ a_1^{12}a_1^{13}a_1^{14}\equiv A_{12}A_{13}A_{14}\cdot(A^{12}A^{13}A^{14})\equiv\beta_1 \\
a_2^{21}a_2\ \ a_2^{23}a_2^{24}\equiv A_{21}A_{23}A_{24}\cdot(A^{21}A^{23}A^{24})\equiv\beta_2 \\
a_3^{31}a_3^{32}a_3\ \ a_3^{34}\equiv A_{31}A_{32}A_{34}\cdot(A^{31}A^{32}A^{34})\equiv\beta_3 \\
a_4^{41}a_4^{42}a_4^{43}a_4\ \ \equiv A_{41}A_{42}A_{43}\cdot(A^{41}A^{42}A^{43})\equiv\beta_4
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
a^1\ \ a^1_{21}a^1_{31}a^1_{41}\equiv A^{21}A^{31}A^{41}\cdot(A_{21}A_{31}A_{41})\equiv\beta^1 \\
a^2_{12}a^2\ \ a^2_{32}a^2_{42}\equiv A^{12}A^{32}A^{42}\cdot(A_{12}A_{32}A_{42})\equiv\beta^2 \\
a^3_{13}a^3_{23}a^3\ \ a^3_{43}\equiv A^{13}A^{23}A^{43}\cdot(A_{13}A_{23}A_{43})\equiv\beta^3 \\
a^4_{14}a^4_{24}a^4_{34}a^4\ \ \equiv A^{14}A^{24}A^{34}\cdot(A_{14}A_{24}A_{34})\equiv\beta^4
\end{array}\right.$$

40. *Le 8 rette di due orizzontali omonime stanno in un piano e formano due quadrilateri desmici.*

Consideriamo p. es. le due quaderne $a_1 a^{21}_2 a^{31}_3 a^{41}_4$, $a^1 a^2_{12} a^3_{13} a^4_{14}$; esse si trovano sul piano α_1 che coincide con la faccia 234 del tetraedro 1234 annesso alla figura delle 8 rette.

Per i quadrilateri si hanno le 3 prospettività:

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2^{21} a_3^{31} a_4^{41} \\ a^2_{12} a^1 & a^4_{14} a^3_{13} \end{vmatrix}$: punti d'incontro dei lati corrispondenti: $A_{12}A_{21}A^{34}A^{43}$ sulla retta 34

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2^{21} a_3^{31} a_4^{41} \\ a^3_{13} a^4_{14} a^1 & a^2_{12} \end{vmatrix}$ » » » » $A_{13}A^{24}A_{31}A^{42}$ sulla retta 24

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2^{21} a_3^{31} a_4^{41} \\ a^4_{14} a^3_{13} a^2_{12} a_1 \end{vmatrix}$ » » » » $A_{14}A^{23}A^{32}A_{41}$ sulla retta 23

dunque si ha anche la quarta prospettività:

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2^{21} a_3^{31} a_4^{41} \\ a^1 & a^2_{12} a^3_{13} a^4_{14} \end{vmatrix}$ i punti d'incontro: $a_1 a^1$, $a_2^{21} a^2_{12}$, $a_3^{31} a^3_{13}$, $a_4^{41} a^4_{14}$ sono su una retta r_1.

Si può ripetere lo stesso per le seconde, terze e quarte orizzontali e si ha:

$$234 \equiv \alpha_1 \equiv a_1 \; a_2^{21} a_3^{31} a_4^{41} \cdot a^1 \; a^2_{12} a^3_{13} a^4_{14} \quad ; \quad r_1 \equiv a_1 \; a^1 \cdot a_2^{21} a^2_{12} \cdot a_3^{31} a^3_{13} \cdot a_4^{41} a^4_{14}$$
$$134 \equiv \alpha_2 \equiv a_1^{12} a_2 \; a_3^{32} a_4^{42} \cdot a^1_{21} a^2 \; a^3_{23} a^4_{24} \quad ; \quad r_2 \equiv a_1^{12} a^1_{21} \cdot a_2 \; a^2 \cdot a_3^{32} a^3_{23} \cdot a_4^{42} a^4_{24}$$
$$124 \equiv \alpha_3 \equiv a_1^{13} a_2^{23} a_3 \; a_4^{43} \cdot a^1_{31} a^2_{32} a^3 \; a^4_{34} \quad ; \quad r_3 \equiv a_1^{13} a^1_{31} \cdot a_2^{23} a^2_{32} \cdot a_3 \; a^3 \cdot a_4^{43} a^4_{34}$$
$$123 \equiv \alpha_4 \equiv a_1^{14} a_2^{24} a_3^{34} a_4 \cdot a^1_{41} a^2_{42} a^3_{43} a^4 \quad ; \quad r_4 \equiv a_1^{14} a^1_{41} \cdot a_2^{24} a^2_{42} \cdot a_3^{34} a^3_{43} \cdot a_4 \; a^4 .$$

Su ogni faccia α_i le 8 rette a_i, a^i ecc., la r_i ed i tre spigoli A_jA_k, A_kA_l, A_lA_j dànno **12** rette le quali a **3** a **3** concorrono in **16** punti: i quattro situati su r_i ed i **12** punti A_{jk}, A^{jk} situati sui 3 spigoli precedenti; si ottiene così una Cfr. $(16_3 12_4)$ di punti e rette costituita da un sistema desmico di quadrilateri.

Dunque: *se agli elementi della configurazione si aggiungono i 16 punti d'incontro delle rette del gruppo* (I) *con le omologhe del gruppo* (II) *ed i 6 spigoli del tetraedro 1234 si ha una figura composta da 4 configurazioni* $(16_3 12_4)$ *duali della configurazione armonica; su ogni faccia di 1234 se ne trova una.*

41. Oltre alla figura delle 8 rette $\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ a^1 a^2 a^3 a^4 \end{vmatrix}$, nella configurazione ve ne sono altre tre:

$$\begin{vmatrix} a_1^{14} & a_2^{23} & a_3^{32} & a_4^{41} \\ a^1_{41} & a^2_{32} & a^3_{23} & a^4_{14} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_1^{13} & a_2^{24} & a_3^{31} & a_4^{42} \\ a^1_{31} & a^2_{42} & a^3_{13} & a^4_{24} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_1^{12} & a_2^{21} & a_3^{34} & a_4^{43} \\ a^1_{21} & a^2_{12} & a^3_{43} & a^4_{34} \end{vmatrix} .$$

Infatti in ognuna delle coppie, una retta della 1ª orizzontale incontra ogni retta della seconda in punti A_{ij}, A^{ij} e punti $a^k_{ik} a^{ki}_k$ (punti d'incontro di elementi omologhi di (I) e (II)).

Di più è facile verificare che il tetraedro 1234 come è annesso alla 1ª figura delle 8 rette, così è anche annesso alle altre tre. E quindi:

Le 32 rette della configurazione si distribuiscono in quattro figure delle 8 rette rispetto alle quali è annesso uno stesso tetraedro 1234.

42. Da ciò che precede si ricava che *il tetraedro* $1234 \equiv \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ *è anarmonicamente tetro-iperboloidico agli altri due* $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$, $\beta^1\beta^2\beta^3\beta^4$ *le cui facce sono determinate dalle 8 verticali di* (I) *e* (II).

Infatti:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} \text{ iperboloide delle faccie } a_1a_2a_3a_4 \quad ; \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_4 & \beta_3 \end{vmatrix} : a_2^{21}a_1^{12}a_4^{43}a_3^{34}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_4 & \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} : a_3^{31}a_4^{42}a_1^{13}a_2^{24} \quad ; \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 \end{vmatrix} : a_4^{41}a_3^{32}a_2^{23}a_1^{14}$$

ed inoltre

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta^1 & \beta^2 & \beta^3 & \beta^4 \end{vmatrix} : a^1a^2a^3a^4 \quad ; \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta^2 & \beta^1 & \beta^4 & \beta^3 \end{vmatrix} : a^2{}_{12}a^1{}_{21}a^4{}_{34}a^3{}_{43}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta^3 & \beta^4 & \beta^1 & \beta^2 \end{vmatrix} : a^3{}_{13}a^4{}_{24}a^1{}_{31}a^2{}_{42} \quad ; \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta^4 & \beta^3 & \beta^2 & \beta^1 \end{vmatrix} : a^4{}_{14}a^3{}_{23}a^2{}_{32}a^1{}_{41}\,.$$

43. I 16 punti a_ia^i, $a^k{}_{ik}a^{ki}{}_k$ si possono indicare così $R_{ii} \equiv a_ia^i$ ed $R_{ik} \equiv a_k{}^{ki}a^k{}_{ik}$.

Allora le rette r_i saranno: $r_1 \equiv R_{11}R_{12}R_{13}R_{14}$; $r_2 \equiv R_{21}R_{22}R_{23}R_{24}$; $r_3 \equiv R_{31}R_{32}R_{33}R_{34}$; $r_4 \equiv R_{41}R_{42}R_{43}R_{44}$. Disponiamo questi punti nel determinante:

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{vmatrix}. \qquad \text{(R)}$$

I punti delle orizzontali stanno sulle 4 rette $r_1r_2r_3r_4$. I punti delle 4 verticali stanno su altre quattro rette, che sono le intersezioni delle coppie di piani $\beta_1\beta^1 \equiv r^1$; $\beta_2\beta^2 \equiv r^2$; $\beta_3\beta^3 \equiv r^3$; $\beta_4\beta^4 \equiv r^4$. Da ciò risulta che i 16 punti R_{ij} appartengono ad una quinta figura delle 8 rette:

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ r^1 & r^2 & r^3 & r^4 \end{vmatrix}.$$

Però rispetto a questa, il tetraedro $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ non è annesso.

44. Consideriamo la fig. $(24_4 32_3)$ A come figura piana; si potranno dedurre moltissime altre proprietà.

Ai 24 punti fondamentali aggiungiamo i 16 punti R ed alle 32 rette fondamentali le 8 rette r_i, r^i. Anche per i 16 punti R passano 4 rette, p. es. per il

punto R_{11} passano le 4 rette a_1, a^1, r_1, r^1. Su ognuna delle rette r sono 4 punti R (n. prec.); su ogni retta fondamentale sono anche 4 punti: 3 punti fondamentali ed un punto R. Dunque *si avrà una Cfr. 40_4 di punti e rette.*

È questo un risultato, non del tutto privo d'interesse perchè ora si conosce un numero limitatissimo di Cfr. n_4 di punti e rette.

Osservando le 4 Cfr. $(16_3 12_4)$ contenute nelle facce del tetraedro $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ si può ricavare la distribuzione degli elementi della Cfr. $(24_4 32_3)$A e della Cfr. 40_4 in figure ψ.

Per esempio la Cfr. $(16_3 12_4)$ compresa in α_1 è costituita da 16 punti che si possono disporre nel determinante

$$\begin{vmatrix} R_{11} & A^{34} & A^{42} & A^{23} \\ A^{43} & R_{12} & A_{14} & A_{31} \\ A^{24} & A_{41} & R_{13} & A_{12} \\ A^{32} & A_{13} & A_{12} & R_{14} \end{vmatrix} .$$

I 12 termini negativi dello sviluppo corrispondono alle 12 rette che formano il sistema dei 3 quadrilateri desmici. Così si hanno le prime 16 figure ψ.

Ripetendo lo stesso per $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ si ha che: *nella Cfr. 40_4 ora costruita sono contenute 64 figure ψ.*

E si potrebbe continuare.

§ 5.

La configurazione iperboloidica $(24_4 32_3)$B.

45. La configurazione iperboloidica $(24_4 32_3)$B è costituita dai 24 punti d'incontro degli spigoli di un tetraedro con le facce di un altro tetraedro ciclicamente tetro-iperboloidico al primo (v. 90).

Le 32 rette sono:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 \equiv A_{12}A_{13}A_{14} \\ a_2 \equiv A_{21}A_{23}A_{24} \\ a_3 \equiv A_{31}A_{32}A_{34} \\ a_4 \equiv A_{41}A_{42}A_{43} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a^1 \equiv A_{21}A_{31}A_{41} \\ a^2 \equiv A_{12}A_{32}A_{42} \\ a^3 \equiv A_{13}A_{23}A_{43} \\ a^4 \equiv A_{14}A_{24}A_{34} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a^2{}_{12} \equiv A_{12}A^{32}A^{42} \\ a^3{}_{23} \equiv A_{23}A^{43}A^{13} \\ a^4{}_{34} \equiv A_{34}A^{14}A^{24} \\ a^1{}_{41} \equiv A_{41}A^{21}A^{31} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^4{}_{14} \equiv A_{14}A^{34}A^{24} \\ a^1{}_{21} \equiv A_{21}A^{41}A^{31} \\ a^2{}_{32} \equiv A_{32}A^{12}A^{42} \\ a^3{}_{43} \equiv A_{43}A^{23}A^{13} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a^3{}_{13} \equiv A_{13}A^{23}A^{43} \\ a^4{}_{24} \equiv A_{24}A^{14}A^{34} \\ a^1{}_{31} \equiv A_{31}A^{41}A^{21} \\ a^2{}_{42} \equiv A_{42}A^{32}A^{12} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} (a_1{}^{12}) \equiv A_{12}A^{14}A^{31} \\ (a_2{}^{23}) \equiv A_{23}A^{21}A^{42} \\ (a_3{}^{34}) \equiv A_{34}A^{32}A^{13} \\ (a_4{}^{41}) \equiv A_{41}A^{43}A^{24} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} (a_1{}^{14}) \equiv A_{14}A^{12}A^{31} \\ (a_2{}^{21}) \equiv A_{21}A^{23}A^{42} \\ (a_3{}^{32}) \equiv A_{32}A^{34}A^{13} \\ (a_4{}^{43}) \equiv A_{43}A^{41}A^{24} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a_1{}^{13} \equiv A_{13}A^{14}A^{12} \\ a_2{}^{24} \equiv A_{24}A^{23}A^{21} \\ a_3{}^{31} \equiv A_{31}A^{32}A^{34} \\ a_4{}^{42} \equiv A_{42}A^{41}A^{43} \end{array}\right. .$$

I 24 punti sono:

$$\left\{\begin{aligned} A_{12} &\equiv a_1 a^2 a^2_{12} (a_1^{12}) \\ A_{13} &\equiv a_1 a^3 a^3_{13} a_1^{13} \\ A_{14} &\equiv a_1 a^4 a^4_{14} (a_1^{14}) \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} A_{21} &\equiv a_2 a^1 a^1_{21} (a_2^{21}) \\ A_{23} &\equiv a_2 a^3 a^3_{23} (a_2^{23}) \\ A_{24} &\equiv a_2 a^4 a^4_{24} a_2^{24} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} A_{31} &\equiv a_3 a^1_{31} a_3^{31} a^1 \\ A_{32} &\equiv a_3 a^2_{32} (a_3^{32}) a^2 \\ A_{34} &\equiv a_3 a^4_{34} (a_3^{34}) a^4 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} A_{41} &\equiv a_4 a^1 a^1_{41} (a_4^{41}) \\ A_{42} &\equiv a_4 a^2 a^2_{42} a_4^{42} \\ A_{43} &\equiv a_4 a^3 a^3_{43} (a_4^{43}) \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} A^{12} &\equiv a^2_{32} a^2_{42} a_1^{13} (a_1^{14}) \\ A^{13} &\equiv a^3_{23} a^3_{43} (a_3^{34}) (a_3^{32}) \\ A^{14} &\equiv a^4_{34} a^4_{24} a_1^{13} (a_1^{12}) \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} A^{21} &\equiv a^1_{31} a^1_{41} a_2^{24} (a_2^{23}) \\ A^{23} &\equiv a^3_{43} a^3_{13} a_2^{24} (a_2^{21}) \\ A^{24} &\equiv a^4_{14} a^4_{34} (a_4^{41}) (a_4^{43}) \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} A^{31} &\equiv a^1_{41} a^1_{21} (a_1^{12}) (a_1^{14}) \\ A^{32} &\equiv a^2_{12} a^2_{42} a_3^{31} (a_3^{34}) \\ A^{34} &\equiv a^4_{24} a^4_{14} a_3^{31} (a_3^{32}) \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} A^{41} &\equiv a^1_{21} a^1_{31} a_4^{42} (a_4^{43}) \\ A^{42} &\equiv a^2_{12} a^2_{32} (a_2^{23}) (a_2^{21}) \, . \\ A^{43} &\equiv a^3_{23} a^3_{13} (a_4^{41}) a_4^{42} \end{aligned}\right.$$

Le terne di punti allineati sono formate come nella Cfr. $(24_4 32_3)$ A, eccetto le otto terne situate su (a_1^{12}) ; (a_2^{23}) ; (a_3^{34}) ; (a_4^{41}) ; (a_1^{14}) ; (a_2^{21}) ; (a_3^{32}) ; (a_4^{43}). E perciò che i simboli di queste rette sono stati messi in parentesi.

46. Per costruire la configurazione partiamo dalla figura delle otto rette $\left| \begin{matrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ a^1 a^2 a^3 a^4 \end{matrix} \right|$ col tetraedro annesso 1234 e nello spigolo 12 scegliamo un punto arbitrario A^{21} e poi poniamo: $A^{42} \equiv A^{21} A_{23} \, . \, 24$; $A^{32} \equiv A^{42} A_{12} \, . \, 32$; $A^{13} \equiv A^{32} A_{34} \, . \, 13$; $A^{43} \equiv A^{13} A_{23} \, . \, 43$; $A^{24} \equiv A^{43} A_{41} \, . \, 24$; $A^{14} \equiv A^{24} A_{34} \, . \, 14$; $A^{31} \equiv A^{14} A_{12} \, . \, 13$.

Si verifica che $A^{31} A_{41} \, . \, 12 \equiv A^{21}$ e così si ricava un ottagono semplice appartenente alla configurazione. Restano a costruire altre 16 rette.

Dei punti A^{ij} restano A^{12}, A^{23}, A^{34}, A^{41}.

Il punto A^{12} si costruisce come intersezione di 12 con $A^{42} A_{32}$; esso è congiunto anche agli altri 3 punti A^{14}, A^{31}, A^{32}:

$$A^{12} A^{14} A_{13} \quad ; \quad A^{12} A^{31} A_{14} \quad ; \quad A^{12} A^{32} A_{42} \, .$$

Il punto A^{23} è intersezione di 23 con $A^{42} A_{21}$: esso è congiunto anche agli altri 3 punti: A^{43}, A^{13}, A^{21}:

$$A^{23} A^{43} A_{13} \quad ; \quad A^{23} A^{13} A_{43} \quad ; \quad A^{23} A^{21} A_{24} \, .$$

Il punto A^{34} è intersezione di 34 con $A^{14} A_{24}$; esso è congiunto agli altri 3 punti: A^{13}, A^{32}, A^{24}:

$$A^{34} A^{13} A_{32} \quad ; \quad A^{34} A^{32} A_{31} \quad ; \quad A^{34} A^{24} A_{14} \, .$$

E finalmente, il punto A^{41} si costruisce come intersezione di 14 con $A^{43} A_{42}$; esso è congiunto anche ai punti $A^{21} A^{31} A^{24}$:

$$A^{41} A^{21} A_{31} \quad ; \quad A^{41} A^{31} A_{21} \quad ; \quad A^{41} A^{24} A_{43} \, .$$

Dunque i 24 punti si distribuiscono nel seguente modo: I 12 punti A_{ij} ap-

partengono alla figura delle 8 rette: $\begin{vmatrix} a_1a_2a_3a_4 \\ a^1a^2a^3a^4 \end{vmatrix}$; degli altri 12 punti A^{ij} ve ne sono 8, vertici di un ottagono semplice appartenente alla configurazione e gli altri 4 punti sono a 2 a 2 estranei fra loro mentre ognuno di essi è congiunto a 4 dei precedenti.

47. Distribuiamo le 32 rette nei due determinanti:

$$(\mathrm{I}) \begin{vmatrix} a_1 & (a_2^{21}) & a_3^{31} & (a_4^{41}) \\ (a_1^{12}) & a_2 & (a_3^{32}) & a_4^{42} \\ a_1^{13} & (a_2^{23}) & a_3 & (a_4^{43}) \\ (a_1^{14}) & a_2^{24} & (a_3^{34}) & a_4 \end{vmatrix} \qquad (\mathrm{II}) \begin{vmatrix} a^1 & a^2_{12} & a^3_{13} & a^4_{14} \\ a^1_{21} & a^2 & a^3_{23} & a^4_{24} \\ a^1_{31} & a^2_{32} & a^3 & a^4_{34} \\ a^1_{41} & a^2_{42} & a^3_{43} & a^4 \end{vmatrix} .$$

Le 8 verticali sono formate ciascuna da 4 rette complanari, cioè formanti un quadrilatero completo; i vertici di questo sono punti della configurazione

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \ (a_1^{12})\ a_1^{13}\ (a_1^{14}) \equiv A_{12}A_{13}A_{14} \cdot (A^{12}A^{31}A^{14}) \equiv \beta_1 \\ (a_2^{21})\ a_2 \ (a_2^{23})\ a_2^{24} \equiv A_{21}A_{23}A_{24} \cdot (A^{21}A^{23}A^{42}) \equiv \beta_2 \\ a_3^{31}\ (a_3^{32})\ a_3 \ (a_3^{34}) \equiv A_{31}A_{32}A_{34} \cdot (A^{13}A^{32}A^{34}) \equiv \beta_3 \\ (a_4^{41})\ a_4^{42}\ (a_4^{43})\ a_4 \equiv A_{41}A_{42}A_{43} \cdot (A^{43}A^{41}A^{24}) \equiv \beta_4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^1 \ a^1_{21}a^1_{31}a^1_{41} \equiv A^{21}A^{31}A^{41} \cdot (A_{21}A_{31}A_{41}) \equiv \beta^1 \\ a^2_{12}a^2 \ a^2_{32}a^2_{42} \equiv A^{12}A^{32}A^{42} \cdot (A_{12}A_{32}A_{42}) \equiv \beta^2 \\ a^3_{13}a^3_{23}a^3 \ a^3_{43} \equiv A^{13}A^{23}A^{43} \cdot (A_{13}A_{23}A_{43}) \equiv \beta^3 \\ a^4_{14}a^4_{24}a^4_{34}a^4 \equiv A^{14}A^{24}A^{34} \cdot (A_{14}A_{24}A_{34}) \equiv \beta^4 . \end{array} \right.$$

48. Le stesse 32 rette si distribuiscono ad 8 ad 8 nelle facce $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ del tetraedro **1234** e propriamente:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 \equiv a_1 \ (a_2^{21})\ a_3^{31}(a_4^{41}) & ; \ a^1 \ a^2_{12}a^3_{13}a^4_{14} \\ \alpha_2 \equiv (a_1^{12})\ a_2 \ (a_3^{32})\ a_4^{42} & ; \ a^1_{21}a^2 \ a^3_{23}a^4_{24} \\ \alpha_3 \equiv a_1^{13}\ (a_2^{23})\ a_3 \ (a_4^{43}) & ; \ a^1_{31}a^2_{32}a^3 \ a^4_{34} \\ \alpha_4 \equiv (a_1^{14})\ a_2^{24}\ (a_3^{34})\ a_4 & ; \ a^1_{41}a^2_{42}a^3_{43}a^4 . \end{array}$$

I due quadrilateri situati su una stessa α_i sono ciclicamente tetra-prospettivi, ed insieme ai 4 assi di prospettività costituiscono una Cfr. $(16_3 12_4)$ di punti e rette, duale della Cfr. $(12_4 16_3)$B del De Vries (v. 68).

Infatti, per i quadrilateri situati su α_1 si hanno le 3 prospettività:

$$\left| \begin{array}{l} a_1 \ (a_2^{21})\ a_3^{31}(a_4^{41}) \\ a^4_{14}\ a^3_{13}\ a^2_{12}\ a^1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{asse:} \\ A_{14}A^{23}A^{32}A_{41} \equiv 23 \end{array} ; \quad \left| \begin{array}{l} a_1 \ (a_2^{21})\ a_3^{31}(a_4^{41}) \\ a^3_{13}\ a^2_{12}\ a^1 \ a^4_{14} \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{asse:} \\ A_{13}A^{42}A_{31}A^{24} \equiv 24 \end{array} ;$$

$$\left| \begin{array}{l} a_1 \ (a_2^{21})\ a_3^{31}(a_4^{41}) \\ a^2_{12}\ a^1 \ a^4_{14}\ a^3_{13} \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{asse:} \\ A_{12}A_{21}A^{34}A^{43} \equiv 34 \end{array}$$

e quindi anche la quarta:

$$\left|\begin{matrix} a_1(a_2^{21})a_3^{31}(a_4^{41}) \\ a^1\ a^4_{14}\ a^3_{13}\ a^2_{12} \end{matrix}\right| .$$

Per i quadrilateri situati su α_2 si hanno le 3 prospettività:

$$\left|\begin{matrix} (a_1^{12})a_2\ (a_3^{32})a_4^{42} \\ a^2\ \ a^1_{21}\ a^4_{24}\ a^3_{23} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse:} \\ A_{12}A_{21}A^{34}A^{43} \equiv 34 \end{matrix} ; \quad \left|\begin{matrix} (a_1^{12})a_2\ (a_3^{32})a_4^{42} \\ a^1_{21}\ \ a^4_{24}\ a^3_{23}\ a^2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse:} \\ A^{31}A_{24}A^{13}A_{42} \equiv 13 \end{matrix} ;$$

$$\left|\begin{matrix} (a_1^{12})a_2\ (a_3^{32})a_4^{42} \\ a^4_{24}\ \ a^3_{23}\ a^2\ \ a^1_{21} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse:} \\ A^{14}A_{23}A_{32}A^{41} \equiv 14 \end{matrix}$$

e quindi anche la quarta:

$$\left|\begin{matrix} (a_1^{12})a_2(a_3^{32})a_4^{42} \\ a^3_{23}\ a^2\ a^1_{21}\ a_4^{24} \end{matrix}\right| .$$

Per i quadrilateri situati su α_3 si hanno le 3 prospettività:

$$\left|\begin{matrix} a_1^{13}(a_2^{23})a_3\ (a_4^{43}) \\ a^4_{34}\ a^3\ \ a^2_{32}\ a^1_{31} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse:} \\ A^{14}A_{23}A_{32}A^{41} \equiv 14 \end{matrix} ; \quad \left|\begin{matrix} a_1^{13}(a_2^{23})a_3\ (a_4^{43}) \\ a^3\ \ a^2_{32}\ \ a^1_{31}\ a^4_{34} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse:} \\ A_{13}A^{42}A_{31}A^{24} \equiv 24 \end{matrix} ;$$

$$\left|\begin{matrix} a_1^{13}(a_2^{23})a_3\ (a_4^{43}) \\ a^2_{32}\ a^1_{31}\ a^4_{34}\ a^3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse:} \\ A^{12}A^{21}A_{34}A_{43} \equiv 12 \end{matrix}$$

e quindi anche la quarta:

$$\begin{matrix} a_1^{13}(a_2^{23})a_3(a_4^{43}) \\ a^1_{31}\ a^4_{34}\ a^3\ a^2_{32} \end{matrix} .$$

E per i quadrilateri situati su α_4 si hanno le 3 prospettività:

$$\left|\begin{matrix} (a_1^{14})a_2^{24}(a_3^{34})a_4 \\ a^2_{42}\ a^1_{41}\ a^4\ \ a^3_{43} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse:} \\ A^{12}A^{21}A_{34}A_{43} \equiv 12 \end{matrix} ; \quad \left|\begin{matrix} (a_1^{14})a_2^{24}(a_3^{34})a_4 \\ a^1_{41}\ a^4\ \ a^3_{43}\ a^2_{42} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse:} \\ A^{31}A_{24}A^{13}A_{42} \equiv 13 \end{matrix} ;$$

$$\left|\begin{matrix} (a_1^{14})a_2^{24}(a_3^{34})a_4 \\ a^4\ \ a^3_{43}\ a^2_{42}\ a^1_{41} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{asse:} \\ A_{14}A^{23}A^{32}A_{41} \equiv 32 \end{matrix}$$

e quindi anche la quarta:

$$\left|\begin{matrix} (a_1^{14})a_2^{24}(a_3^{34})a_4 \\ a^3_{43}\ a^2_{42}\ a^1_{41}\ a^4 \end{matrix}\right| .$$

49 Anche nella Cfr. $(24_4 32_3)$B le 32 rette si distribuiscono in 4 figure delle 8 rette: la $\left|\begin{matrix} a_1a_2a_3a_4 \\ a^1a^2a^3a^4 \end{matrix}\right|$ primitiva e le altre tre:

$$\begin{matrix} a_1^{14}(a_2^{21})(a_3^{32})(a_4^{43}) \\ a^1_{21}\ \ a^2_{32}\ \ a^3_{43}\ \ a^4_{14} \end{matrix} ; \quad \left.\begin{matrix} (a_1^{12})(a_2^{23})(a_3^{34})(a_4^{41}) \\ a^1_{41}\ \ a^2_{12}\ \ a^3_{23}\ \ a^4_{34} \end{matrix}\right| ; \quad \begin{matrix} a_1^{13}\ a_2^{24}\ a_3^{31}\ a_4^{42} \\ a^1_{13}\ a^2_{24}\ a^3_{31}\ a^4_{42} \end{matrix} .$$

Si verifica facilmente che in ognuna delle ottuple precedenti le quattro rette della prima quaderna si appoggiano alle 4 rette della seconda.

50. Si deduce allora che: *il tetraedro* $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ *è ciclicamente tetraiperboloidico agli altri due* $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$, $\beta^1\beta^2\beta^3\beta^4$.

Ed infatti, per $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $\beta^1\beta^2\beta^3\beta^4$ si ha:

$$\left|\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4\end{matrix}\right| \begin{matrix}\text{Iperboloide delle faccie:}\\ a_1a_2a_3a_4\end{matrix} \quad ; \quad \left|\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_1\end{matrix}\right| \begin{matrix}\text{Iperboloide delle faccie:}\\ (a_2{}^{21})(a_3{}^{32})(a_4{}^{43})(a_1{}^{14})\end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_3 & \beta_4 & \beta_1 & \beta_2\end{matrix}\right| \begin{matrix}\text{Iperboloide delle faccie:}\\ a_3{}^{31}a_4{}^{42}a_1{}^{13}a_2{}^{24}\end{matrix} \quad ; \quad \left|\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_4 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{matrix}\right| \begin{matrix}\text{Iperboloide delle faccie:}\\ (a_4{}^{41})(a_1{}^{12})(a_2{}^{23})(a_3{}^{34})\end{matrix}$$

e per gli altri $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $\beta^1\beta^2\beta^3\beta^4$ si ha:

$$\left|\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \beta^1 & \beta^2 & \beta^3 & \beta^4\end{matrix}\right| : a^1a^2a^3a^4 \quad ; \quad \left|\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \beta^2 & \beta^3 & \beta^4 & \beta^1\end{matrix}\right| : a^2{}_{12}a^3{}_{23}a^4{}_{34}a^1{}_{41} \; ;$$

$$\left|\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \beta^3 & \beta^4 & \beta^1 & \beta^2\end{matrix}\right| : a^3{}_{13}a^4{}_{24}a^1{}_{31}a^2{}_{42} \quad ; \quad \left|\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \beta^4 & \beta^1 & \beta^2 & \beta^3\end{matrix}\right| : a^4{}_{14}a^1{}_{21}a^2{}_{32}a^3{}_{43} \, .$$

PARTE TERZA

CONTRIBUTO ALLA TEORIA GENERALE DELLE CONFIGURAZIONI.

Studio sulle figure α

§ 1.

Le figure αn_3 per i più piccoli valori di n.

1. Chiameremo figura αn_3 un gruppo di n punti situati a 3 a 3 su $n-1$ rette, in modo che su ogni retta, senza eccezione, stiano 3 punti, e per ogni punto, *eccetto che per tre* (punti eccezionali), passino 3 rette; per i 3 punti eccezionali passano due rette invece di tre.

Queste figure possono essere di cinque tipi diversi:

1.° I tre punti eccezionali sono a due a due estranei (fig. 3ª).

2.° Una sola coppia di punti eccezionali è congiunta (fig. 4ª).

3.° Due coppie di punti eccezionali sono congiunte (fig. 5ª).

4.° I 3 punti eccezionali sono a 2 a 2 congiunti senza essere in linea retta (fig. 6ª).

5.° I 3 punti eccezionali sono a 2 a 2 congiunti ed in linea retta (fig. 7ª).

2. Per le fig. αn_3 del 1° tipo il valore minimo di n è 7. La fig. $\alpha 7_3$ corrispondente è costituita dai 6 vertici di un quadrilatero completo, dai 4 lati e da due delle 3 diagonali, col corrispondente punto d'intersezione (fig. 3ª).

Il gruppo della figura è un G_{24} in isomorfismo meriedrico col gruppo totale delle sostituzioni su 3 elementi (i 3 punti eccezionali). Le sostituzioni che mutano in sè stessa la terna di punti eccezionali 5, 6, 7 mutano anche in sè stessa la quaderna dei rimanenti punti 1, 2, 3, 4.

Vi sono 4 sostituzioni, che lasciano inalterati i 3 punti eccezionali, cioè:

$$L_0 = 1 \quad , \quad L_1 \equiv (12)(34) \quad , \quad L_2 \equiv (13)(24) \quad , \quad L_3 \equiv (14)(23) \; .$$

Esse costituiscono un sottogruppo G_4.

I tre punti eccezionali sono scambiati ciclicamente da 8 sostituzioni:

$$\left\{\begin{array}{l} M_1 \equiv (1)(234)(576) \\ M_2 \equiv (2)(143)(576) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} M_1^2 \equiv (1)(243)(567) \\ M_2^2 \equiv (2)(134)(567) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} M_3 \equiv (3)(142)(576) \\ M_4 \equiv (4)(321)(576) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} M_3^2 \equiv (3)(124)(567) \\ M_4^2 \equiv (4)(312)(567) \end{array}\right.$$

Queste, insieme alle precedenti, costituiscono il sottogruppo G_{12} corrispondente al gruppo ciclico su tre elementi 5, 6, 7.

Altre 12 sostituzioni mantengono fisso un punto eccezionale scambiando gli altri due. Esse si ottengono moltiplicando le 12 sostituzioni precedenti per la nuova sostituzione $N \equiv (4321)(56)(7)$:

$N \equiv (4321)(56)(7)$	$NM_1 \equiv (12)(3)(4)(5)(67)$	$NM_1^2 \equiv (1342)(6)(57)$
$NL_1 \equiv (13)(2)(4)(56)(7)$	$NM_2 \equiv (1324)(5)(67)$	$NM_2^2 \equiv (1)(23)(4)(6)(57)$
$NL_2 \equiv (1234)(56)(7)$	$NM_3 \equiv (1)(2)(34)(5)(67)$	$NM_3^2 \equiv (1243)(6)(57)$
$NL_3 \equiv (1)(24)(3)(56)(7)$	$NM_4 \equiv (1423)(5)(67)$	$NM_4^2 \equiv (14)(2)(3)(6)(57)$

Così si ottiene il gruppo G_{24} la cui serie di composizione è $(G_{24}; G_{12}; G_4; G_2 \equiv (1, L_1); G_1 = 1)$.

3. Per le fig. αn_3 di 2° tipo il valore minimo di n è 8; la fig. $\alpha 8_3$ corrispondente si ricava dalla fig. $\alpha 7_3$ nel seguente modo:

Si considerano le due rette passanti per uno dei 3 punti eccezionali, p. es. 7 e di questo 7 non si tiene più conto; per uno dei rimanenti punti eccezionali, p. es. 5 si conduca una retta che incontra le due precedenti in 7, 8 (fig. 4ª). I 3 nuovi punti eccezionali sono 6, 7, 8.

Il gruppo di questa figura è costituito soltanto dalle 4 sostituzioni:

$$L_0 \equiv 1$$
$$L_1 \equiv (13)(24)(5)(6)(7)(8)$$
$$L_2 \equiv (12)(34)(5)(6)(78)$$
$$L_3 \equiv (14)(23)(5)(6)(78)$$

due di esse L_0 ed L_1 lasciano inalterati i 3 punti eccezionali 6, 7, 8, le altre due lasciano fisso il punto 6 e scambiano fra loro gli altri due.

4. Il valore minimo di n per le fig. αn_3 di 3° tipo è 10; corrispondentemente si hanno due tipi di fig. $\alpha 10_3$ rappresentate dalle figure 5ª (*a*) e 5ª (*b*).

Il gruppo della fig. $\alpha 10_3$ tipo (*a*) è costituito dalle due sostituzioni:

$$L_0 \equiv 1$$
$$L_1 \equiv (13)(56)(2)(4)(7)(8)(9.10) .$$

Il gruppo della fig. $\alpha 10_3$ tipo (*b*) è pure formato da due sostituzioni, le quali, per la notazione usata, coincidono con le precedenti.

5. Il valore minimo di n per le fig. αn_3 di 4° tipo è 10. La fig. $\alpha 10_3$ corrispondente si può ottenere dalla $\alpha 7_3$ conducendo tre rette arbitrarie per i punti eccezionali; i punti eccezionali della nuova figura saranno i punti d'incontro 8, 9, 10, di tali rette a due a due (fig. 6ª).

Il gruppo di questa fig. $\alpha 10_3$ è oloedricamente isomorfo al gruppo G_{24} della $\alpha 7_3$.

Le sue sostituzioni sono:

1.° $l_0 = 1$; $l_1 \equiv (12)(34)$; $l_2 \equiv (13)(24)$; $l_3 \equiv (14)(23)$, che lasciano inalterati i 3 punti fondamentali 8, 9, 10 e nello stesso tempo gli altri 3 punti 5, 6, 7.

2.° Le otto sostituzioni:

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 \equiv (234)\,(576)\,(8109) \\ m_2 \equiv (143)\,(576)\,(8109) \\ m_3 \equiv (412)\,(576)\,(8109) \\ m_4 \equiv (321)\,(576)\,(8109) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} m_1^2 \equiv (243)\,(567)\,(89.10) \\ m_2^2 \equiv (134)\,(567)\,(89.10) \\ m_3^2 \equiv (421)\,(567)\,(89.10) \\ m_4^2 \equiv (312)\,(567)\,(89.10) \end{array}\right.$$

che permutano circolarmente i 3 punti eccezionali 8, 9, 10, e che, nello stesso tempo operano la stessa permutazione sugli altri 3 punti 5, 6, 7.

3.° Le 12 sostituzioni che si ottengono moltiplicando le 12 precedenti per la nuova sostituzione $n \equiv (4321)\,(56)\,(810)$:

$$\left\{\begin{array}{l} nl_0 \equiv (4321)\,(56)\,(810) \\ nl_1 \equiv (13)\,(56)\,(810) \\ nl_2 \equiv (1234)\,(56)\,(810) \\ nl_3 \equiv (24)\,(56)\,(810) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} nm_1 \equiv (12)\,(67)\,(89) \\ nm_2 \equiv (1324)\,(67)\,(89) \\ nm_3 \equiv (34)\,(67)\,(89) \\ nm_4 \equiv (1423)\,(67)\,(89) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} nm_1^2 \equiv (1342)\,(57)\,(9.10) \\ nm_2^2 \equiv (23)\,(57)\,(9.10) \\ nm_3^2 \equiv (1243)\,(57)\,(9.10) \\ nm_4^2 \equiv (14)\,(57)\,(9.10) \end{array}\right. .$$

Esse lasciano fermo un punto eccezionale permutando gli altri due; lo stesso scambio operano rispetto a 5, 6, 7

6. Per le fig. αn_3 del 5° tipo il valore minimo di n è 9. La corrispondente fig. $\alpha 9_3$ è costituita da un quadrilatero, dalle sue 3 rette diagonali e da una ottava retta arbitraria; i 3 punti eccezionali sono i punti d'incontro di quest'ultima retta con le 3 diagonali (fig. 7ª).

Il gruppo di questa fig $\alpha 9_3$ è oloedricamente isomorfo al gruppo G_{24} della $\alpha 7_3$. Le sue sostituzioni sono:

1.° $\lambda_0 \equiv 1\,;\ \lambda_1 \equiv (13)\,(56)\,;\ \lambda_2 \equiv (13)\,(42)\,;\ \lambda_3 \equiv (42)\,(56)$.

2.° Otto sostituzioni che permutano circolarmente i 3 punti eccezionali 7, 8, 9:

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_1 \equiv (164)\,(235)\,(798) \\ \mu_2 \equiv (162)\,(354)\,(798) \\ \mu_3 \equiv (152)\,(364)\,(798) \\ \mu_4 \equiv (154)\,(236)\,(798) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \mu_1^2 \equiv (146)\,(253)\,(789) \\ \mu_2^2 \equiv (126)\,(345)\,(789) \\ \mu_3^2 \equiv (125)\,(346)\,(789) \\ \mu_4^2 \equiv (145)\,(263)\,(789) \end{array}\right. .$$

Queste, insieme alle precedenti costituiscono il gruppo G'_{12} isomorfo al sottogruppo G_{12} di G_{24}.

3.° Dodici sostituzioni, che lasciano fermo uno dei punti eccezionali, permutando gli altri due:

$$\left\{\begin{array}{l} \nu \equiv (1432)\,(56)\,(78)\,(9) \\ \nu\lambda_1 \equiv (14)\,(23)\,(5)\,(6)\,(78)\,(9) \\ \nu\lambda_2 \equiv (1234)\,(56)\,(78)\,(9) \\ \nu\lambda_3 \equiv (12)\,(34)\,(5)\,(6)\,(78)\,(9) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \nu\mu_1 \equiv (1)\,(26)\,(3)\,(45)\,(7)\,(89) \\ \nu\mu_2 \equiv (13)\,(2645)\,(7)\,(89) \\ \nu\mu_3 \equiv (13)\,(2546)\,(7)\,(89) \\ \nu\mu_4 \equiv (1)\,(25)\,(3)\,(46)\,(7)\,(89) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \nu\mu_1^2 \equiv (1635)\,(24)\,(79)\,(8) \\ \nu\mu_2^2 \equiv (15)\,(2)\,(36)\,(4)\,(79)\,(8) \\ \nu\mu_3^2 \equiv (16)\,(2)\,(35)\,(4)\,(79)\,(8) \\ \nu\mu_4^2 \equiv (1536)\,(24)\,(79)\,(8) \end{array}\right. .$$

7. Indicheremo con fig. $\alpha'(n-1)_3$ la figura duale della fig. αn_3, cioè una figura formata da $n-1$ punti ed n rette tali che per ogni punto, senza eccezione,

passino tre rette e su ogni retta, eccetto che su tre, giacciano 3 punti; sulle 3 rette eccezionali si trovano due punti invece di 3. Ve ne sono di cinque tipi, duali di quelli esaminati.

Si trovano così le 5 figure: $\alpha' 6_3$, $\alpha' 7_3$, $\alpha' 9_3$ (tipo *a* o *b*), $\alpha' 9_3$ (IV tipo) ed $\alpha' 8_3$.

I gruppi di queste figure sono oloedricamente isomorfi ai gruppi di 2, 4 o 24 sostituzioni che mutano in sè stesse le figure α corrispondenti.

§ 2.

Operazioni ω_1 ed ω_2.

8. Per i 3 punti eccezionali a, b, c di una fig. αn_3 si conducano 3 rette arbitrarie che formino il triangolo ABC; si avrà una fig. $\alpha(n+3)_3$ con i punti eccezionali A, B, C. Questa operazione geometrica, con la quale, da una fig. αn_3 qualunque si ricava una fig. $\alpha(n+3)_3$ di 4° tipo, la chiameremo *operazione* ω_1. Essa gode della seguente proprietà fondamentale:

Il gruppo della fig. $\alpha(n+3)_3$ *è oloedricamente isomorfo al gruppo della figura* αn_3 *primitiva.*

Per dimostrarlo segneremo i punti A, B, C in modo che AB passi per c, BC per a e CA per b. In questa ipotesi è facile vedere che:

1.° Se A, B, C restano fermi, anche a, b, c restano fermi e viceversa.

2.° Se A, B, C si permutano ciclicamente, anche a, b, c si permutano ciclicamente nello stesso modo, e viceversa.

3.° Se un punto eccezionale A resta fermo e gli altri due si scambiano fra di loro, il corrispondente punto a resta fermo e gli altri due si scambiano fra loro, e viceversa.

Dunque, per passare dal gruppo della fig. αn_3 con i 3 punti eccezionali a, b, c al gruppo della fig. $\alpha(n+3)_3$ con i punti eccezionali A, B, C basta *aggiungere* ai cicli delle sostituzioni del primo, i cicli che si ottengono mutando a, b, c rispettivamente in A, B, C.

9. Esempio 1.° Tre rette concorrenti in 5 si sechino con le due rette $12b$, $43a$ e sia $c \equiv (1.4)(2.3)$; risulterà la fig. $\alpha 8_3$ (fig. 8ª) con i 3 punti eccezionali a, b, c.

Una facile discussione condurrebbe a questo risultato: la fig. $\alpha 8_3$ minima del 2° tipo e la nuova fig. $\alpha 8_3$ di 1° tipo sono le sole fig. $\alpha 8_3$ possibili. La 1ª ha il gruppo di 4 sostituzioni (n. 3); l'altra ha il gruppo composto dalle 6 sostituzioni seguenti:

$$g_1 \equiv 1 ,$$

$$g_2 \equiv (5)(13)(24)(ab)(c) ,$$

$$g_3 \equiv (3)(15)(24)(ac)(b) ,$$

$$g_4 \equiv (1)(24)(35)(bc)(a) ,$$

$$g_5 \equiv (2)(4)(153)(acb) ,$$

$$g_6 \equiv (2)(4)(135)(abc) .$$

Applichiamo l'operazione ω_1 ed avremo la fig. $\alpha 11_3$ rappresentata dalla fig. 8ª bis;

questa avrà il gruppo formato dalle 6 sostituzioni:

$$g_1 \equiv 1\ ,$$
$$g_2 \equiv (5)\,(13)\,(24)\,(ab)\,(c)\,(AB)\,(C)\ ,$$
$$g_3 \equiv (3)\,(15)\,(24)\,(ac)\,(b)\,(AC)\,(B)\ ,$$
$$g_4 \equiv (1)\,(24)\,(35)\,(bc)\,(a)\,(BC)\,(A)\ ,$$
$$g_5 \equiv (2)\,(4)\,(153)\,(acb)\,(ACB)\ ,$$
$$g_6 \equiv (2)\,(4)\,(135)\,(abc)\,(ABC)\ .$$

Esempio 2.° La fig. 9ª rappresenta una fig. $\alpha 10_3$ di 1° tipo; il suo gruppo è costituito da 3 sostituzioni:

$$g_1 \equiv 1\ ,$$
$$g_2 \equiv (4)\,(123)\,(567)\,(abc)\ ,$$
$$g_3 \equiv (4)\,(132)\,(576)\,(acb)\ .$$

Applicando l'operazione ω_1 avremo la fig. $\alpha 13_3$ rappresentata dalla fig. 9ª bis, che ha il gruppo costituito dalle 3 sostituzioni:

$$g_1 \equiv 1\ ,$$
$$g_2 \equiv (4)\,(123)\,(567)\,(abc)\,(ABC)\ ,$$
$$g_3 \equiv (4)\,(132)\,(576)\,(acb)\,(ACB)\ .$$

Nel n.° 5 abbiamo trattato un altro esempio; la fig. $\alpha 10_3$ ivi considerata si ottiene dalla *minima* fig. $\alpha 7_3$ mediante l'operazione ω_1.

10. Partendo dalla fig. $\alpha 7_3$, mediante l'applicazione successiva dell'operazione ω_1 si ottengono le figure di 4° tipo $\alpha 10_3$, $\alpha 13_3$, $\alpha 16_3$ ... col gruppo di 24 sostituzioni.

Dalla $\alpha 8_3$ di 2° tipo si ottengono le figure del 4° tipo $\alpha 11_3$, $\alpha 14_3$, ... col gruppo di 4 sostituzioni.

Dalla $\alpha 10_3$ di 3° tipo (a o b) si ottengono le fig. del 4° tipo (a o b): $\alpha 13_3$, $\alpha 16_3$, ... col gruppo di due sostituzioni.

Dalla $\alpha 9_3$ di 5° tipo si ottengono le fig. del 4° tipo $\alpha 12_3$, $\alpha 15_3$, ... col gruppo di 24 sostituzioni.

E finalmente, dalla fig. $\alpha 10_3$ del 4° tipo si ricavano le stesse figure dedotte da $\alpha 7_3$, eccetto la $\alpha 10_3$ stessa.

Dunque: *Le fig.* αn_3 *del 4° tipo, che si deducono dalle minime fig.* αn_3 *mediante l'applicazione successiva dell'operazione* ω_1 *hanno il gruppo costituito da 2, 4 oppure 24 sostituzioni.*

Di più, dalle fig. αn_3 del n. 9 si ricavano delle fig. α col gruppo di 3 oppure di 6 sostituzioni.

11. Per i 3 punti eccezionali a, b, c di una fig. αn_3 qualunque si conducano tre rette concorrenti in un punto D; poi si conduca un'altra retta arbitraria che incontri Da in A, Db in B e Dc in C; si otterrà una fig. $\alpha(n+4)_3$ del 5° tipo, con i punti eccezionali A, B, C. Questa operazione la diremo *operazione* ω_2.

Per passare dal gruppo di αn_3 a quello di $\alpha(n+4)_3$ basta osservare che il punto D resta fermo e che A, B, C si permutano come i punti eccezionali a, b, c della figura primitiva. Quindi da ogni sostituzione del gruppo di αn_3 si ricava una sostituzione del gruppo di $\alpha(n+4)_3$ *aggiungendo* (D) ed i cicli che si ottengono dai cicli formati con a, b, c mutando questi punti rispettivamente in A, B, C.

E si conchiude anche qui che: *Le figure* αn_3 *del 5º tipo, che si deducono dalle minime fig.* αn_3 *mediante l'operazione* ω_2 *hanno il gruppo costituito da 2, 4 oppure 24 sostituzioni.*

12. Sia αn_3 una figura α qualunque; se si applicano successivamente, prima l'operazione ω_1 e poi la ω_2 si ha una fig. $\alpha(n+7)_3$; se invece si applica prima la ω_2 e poi la ω_1 si ha un'altra fig. $\alpha(n+7)_3$, la quale *è distinta dalla prima.*

Si deduce da ciò un metodo per ricavare, per ogni valore di n, tutte le figure αn_3 del tipo qui studiato.

Alla fig. $\alpha 7_3$ applichiamo successivamente x volte l'operazione ω_1 ed y volte l'operazione ω_2; otterremo una fig. αn_3 se x, y soddisfano all'equazione indeterminata

$$3x + 4y = n - 7 .$$

Da cui si ricava:

$$x = -(n-7) + 4k$$
$$y = \quad (n-7) - 3k .$$

Perchè le soluzioni siano intere e positive dev'essere:

$$\mathrm{E}\left(\frac{n-7}{4}\right) \leqq k < \mathrm{E}\left(\frac{n-7}{3}\right).$$

si troveranno così per k i valori $k_1, k_1+1, \ldots, k_1+l$.

Per $k = k_1$ sia $x + y = k_1$; si dovranno eseguire $n - 7 - 3k_1$ operazioni ω_2 e $k_1 - (n - 7 - 3k_1)$ operazioni ω_1; ciò sarà possibile in

$$\binom{k_1}{n-7-3k_1} = \binom{k_1}{k_1-(n-7-3k_1)}$$

modi diversi.

Sicchè il numero delle fig. αn_3 distinte, che si ricavano partendo dalla $\alpha 7_3$ è:

$$\binom{k_1}{n-7-3k_1} + \binom{k_1+1}{n-10-3k_1} + \binom{k_1+2}{n-13-3k_1} + \cdots + \binom{k_1+l}{n-(7+3l)-3k_1}.$$

13. Esempio. Posto $n = 30$ si ha l'equazione: $3x + 4y = 23$ che ammette le due soluzioni intere:

$$\begin{cases} x = -23 + 4 . 6 \\ y = \quad 23 - 3 . 6 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = -23 + 4 . 7 \\ y = \quad 23 - 3 . 7 \end{cases}.$$

Si ha qui $k_1 = 6$ ed $l = 1$.

Si potranno perciò eseguire 5 operazioni ω_2 ed una operazione ω_1, oppure 5

operazioni ω_1 e 2 operazioni ω_2. Il numero delle fig. αn_3 che si possono ottenere per $n = 30$ è $\binom{6}{1} + \binom{7}{5} = 27$.

Dunque: *Partendo dalla fig.* $\alpha 7_3$ *si possono ottenere 27 fig.* $\alpha 30_3$ *di 1° o 5° tipo col gruppo di 24 sostituzioni,* e ciò mediante operazioni ω_1 ed ω_2.

14. Si può prendere come punto di partenza la fig. $\alpha 8_3$ del n. 4 ed allora si possono ricavare fig. αn_3 col gruppo di 4 sostituzioni; basterà risolvere l'equazione indeterminata

$$3x + 4y = n - 8 .$$

Dalla fig. $\alpha 8_3$ del n. 9 si possono ricavare fig. αn_3 col gruppo di 24 sostituzioni, e così via.

Si conchiude che: *Per ogni valore di* n *si possono costruire insiemi di fig.* αn_3 *col gruppo di 2, 3, 4, 6 oppure 24 sostituzioni.*

15. Le operazioni ω_1, ω_2 sono le più semplici fra quelle che permettono di passare da una fig. αn_3 ad una fig. αm_3 con $m > n$. Ve ne sono ancora altre, ma queste, o conducono a fig. $\alpha(n + k)_3$ con $k > 4$, oppure sono tali che il gruppo della fig. αn_3 non si può facilmente estendere.

§ 3.

Configurazioni irregolari n_3 dedotte dalle figure α.

16. Se una configurazione n_3 contiene una fig. αm_3 dovrà anche contenere una fig. $\alpha(n - m)_3$ circoscritta alla prima, cioè tale che il trilatero delle sue rette eccezionali sia circoscritto al triangolo dei punti eccezionali di αm_3.

In base a questa osservazione ci riuscirà possibile costruire, per ogni valore di $n > 13$ numerose configurazioni irregolari n_3, mediante la *composizione* di una fig. αm_3 con una fig. $\alpha'(n - m)_3$.

La più semplice configurazione di questo tipo è la Cfr. 13_3 ottenuta *componendo* una fig. $\alpha 7_3$ con una fig. $\alpha' 6_3$ duale di $\alpha 7_3$.

La fig. $\alpha' 6_3$ (fig. 10ª), essendo duale di $\alpha 7_3$ risulta costituita da un quadrangolo completo: i 4 vertici 8 . 9 . 12 . 13 e due dei 3 punti diagonali: 10 e 11 danno i 6 punti; i 6 lati e la congiungente dei due punti diagonali danno le 7 rette; le rette eccezionali sono 8 . 9; 12 . 13; 10 . 11.

La configurazione 13_3 ottenuta risulta dunque (fig. 11ª) costituita da un quadrangolo e da un quadrilatero in tale posizione che il trilatero diagonale del 2° è circoscritto al triangolo diagonale del primo.

Per trovarne il gruppo basterà tener presenti i gruppi delle fig. $\alpha 7_3$ ed $\alpha' 6_3$.

Il gruppo di $\alpha 7_3$ è stato trovato nel n. 2; il gruppo di $\alpha' 6_3$, oloedricamente isomorfo al primo è composto dalle sostituzioni seguenti:

$l_0 \equiv 1$ | $m_1 \equiv (10 . 9 . 12)(13 . 11 . 8)$ | $m_1^2 \equiv (10 . 12 . 9)(13 . 8 . 11)$

$l_1 \equiv (8)(9)(10 . 11)(12 . 13)$ | $m_2 \equiv (10 . 8 . 12)(13 . 11 . 9)$ | $m_2^2 \equiv (10 . 12 . 8)(13 . 9 . 11)$

$l_2 \equiv (89)(10)(11)(12 . 13)$ | $m_3 \equiv (10 . 8 . 13)(11 . 9 . 12)$ | $m_3^2 \equiv (10 . 13 . 8)(11 . 12 . 9)$

$l_3 \equiv (89)(10 . 11)(12)(13)$ | $m_4 \equiv (10 . 9 . 13)(11 . 8 . 12)$ | $m_4^2 \equiv (10 . 13 . 9)(11 . 12 . 8)$

Più i prodotti di queste sostituzioni per l'altra $n \equiv (12.13)(10.8.11.9)$

$$\left\{\begin{array}{l} nl_0 \equiv (12.13)(10.8.11.9) \\ nl_1 \equiv (12)(13)(10.8)(9.11) \\ nl_2 \equiv (12)(13)(10.9)(8.11) \\ nl_3 \equiv (12.13)(10.9.8.11) \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} nm_1 \equiv (8)(9)(10.13.11.12) \\ nm_2 \equiv (89)(10.13)(11.12) \\ nm_3 \equiv (89)(10.12)(11.13) \\ nm_4 \equiv (8)(9)(10.13.11.12) \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} nm_1^2 \equiv (10.11)(8.13.9.12) \\ nm_2^2 \equiv (10)(11)(8.13)(9.12) \\ nm_3^2 \equiv (10)(11)(8.12)(9.13) \\ nm_4^2 \equiv (10.11)(8.12.9.13) \end{array}\right. .$$

Riunendo insieme i cicli di una sostituzione del gruppo di $\alpha 7_3$ con i cicli di una sostituzione di $\alpha' 6_3$ si avrà una sostituzione del gruppo della Cfr. 13_3 soltanto se le coppie di punti 8, 9; 10, 11; 12, 13 situate sulle rette eccezionali di $\alpha' 6_3$ sono sottoposte alle stesse permutazioni dei corrispondenti punti eccezionali 5, 6, 7 di $\alpha 7_3$.

E, non essendovi alcuna sostituzione che muti un punto di $\alpha' 6_3$ in un punto di $\alpha 7_3$, si conchiude che il gruppo della Cfr. 13_3 è costituito dalle 96 sostituzioni seguenti:

1.° I prodotti delle L_0, L_1, L_2, L_3 per le l_0, l_1, l_2, l_3;
2.° » » M_1, M_2, M_3, M_4 per le m_1, m_2, m_3, m_4;
3.° » » $M_1^2, M_2^2, M_3^2, M_4^2$ per le $m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2$;
4.° » » N, NL_1, NL_2, NL_3 per le n, nl_1, nl_2, nl_3;
5.° » » NM_1, NM_2, NM_3, NM_4 per le nm_1, nm_2, nm_3, nm_4;
6.° » » $NM_1^2, NM_2^2, NM_3^2, NM_4^2$ per le $nm_1^2, nm_2^2, nm_3^2, nm_4^2$.

Questo gruppo G_{96} è meriedricamente isomorfo al gruppo G_{24} della fig. $\alpha 7_3$ e perciò la sua serie di composizione è:

$$(G_{96}, G_{48}, G_{16}, G_8, G_4, G_2, G_1)$$

17. Le considerazioni del n. prec. valgono in generale per tutte le configurazioni che si possono ottenere mediante la composizione di una fig. αm_3 con una fig. $\alpha'(n-m)_3$. Il gruppo di ciascuna di queste due figure si ottiene con un numero limitatissimo di tentativi, perchè esso deve lasciare immutato il sistema dei 3 punti o delle tre rette eccezionali. Di più un punto di αm_3 non può mutarsi in un punto di $\alpha'(n-m)_3$ e le sostituzioni del gruppo della Cfr. n_3 si ottengono *componendo* fra di loro le sostituzioni dei due gruppi delle fig. αm_3 ed $\alpha'(n-m)_3$ con la seguente avvertenza: *ai cicli di una sostituzione di* $\alpha \mathrm{m}_3$, *che opera una certa permutazione sui punti eccezionali* a, b, c *si uniscono i cicli di quelle sostituzioni di* $\alpha'(\mathrm{n}-\mathrm{m})_3$, *che operano la stessa permutazione sulle rette eccezionali* a', b', c' *passanti rispettivamente per* a, b, c (come si è fatto per l'esempio della Cfr. 13_3 del n. prec.).

Componendo le 6 figure α *minime* con le duali si hanno 36 configurazioni n_3 insieme ai loro gruppi.

Ecco il quadro di queste configurazioni:

$13_3 \equiv \alpha 7_3 + \alpha' 6_3$ (G_{96})
$14_3 \equiv \alpha 7_3 + \alpha' 7_3$ (G_{16})
$15_3 \equiv \alpha 7_3 + \alpha' 8_3$ (G_{96})
$16_3(1) \equiv \alpha 7_3 + \alpha' 9_3 (a)$ (G_8)
$16_3(2) \equiv \alpha 7_3 + \alpha' 9_3 (b)$ (G_8)
$16_3(3) \equiv \alpha 7_3 + \alpha' 9_3$ (4° tipo) (G_{96})

$14_3(2) \equiv \alpha 8_3 + \alpha' 6_3$ (G_8)
$15_3(2) \equiv \alpha 8_3 + \alpha' 7_3$ (G_8)
$16_3(4) \equiv \alpha 8_3 + \alpha' 8_3$ (G_8)
$17_3(1) \equiv \alpha 8_3 + \alpha' 9_3 (a)$ (G_4)
$17_3(2) \equiv \alpha 8_3 + \alpha' 9_3 (b)$ (G_4)
$17_3(3) \equiv \alpha 8_3 + \alpha' 9_3$ (tipo 4°) (G_8)

$15_3(3) \equiv \alpha 9_3 + \alpha' 6_3$ (G_{96})
$16_3(5) \equiv \alpha 9_3 + \alpha' 7_3$ (G_{16})
$17_3(4) \equiv \alpha 9_3 + \alpha' 8_3$ (G_4)
$18_3(1) \equiv \alpha 9_3 + \alpha' 9_3 (a)$ (G_8)
$18_3(2) \equiv \alpha 9_3 + \alpha' 9_3 (b)$ (G_8)
$18_3(3) \equiv \alpha 9_3 + \alpha' 9_3$ (4° tipo) (G_{96})

$16_3(6) \equiv \alpha 10_3$ tipo $a + \alpha' 6_3$ (G_8)
$17_3(5) \equiv \alpha 10_3$ tipo $a + \alpha' 7_3$ (G_4)
$18_3(4) \equiv \alpha 10_3$ tipo $a + \alpha' 8_3$ (G_{96})
$19_3(1) \equiv \alpha 10_3$ tipo $a + \alpha' 9_3 (a)$ (G_2)
$19_3(2) \equiv \alpha 10_3$ tipo $a + \alpha' 9_3 (b)$ (G_2)
$19_3(3) \equiv \alpha 10_3$ tipo $a + \alpha' 9_3$ (4° tipo) (G_8)

$16_3(7) \equiv \alpha 10_3$ tipo $b + \alpha' 6_3$ (G_8)
$17_3(6) \equiv \alpha 10_3$ tipo $b + \alpha' 7_3$ (G_4)
$18_3(5) \equiv \alpha 10_3$ tipo $b + \alpha' 8_3$ (G_{96})
$19_3(4) \equiv \alpha 10_3$ tipo $b + \alpha' 9_3 (a)$ (G_2)
$19_3(5) \equiv \alpha 10_3$ tipo $b + \alpha' 9_3 (b)$ (G_2)
$19_3(6) \equiv \alpha 10_3$ tipo $b + \alpha' 9_3$ (4° tipo) (G_8)

$16_3(8) \equiv \alpha 10_3$ (tipo 4°) $+ \alpha' 6_3$ (G_{96})
$17_3(7) \equiv \alpha 10_3$ (tipo 4°) $+ \alpha' 7_3$ (G_{16})
$18_3(6) \equiv \alpha 10_3$ (tipo 4°) $+ \alpha' 8_3$ (G_{96})
$19_3(7) \equiv \alpha 10_3$ (tipo 4°) $+ \alpha' 9_3 (a)$ (G_8)
$19_3(8) \equiv \alpha 10_3$ (tipo 4°) $+ \alpha' 9_3 (b)$ (G_8)
$19_3(9) \equiv \alpha 10_3$ (tipo 4°) $+ \alpha' 9_3$ (4° tipo) (G_{96})

In tutto si hanno, oltre alla Cfr. 13_3 del n. prec., due Cfr. 14_3, tre Cfr. 15_3, otto Cfr. 16_3, sette Cfr. 17_3, sei Cfr. 18_3 e nove Cfr. 19_3 tutte distinte. I gruppi relativi di 2, 4, 8, 16 o 96 sostituzioni sono, come il gruppo G_{24} della $\alpha 7_3$ meriedricamente isomorfi al gruppo di sostituzioni fra 3 elementi o ad un suo sottogruppo.

18. Per ogni valore di n si possono ottenere Cfr. n_3 mediante la composizione di figure αm_3 ed $\alpha'(n-m)_3$ dedotte mediante operazioni ω_1, ω_2 dalle fig. α ed α' *minime*. Arrivati ad una certa fig. αk_3 la si può comporre con una $\alpha' 6_3$ se $n = k + 6$, con una $\alpha' 7_3$ se $n = k + 7$ ecc. A sua volta la fig. αk_3 si può ottenere partendo da una qualunque delle fig. α minime, cioè da una $\alpha 7_3$. $\alpha 8_3$ (2° tipo) ecc.

Questo procedimento sarà chiarito da un esempio.

Posto $n = 36$ vogliamo determinare tutte le Cfr. 36_3 che si ottengono da $\alpha 7_3$ mediante le operazioni ω. Sappiamo (n. 13) che vi sono 27 fig. $\alpha 30_3$ dedotte da

$\alpha 7_3$. Componendo queste figure α con la fig. $\alpha' 6_3$ si avranno 27 Cfr. 36_3 col gruppo di 96 sostituzioni (n.[i] 8, 10, 11, 16).

Risolvendo l'equazione indeterminata $3x + 4y = 22$ si trovano 22 fig. $\alpha 29_3$, le quali composte con la $\alpha' 7_3$ danno 22 Cfr. 36_3 col gruppo di 16 sostituzioni. Similmente si trovano 21 fig. $\alpha 28_3$, le quali composte con la $\alpha' 8$ danno 21 Cfr. 36_3 col gruppo di 96 sostituzioni.

E risolvendo l'equazione indeterminata $3x + 4y = 20$ si trovano 16 fig. $\alpha 27_3$, che composte con $\alpha' 9_3$ tipo a, oppure b danno altre 32 Cfr. 36_3 col gruppo di 8 sostituzioni.

Ma, invece di partire dalla $\alpha 7_3$ si può partire dalla $\alpha 8_3$, oppure dalla $\alpha 9_3$, oppure $\alpha 10_3$ (tipo a o b) e si ottengono altri 4 insiemi di Cfr. 36_3 con i gruppi corrispondenti.

In tutto si hanno diverse centinaia di Cfr. 36_3 tutte distinte e con i gruppi ben noti: G_2, G_4, G_8, G_{16}, G_{96}.

19. La composizione di una fig. αm_3 con una $\alpha'(n-m)_3$ si può effettuare mediante una costruzione lineare. Infatti, segnate tre rette arbitrarie a', b', c' passanti rispettivamente per i 3 punti eccezionali a, b, c di αm si può, in infiniti modi trasformare la $\alpha'(n-m)_3$, *supposta già costruita* in un'altra $\alpha'(n-m)_3$ le cui rette eccezionali coincidano con a', b', c'. Caso per caso si può anche trovare una costruzione semplice.

§ 4.

Categorie notevoli di configurazioni irregolari n_3.

20. Configurazioni che hanno per gruppo l'identità. La minima fig. αn_3 avente per gruppo l'identità si costruisce nel seguente modo: per i vertici di un triangolo 123 si conducano 3 rette arbitrarie formanti un secondo triangolo 567, sul lato 23 si prenda un punto qualunque, e sia 4, posto $(1 . 3)(4 . 5) \equiv 9$ ed $(1 . 2)(4 . 6) \equiv 8$ si avrà una fig. $\alpha 9_3$ (fig. 12ª) con i punti eccezionali 7, 8 e 9.

La $\alpha 9_3$ è la minima figura α avente per gruppo l'identità perchè di figure $\alpha 8_3$ ve ne sono due sole, una ha il gruppo di 4 sostituzioni (n. 3) e l'altra ha il gruppo di 6 sostituzioni (n. 9).

Mediante le operazioni ω, per ogni valore di n si possono costruire varie figure αn_3 aventi per gruppo l'identità. Infatti, se alla fig. $\alpha 9_3$ ora costruita si applica l'operazione ω_1 si ha una fig. $\alpha 12_3$ che ha pure per gruppo l'identità (n.° 8)

Lo stesso avviene se si applica l'operazione ω_2. Dunque risolvendo l'equazione indeterminata:

$$3x + 4y = n - 9$$

si trovano delle fig. αn_3 tutte distinte e che appartengono al tipo qui studiato.

Inoltre, se una figura αn_3 ammette per gruppo l'identità, anche la figura duale $\alpha'(n-1)_3$ ammette per gruppo l'identità.

Da ciò deduciamo la possibilità di costruire, per ogni valore di $n \geqq 17$ delle configurazioni n_3 distinte e che hanno il gruppo che si riduce alla sola identità:

Basterà costruire una fig. $\alpha(n-8)_3$ del tipo considerato e poi comporla con la fig. $\alpha' 8_3$ duale della fig. $\alpha 9_3$ ora costruita.

21. CONFIGURAZIONI CHE CONTENGONO SERIE DI POLIGONI SUCCESSIVAMENTE INSCRITTI. Sia data una serie di poligoni $P_1, P_2, P_3, \ldots P_m$ successivamente inscritti, ma non costituenti un ciclo (P_m inscritto in P_{m-1}, P_{m-1} in $P_{m-2} \ldots P_3$ in P_2, P_2 in P_1, ma P_1 non inscritto in P_m); si può, in modo abbastanza semplice determinare la configurazione *α minima*, che contiene tale serie.

Sia μ il numero dei vertici di ciascun poligono, quindi la serie sia formata da:

$$P_1 \equiv A^1_1 A^1_2 \ldots A^1_\mu \quad ; \quad P_2 \equiv A_1^2 A_2^2 \ldots A^2_\mu ; \ldots P_m \equiv A_1^m A_2^m \ldots A_\mu^m .$$

Il 1° è circoscritto al 2°, il 2° al 3° ecc.

Su tutte le rette della figura così formata sono 3 punti, eccetto che sui lati di P_m; per tutti i punti passano 3 rette, tranne che per i vertici di P_1.

Supponiamo ordinati i lati di P_m nel seguente modo: $p_1 \equiv A_1^m A_2^m$, $p_2 \equiv A_2^m A_3^m, \ldots$ $p_m \equiv A_m^m A_1^m$.

Su p_1 scegliamo un punto arbitrario $A_1^{(m+1)}$ e poi poniamo successivamente:

$$A_2^{(m+1)} \equiv A_1^{(m+1)} A_1^1 \cdot p_2$$
$$A_3^{(m+1)} \equiv A_2^{(m+1)} A_2^1 \cdot p_3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$A_{\mu-1}^{(m+1)} \equiv A_{\mu-2}^{(m+1)} A^1_{\mu-2} \cdot p_{\mu-1}$$
$$A_\mu^{(m+1)} \equiv A_{\mu-1}^{(m+1)} A^1_{\mu-1} \cdot p_\mu .$$

La figura risultante è una fig. $\alpha[\mu(m+1)]_3$ con i tre punti eccezionali A_μ^1, A_1^{m+1}, A_μ^{m+1} (Cfr. la fig. 13, in cui $\mu = 4, m = 2$).

Componendo questa figura con la $\alpha' 6_3$ si ottiene la configurazione richiesta.

La fig. $\alpha[\mu(m+1)]_3$ ammette per gruppo l'identità, quindi la Cfr. $[\mu(m+1)+6]_3$ ha il gruppo di 4 sostituzioni le quali permutano soltanto i punti della $\alpha' 6_3$, in modo però che ognuna delle 3 rette eccezionali rimanga fissa (n. 16), delle 24 sostituzioni bisogna prendere soltanto le l_0, l_1, l_2, l_3, che mutano in sè stessa ciascuna retta eccezionale.

22. Se la figura $\alpha[\mu(m+1)]_3$ si compone con la figura $\alpha' 7_3$ si ha la Cfr. $[\mu(m+1)+7]_3$ che contiene la stessa serie di poligoni ed ha il gruppo di 2 sostituzioni. Componendola invece con le fig. $\alpha' 8_3$ od $\alpha' 9_3$ (tipo a o b) si hanno altre configurazioni che ammettono per gruppo l'identità.

Per $\mu = 3$ si hanno le Cfr. $(3m+9)_3$, $(3m+10)_3$, $(3m+11)_3$ contenenti ciascuna una serie di m triangoli successivamente inscritti; la *minima* è la Cfr. $(3m+9)_3$.

Viceversa: *se β è la parte intera del quoziente di* $n-9$ *per* 3, *β sarà il numero dei triangoli della massima serie che può essere contenuta in una Cfr.* n_3 *composta mediante figure α.*

Infatti, se $n - 9 = 3\beta$ si costruisca la fig. $\alpha(3\beta+3)_3$ col procedimento esposto nel n. 21 e poi la si componga con la $\alpha' 6_3$; si avrà una Cfr. n_3 contenente una serie di β triangoli. Se $n - 9 = 3\beta + 1$, la fig. $\alpha(3\beta+3)_3$ verrà composta con la $\alpha' 7_3$ e se $n - 9 = 3\beta + 2$ con la $\alpha' 8_3$.

Nella Cfr. n_3 non vi può essere una serie di $\beta + 1$ triangoli, perchè la minima configurazione contenente tale serie è una Cfr. $[3(\beta + 1) + 9]_3$ il cui ordine $3\beta + 3 + 9$ è maggiore di n ($n = 3\beta + 9$ oppure $3\beta + 10$, oppure $3\beta + 11$).

Si comprende che in questo procedimento non si tiene conto delle serie cicliche di triangoli successivamente inscritti e che dànno configurazioni regolari.

Applicando ad una fig. $\alpha 7_3$ m volte successivamente l'operazione ω_1 si ottiene una fig. $\alpha(3m + 7)$, che contiene una serie di m triangoli; componendola con una fig. $\alpha' 6_3$ si ha una Cfr. $(3m + 13)_3$ che contiene la detta serie e che ha il gruppo di 96 sostituzioni. Però la Cfr. $(3m + 13)_3$ che contiene la massima serie di triangoli è diversa dalla precedente, perchè si ottiene componendo una fig. $\alpha[3(m + 1) + 3]_3$ con la fig. $\alpha' 7_3$ e contiene per conseguenza $m + 1$ triangoli successivamente inscritti; il gruppo è un G_4.

23. Il problema risoluto nel n. prec. si può generalizzare: *qual'è la massima serie di poligoni chè può appartenere ad una Cfr.* n_3 *composta mediante fig.* α.

Sia β la parte intera del quoziente di $n - \mu - 6$ per μ, cioè sia $n - \mu - 6 = \beta . \mu + r (r = 0, 1, 2, \ldots \mu - 1)$; β sarà il numero dei poligoni di μ vertici costituenti la massima serie che può essere contenuta in una Cfr. n_3.

Infatti si costruisca (n. 21) la fig. $\alpha[\mu(\beta + 1)]_3$ contenente una serie di β poligoni successivamente inscritti e la si componga con una fig. $\alpha'[6 + r]_3$; si avrà una configurazione $[\beta\mu + \mu + r + 6]_3$, cioè una Cfr. n_3 del tipo richiesto.

Anche qui escludiamo naturalmente, le serie di poligoni formanti cicli e che dànno configurazioni regolari.

Osserviamo in fine, che se si toglie la restrizione che la Cfr. n_3 debba essere composta mediante figure α, il numero dei poligoni della massima serie può essere maggiore di β.

24. Configurazioni irregolari atrigone. Le figure αn_3 finora considerate contengono tutte dei triangoli; proponiamoci di trovare la minima fig. αn_3 atrigona.

Siano r, r' (fig. 14) le rette passanti per il punto eccezionale 15 ed r'' una delle due rette passanti per il punto eccezionale 14. Gli altri due punti di r siano 1 e 6, quelli di r' siano 4 e 5 e quelli di r'', 2 e 3. Il massimo numero di coppie di punti congiunti, che si possono formare con i detti sei punti, se si tiene conto della condizione dell'assenza di triangoli, è dato dalle coppie 1 . 2 ; 6 . 3 ; 5 . 2 ; 3 . 4. Per 1 , 6 , 4 , 5 si conducano le terze rette a_1, a_2, a_3, a_4.

La retta 1 . 2 può essere congiunta solo ad a_4 dando il punto 9, perchè se fosse congiunta ad a_2 o a_3 la figura conterrebbe triangoli.

La a_1 può essere congiunta a 3 . 4 dando il punto 12 e ad a_3 dando il punto 7; la a_2 può essere congiunta ad a_4 (punto 10) ed a 2 . 5 (punto 11); a_3 può essere congiunta solo a 3 . 6 (punto 8).

Il sistema dei 13 punti 15 , 1 , 2 ... 12 ora costruito è quello che si ottiene imponendo la condizione di avere il massimo numero di congiunzioni compatibili con la condizione che la figura risulti atrigona.

Premesso ciò, i punti per i quali passano soltanto due rette sono 7 , 10 ; 8 , 9 ; 11 , 12. Il punto 7 può solo essere congiunto a 10, 8 a 9 ed 11 a 12. Posto perciò $14 \equiv r'' . (7 . 10)$ e $13 \equiv (8 . 9) . (11 . 12)$ si otterrà precisamenta la minima figura αn_3 atrigona: *La minima figura* αn_3 *atrigona è una* $\alpha 15_3$ *di 1° tipo.*

Se i tre punti eccezionali 13, 14, 15 risultano in linea retta si ha invece la Cfr. 15_3 atrigona del Martinetti (v. 170).

25. Il gruppo della fig. $\alpha 15_3$ ora costruita è meriedricamente isomorfo al gruppo totale di 6 sostituzioni su 3 elementi e risulta composto dalle seguenti 48 sostituzioni:

1.° Otto sostituzioni, che lasciano inalterato ciascun punto eccezionale:

$$L_0 = 1$$
$$L_1 = (2.7)(3.10)(8.11)(9.12)$$
$$L_2 = (1.6)(2.10)(3.7)(4.5)(8.12)(9.11)$$
$$L_3 = (1.4)(2.10)(3.7)(5.6)$$
$$L_4 = (1.4)(2.3)(5.6)(7.10)(8.11)(9.12)$$
$$L_5 = (1.5)(2.7)(3.10)(4.6)(8.9)(11.12)$$
$$L_6 = (1.6)(2.3)(4.5)(7.10)(8.9)(11.12)$$
$$L_7 = (1.5)(4.6)(8.12)(9.11) .$$

2.° 16 sostituzioni che permutano ciclicamente i 3 punti eccezionali

$$M_1 = (1.8.10)(2.5.11)(3.4.12)(6.9.7)(13.14.15)$$
$$M_2 = (1.8.2.6.9.3)(4.12.7.5.11.10)(13.14.15)$$
$$M_3 = (1.9.10.6.8.7)(2.4.11.3.5.12)(13.14.15)$$
$$M_4 = (1.9.2)(3.6.8)(4.11.7)(5.12.10)(13.14.15)$$
$$M_5 = (1.11.7.6.12.10)(2.5.8.3.4.9)(13.14.15)$$
$$M_6 = (1.11.3)(2.6.12)(4.9.10)(5.8.7)(13.14.15)$$
$$M_7 = (1.12.7)(12.4.8)(3.5.9)(6.11.10)(13.14.15)$$
$$M_8 = (1.12.3.6.11.2)(4.8.10.5.9.7)(13.14.15)$$

ed i loro quadrati.

3.° Le 8 sostituzioni che lasciano inalterato il punto eccezionale 15 permutando gli altri 2; esse si ottengono moltiplicando la sostituzione:

$$N \equiv (2.9)(3.8)(4.5)(7.12)(10.11)(13.14)$$

per le $L_0, L_1, L_2, \ldots L_7$.

4.° Le 8 sostituzioni che lasciano inalterato il punto 14 permutando gli altri 2 punti eccezionali; esse si ottengono moltiplicando N per le 8 sostituzioni $M_1, M_2, M_3 \ldots M_8$.

5.° Le 8 sostituzioni che lasciano inalterato il punto eccezionale 13 permutando gli altri due; si ottengono moltiplicando N per le $M_1^2, M_2^2, \ldots M_8^2$.

La serie di composizione di G_{48} è $(G_{48}, G_{24}, G_8, G_4, G_2, G_1)$.

Il G_{24} è costituito dalle 8 sostituzioni $L_0, L_1, \ldots L_7$ e dalle altre 16 M_i ed M_i^2; G_8 dalle $L_0, L_1 \ldots L_7$; G_4 dalle $L_0 L_1 L_3 L_4$ e G_2 da L_0 ed L_1.

26. La figura α' duale della $\alpha 15_3$ atrigona ed ha il gruppo di 48 sostituzioni oloedricamente isomorfo al G_{48} del n.° precedente.

Se si compone la fig. $\alpha 15_3$ con la duale $\alpha' 14_3$ si ha una Cfr. 29_3 atrigona, che ha il gruppo di **384** (48 . 8) sostituzioni.

Questo si ottiene dai due gruppi delle $\alpha 15_3$, $\alpha' 14_3$ come il gruppo G_{96} della 13_3 del n. 16 si è ottenuto dai due gruppi G_{24} delle fig. $\alpha 7_3$ ed $\alpha' 6_3$.

27. Se si richiede che due punti eccezionali siano congiunti, la fig. αn_3 atrigona minima non è più la fig. $\alpha 15_3$, che è del 1° tipo, ma una fig. $\alpha 17_3$ che ammette per gruppo la sola identità.

Essa si costruisce facilmente mediante considerazioni analoghe a quelle del n. 24, e si ha la fig. 15ª.

Componendo questa con la figura duale $\alpha' 16_3$, che è pure atrigona si ha una Cfr. 33_3 atrigona avente per gruppo l'identità.

Invece, se si compone la fig. $\alpha 17_3$ con la duale di $\alpha 15_3$ si ha una Cfr. 31_3 atrigona, col gruppo di 8 sostituzioni.

Analogamente si potrebbero costruire fig. αn_3 atrigone, dei tipi 3° e 5° dai quali si dedurrebbero altri tipi di Cfr. n_3 irregolari atrigone.

28. Configurazioni con i gruppi di $3 . 2^k$ sostituzioni. Il procedimento dei n.ⁱ 16 e 17 ci dà il mezzo di costruire per ogni valore di n non troppo piccolo, delle Cfr. n_3 con i gruppi G_2, G_4, G_8, G_{16}, G_{24}, G_{96}. Ora, a questi gruppi possiamo aggiungerne altri.

Se si compone la fig. $\alpha 9_3$ del n. 9, che ha il gruppo G_3, con la figura duale $\alpha' 8_3$ si ha una Cfr. 17_3 col gruppo di 3 sostituzioni. Risolvendo l'equazione indeterminata $3x + 4y = n - 17$ si troveranno, per valori non troppo piccoli di n, parecchie configurazioni n_3 col gruppo G_3.

Similmente, componendo la fig. $\alpha 8_3$ del n. 9, avente il gruppo G_6 con la figura duale $\alpha' 7_3$ si ottiene una Cfr. 15_3 col gruppo di 6 sostituzioni; se invece la si compone con la fig. $\alpha' 7_3$ duale della figura $\alpha 8_3$ minima di 2° tipo si ha una Cfr. 15_3 col gruppo di 4 sostituzioni, e componendola con la fig. $\alpha' 6_3$ duale della $\alpha 7_3$ si ha una Cfr. 14_3 col gruppo di 24 sostituzioni.

Una Cfr. n_3 col gruppo di 12 sostituzioni si ottiene componendo la fig. $\alpha 9_3$ col gruppo G_3, con la fig. $\alpha' 6_3$.

Una Cfr. n_3 col gruppo di 32 sostituzioni si ottiene componendo la fig. $\alpha 15_3$ atrigona con la $\alpha' 7_3$ duale della minima $\alpha 8_3$ di 2° tipo.

Se la fig. $\alpha 8_3$ col gruppo G_6 si compone con la fig. $\alpha' 14_3$ duale della $\alpha 15_3$ atrigona si ha una Cfr. 22_3 col gruppo di 48 sostituzioni.

E finalmente, componendo la fig. $\alpha 15_3$ atrigona con la $\alpha' 6_3$ si ha una Cfr. 21_3 col gruppo G_{192}.

Riassumendo: *è sempre possibile, mediante le figure α già costruite ed estese opportunamente con operazioni ω_1 od ω_2 formare per ogni valore di* n *(esclusi soltanto i più piccoli) delle configurazioni* n_3 *con un gruppo di ordine dato* m, *ove* m *è della forma* 2^k (k = 1, 2, 3, 4, 5) *oppure della forma* $3 . 2^k$ (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Data la grandissima difficoltà della risoluzione del problema generale, questo risultato non riuscirà forse privo d'interesse.

§ 5.

Generalizzazione delle figure α nel piano.

29. Chiameremo figura $\alpha_k(n_3)$ un gruppo di n punti a 3 a 3 in linea retta e tale che mentre su ogni retta stanno 3 punti, per k degli n punti passano due rette e per i rimanenti $n-k$ ne passano 3.

È facile dimostrare che k deve essere multiplo di 3.

Infatti sia m il numero delle rette che contengono gli n punti a 3 a 3, se per ogni punto passasse una sola retta, cioè se le rette fossero tutte separate, il numero dei punti sarebbe $3m$. Un punto in cui concorrono due rette assorbe due dei punti di cui si parla, ed un punto in cui concorrono tre rette ne assorbe 3, dunque

$$3m = 2k + 3(n-k)$$

ossia

$$3m = 3n - k$$

da cui

$$k = 3(n-m)\ .$$

Il caso più semplice si ha quando $n - m = 1$; allora $k = 3$ e si hanno le figure α di cui abbiamo già discorso. In generale, posto $n - m = \nu$ si hanno le figure $\alpha_{3\nu}(n_3)$ formate da n punti ed $n - \nu$ rette; su ognuna delle rette sono 3 punti, per 3ν punti (punti eccezionali) passano due rette e per i rimanenti $n - 3\nu$ ne passano 3.

30. Il caso successivo a quello delle figure α si ha considerando le fig. $\alpha_6 n_3$. Per i primi valori di n si possono facilmente trovare tutti i possibili tipi di figure $\alpha_6 n_3$.

Di figure $\alpha_6 7_3$ ve n'è un sol tipo, rappresentato dalla fig. 16ª, esso ha il gruppo costituito dalle 12 sostituzioni seguenti:

$$S_1 \equiv 1\ ;\ S_2 \equiv (46)(57)\ ;\ S_3 \equiv (23)(45)(67)\ ;\ S_4 \equiv (23)(47)(56)\ ;$$
$$S_5 \equiv (24)(35)\ ;\ S_6 \equiv (246)(357)\ ;\ S_7 \equiv (25)(34)(67)\ ;\ S_8 \equiv (256347)\ ;$$
$$S_9 \equiv (26)(37)\ ;\ S_{10} \equiv (264)(375)\ ;\ S_{11} \equiv (274365)\ ;\ S_{12} \equiv (27)(36)(45)\ .$$

Vi sono 2 tipi distinti di fig. $\alpha_6 8_3$ rappresentati dalle figure 17 e 18. Il primo ha il gruppo di 12 sostituzioni:

$$S_1 \equiv 1\ ;\ S_2 \equiv (34)(58)(67)\ ;\ S_3 \equiv (35)(46)(78)\ ;\ S_4 \equiv (37)(48)(56)\ ;$$
$$S_5 \equiv (368)(574)\ ;\ S_6 \equiv (386)(547)\ ;\ S_7 \equiv (12)(45)(68)\ ;\ S_8 \equiv (12)(356784)\ ;$$
$$S_9 \equiv (12)(348765)\ ;\ S_{10} \equiv (12)(38)(57)\ ;\ S_{11} \equiv (37)(46)(85)(12)\ ;\ S_{12} \equiv (36)(47)(12)\ .$$

Il secondo ha per gruppo l'identità.

Di figure $\alpha_6 9_3$ ve ne sono 10 tipi diversi, 3 hanno per gruppo l'identità, 2 hanno il gruppo di 2 sostituzioni, una un G_3, una un G_4, una un G_6, e due un G_{12}.

La fig. 19 rappresenta le tre fig. $\alpha_6 9_3$ che hanno il gruppo identico e la fig. 20 le due fig. $\alpha_6 9_3$ che hanno il gruppo di 12 sostituzioni.

Sarebbe abbastanza difficile la ricerca diretta dei varii tipi di fig. $\alpha_6 n_3$ per $n > 9$; però, come ora vedremo, le dette figure si dividono in un numero limitato di classi; ciascuno degl'individui di una classe si ricava facilmente da un *nucleo comune.*

31. Non tenendo conto dei sei punti eccezionali, restano $n-6$ punti i quali si distinguono in 3 categorie: k_1 punti per i quali passa una sola retta, k_2 punti per i quali passano 2 rette e k_3 punti per i quali passano 3 rette; sono escluse le rette che passano per uno solo degli $n-6$ punti e per due punti eccezionali (rette che si possono condurre arbitrariamente quando siano dati gli $n-6$ punti e le rimanenti rette). Sicchè anche le rette si possono distinguere in 3 categorie: l_1 rette passano per uno solo degli $n-6$ punti, l_2 rette congiungono due di questi punti, l_3 rette contengono tre dei punti medesimi.

Esempio. La fig. 21ª (*a*) rappresenta una fig. $\alpha_6 n_3$ con i punti eccezionali: 6, 7, 8, 9, 10, 11; le rette l_1 sono 1 . 10 . 11 , 5 . 8 . 9 e 4 . 7 . 6.

Le rette rimanenti ed i 5 punti 1, 2, 3, 4, 5 formano la fig. 19 *b*, dalla quale si vede che $k_1 = 0$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$; $l_2 = 6$, $l_3 = 0$.

Dalla fig. 19 *b* si passa alla 19 *a* conducendo le tre rette arbitrarie l_1.

Chiameremo *nucleo* della fig. $\alpha_6 n_3$ la figura che se ne deduce trascurando i 6 punti eccezionali e le rette l_1 che contengono uno solo dei rimanenti $n-6$ punti.

Noi ora abbiamo scartato il caso in cui il nucleo contenga punti *separati* cioè punti per i quali non passa nessuna retta del nucleo (fig. 22).

Non vi possono essere due punti siffatti, perchè se ciò fosse i 6 punti eccezionali si otterrebbero conducendo due terne di rette e poi trovandone le intersezioni come nella fig. 17; allora il rimanente del nucleo dovrebbe costituire una Cfr. n_3, ciò che noi escludiamo.

Dunque di punti *separati* ve ne può essere uno solo (p. es. il punto 5 della fig. 22); ma allora, nel nucleo vi debbono essere soltanto 6 rette contenenti due soli punti; tutte le altre rette ne debbono contenere 3, cioè gli altri $n-7$ punti del nucleo debbono costituire una figura duale di una αn_3 e propriamente una fig. $\alpha'_6 (n-7)_3$ formata da $n-7$ punti e da $n-5$ rette. Possiamo adunque, in ciò che segue, limitarci alle fig. $\alpha_6 n_3$ il cui nucleo non ha punti *separati*.

32. Col simbolo k_i indicheremo nello stesso tempo i punti per cui passano i rette ed il loro numero; lo stesso dicasi del simbolo l_i.

Si hanno evidentemente le due eguaglianze:

$$n - 6 = k_1 + k_2 + k_3 \qquad (1)$$

$$n - 2 = l_1 + l_2 + l_3 \; . \qquad (2)$$

Poichè per ogni punto k_1 si possono condurre 2 rette l_1 mentre per un punto k_2 se ne può condurre una sola si ha pure

$$l_1 = 2k_1 + k_2 \; . \qquad (3)$$

Inoltre $n-2-l_1$ è il numero delle rette del *nucleo* nelle quali già vi sono 2 o 3 degli $n-6$ punti k_1, k_2, k_3. Se teniamo conto non solo dei punti k_i *segnati*, ma anche di quelli da *segnarsi* sulle l_1 per completare la figura, $3(n-2-l_1)$ sarà il numero dei punti *segnati* e da *segnarsi* sulle $n-2-l_1$ rette considerate come *staccate* le une dalle altre. Ogni k_i assorbe i di questi punti; su ogni l_2 si deve *segnare* un altro punto, dunque un'altra espressione del numero precedente è $3k_3+2k_2+k_1+l_2$, e perciò si ha ancora:

$$3(n-2-l_1)=3k_3+2k_2+k_1+l_2\,. \qquad (4)$$

Queste 4 eguaglianze sono fondamentali nello studio delle figure α.

33. Sommando (3) e (4) si ha

$$3n-6-2l_1=3(k_1+k_2+k_3)+l_2\,.$$

Ma per la (1): $k_1+k_2+k_3=n-6$, dunque:

$$3n-6-2l_1=3(n-6)+l_2$$

ossia:

$$2l_1=12-l_2$$

$$l_1=6-\frac{l_2}{2} \qquad (5)$$

donde il teorema generale:

Il numero delle rette del nucleo di una fig. $\alpha_6 n_3$, *contenenti due punti è sempre pari.*

Di più l_2+2l_1 è divisibile per 3.

34. Dalla (2) si ricava

$$\begin{aligned}3n-6&=3l_1+3l_2+3l_3\\&=3l_3+2l_2+l_1+(l_2+2l_1)\,.\end{aligned}$$

Ora, per la (5):

$$2l_1+l_2=12$$

dunque:

$$3(n-6)=l_1+2l_2+3l_3\,.$$

35. Dopo ciò possiamo caratterizzare tutti i possibili tipi di *nuclei* di fig. $\alpha_6 n_3$.

Per la (5) il numero l_1 dev'essere ≤ 6. Riunendo in una *classe* tutti i nuclei per cui l_1 ha lo stesso valore potremo distinguere 7 classi: $l_1=0;1;2;3;4;5;6$.

1.ª classe: $l_1=0$. Per la (5) sarà $l_2=12$ e per la (2): $l_3=n-14$.

Per determinare k_1 e k_2 facciamo uso della (4) che si può scrivere così:

$$\begin{aligned}k_1+2k_2+3k_3&=3n-6-3l_1-l_2\\&=3n-6-(2l_1+l_2)-l_1\end{aligned}$$

e per essere $2l_1+l_2=12$:

$$k_1+2k_2+3k_3=3n-18-l_1\,,$$

ma per la (1)

$$3k_1 + 3k_2 + 3k_3 = 3n - 18$$

dunque

$$2k_1 + k_2 = l_1 . \qquad (6)$$

Poichè $l_1 = 0$ dovrà pure essere: $k_1 = 0$ e $k_2 = 0$ ed allora $k_3 = n - 6$.

Dunque per le figure $\alpha_6 n_3$ della 1ª classe si deve avere:

$$1^\circ \text{ tipo} \begin{cases} l_1 = 0 & l_2 = 12 & l_3 = n - 14 \\ k_1 = 0 & k_2 = 0 & k_3 = n - 6 \end{cases}$$

2.ª classe: $l_1 = 1$. Per la (5) sarà $l_2 = 10$ e per la (2) $l_3 = n - 13$.
La (6) dà subito $k_1 = 0$, $k_2 = 1$ e la (1) dà $k_3 = n - 7$.
Dunque per le figure $\alpha_6 n_3$ di 2ª classe si deve avere:

$$2^\circ \text{ tipo} \begin{cases} l_1 = 1 & l_2 = 10 & l_3 = n - 13 \\ k_1 = 0 & k_2 = 1 & k_3 = n - 7 \end{cases} .$$

3.ª classe: $l_1 = 2$.
Si trova $l_2 = 8$ ed $l_3 = n - 12$ e $k_2 + 2k_1 = 2$, che è verificata da due coppie di valori o è $k_1 = 0$ e $k_2 = 2$ $(k_3 = n - 8)$ oppure $k_1 = 1$, $k_2 = 0$ $(k_3 = n - 7)$.
Dunque vi sono due tipi di fig. $\alpha_6 n_3$ di 3ª classe

$$3^\circ \text{ tipo} \begin{cases} l_1 = 2 & l_2 = 8 & l_3 = n - 12 \\ k_1 = 0 & k_2 = 2 & k_3 = n - 8 \end{cases}$$

$$4^\circ \text{ tipo} \begin{cases} l_1 = 2 & l_2 = 8 & l_3 = n - 12 \\ k_1 = 1 & k_2 = 0 & k_3 = n - 7 \end{cases} .$$

4.ª classe: $l_1 = 3$.
Si trova $l_2 = 6$ ed $l_3 = n - 11$. La $k_2 + 2k_1 = l_1$ ossia $k_2 + 2k_1 = 3$ è verificata da due coppie di valori $k_1 = 0$, $k_2 = 3$ $(k_3 = n - 9)$ e $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ $(k_3 = n - 8)$.
Così si hanno due altri tipi:

$$5^\circ \text{ tipo} \begin{cases} l_1 = 3 & l_2 = 6 & l_3 = n - 11 \\ k_1 = 0 & k_2 = 3 & k_3 = n - 9 \end{cases}$$

$$6^\circ \text{ tipo} \begin{cases} l_1 = 3 & l_2 = 6 & l_3 = n - 11 \\ k_1 = 1 & k_2 = 1 & k_3 = n - 8 \end{cases} .$$

5.ª classe: $l_1 = 4$.
$l_2 = 4$, $l_3 = n - 10$. La $k_2 + 2k_1 = 4$ è verificata da 3 coppie di valori: $k_1 = 0$, $k_2 = 4$ $(k_3 = n - 10)$; $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ $(k_3 = n - 9)$; $k_1 = 2$, $k_2 = 0$ $(k_3 = n - 8)$ e si hanno 3 tipi:

$$7^\circ \text{ tipo} \begin{cases} l_1 = 4 & l_2 = 4 & l_3 = n - 10 \\ k_1 = 0 & k_2 = 4 & k_3 = n - 10 \end{cases}$$

$$8^\circ \text{ tipo} \begin{cases} l_1 = 4 & l_2 = 4 & l_3 = n - 10 \\ k_1 = 1 & k_2 = 2 & k_3 = n - 9 \end{cases}$$

$$9^\circ \text{ tipo} \begin{cases} l_1 = 4 & l_2 = 4 & l_3 = n - 10 \\ k_1 = 2 & k_2 = 0 & k_3 = n - 8 \end{cases} .$$

6.ª classe: $l_1 = 5$.

$l_2 = 2$, $l_3 = n - 9$; la $k_2 + 2k_1 = 5$ è verificata da 3 coppie di valori: $k_1 = 0$, $k_2 = 5$ $(k_3 = n - 11)$; $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ $(k_3 = n - 10)$; $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ $(k_3 = n - 9)$ e si hanno i 3 tipi

$$10^{\circ}\text{ tipo}\begin{cases} l_1 = 5 & l_2 = 2 & l_3 = n - 9 \\ k_1 = 0 & k_2 = 5 & k_3 = n - 11 \end{cases}$$

$$11^{\circ}\text{ tipo}\begin{cases} l_1 = 5 & l_2 = 2 & l_3 = n - 9 \\ k_1 = 1 & k_2 = 3 & k_3 = n - 10 \end{cases}$$

$$12^{\circ}\text{ tipo}\begin{cases} l_1 = 5 & l_2 = 2 & l_3 = n - 9 \\ k_1 = 2 & k_2 = 1 & k_3 = n - 9 \end{cases}.$$

7.ª classe: $l_1 = 6$.

$l_2 = 0$, $l_3 = n - 8$; la $k_2 + 2k_1 = 5$ è verificata da 4 coppie di valori: $k_1 = 0$, $k_2 = 6$ $(k_3 = n - 12)$; $k_1 = 1$, $k_2 = 4$ $(k_3 = n - 11)$; $k_1 = 2$, $k_2 = 2$ $(k_3 = n - 10)$; $k_1 = 3$, $k_2 = 0$ $(k_3 = n - 9)$, e si hanno i 4 tipi:

$$13^{\circ}\text{ tipo}\begin{cases} l_1 = 6 & l_2 = 0 & l_3 = n - 8 \\ k_1 = 0 & k_2 = 6 & k_3 = n - 12 \end{cases}$$

$$14^{\circ}\text{ tipo}\begin{cases} l_1 = 6 & l_2 = 0 & l_3 = n - 8 \\ k_1 = 1 & k_2 = 4 & k_3 = n - 11 \end{cases}$$

$$15^{\circ}\text{ tipo}\begin{cases} l_1 = 6 & l_2 = 0 & l_3 = n - 8 \\ k_1 = 2 & k_2 = 2 & k_3 = n - 10 \end{cases}$$

$$16^{\circ}\text{ tipo}\begin{cases} l_1 = 6 & l_2 = 0 & l_3 = n - 8 \\ k_1 = 3 & k_2 = 0 & k_3 = n - 9 \end{cases}.$$

In tutto si hanno 16 tipi fondamentali di fig. $\alpha_6 n_3$.

36. Per i valori più piccoli di n si presentano solo alcuni di questi tipi. Per esempio per $n = 11$ i nuclei delle fig. α_6 appartengono a 7 dei 16 tipi, v. fig. 23. La fig. $\alpha_6 n_3$ con $l_1 = 5$, $l_2 = 2$ è possibile solo per $n \geqq 13$ ecc.

Dato il nucleo di una fig. $\alpha_6 n_3$ appartenente ad uno qualunque dei 16 tipi lo si può in varii modi *completare* sì da avere una fig. α_6. Si sa il numero delle rette l_1 e si sa che gli ulteriori punti da trovare sono 6; quindi sarà facile esaminare tutti i casi possibili.

Per esempio, il n.° (1) della fig. 23 si può completare in 4 modi diversi, rappresentati dalla fig. 24.

La costruzione dei nuclei delle fig. $\alpha_6 n_3$ si può facilmente ricavare direttamente dalle condizioni imposte ai numeri k_i, l_i; ma si potrebbe pure ottenere col metodo di riduzione.

Alcune di queste figure possono costruirsi in modo che ne risulti una configurazione; ciò risulta dall'arbitrarietà delle rette l_1. A prescindere dalla costruzione si può, appena completato il nucleo in uno dei modi possibili, scrivere lo schema

della corrispondente configurazione. Vi sono delle figure $\alpha_6 n_3$ che non possono dar luogo a nessuna configurazione e sono quelle nelle quali i 6 punti eccezionali non si possono raggruppare in due terne di punti a 2 a 2 estranei: es. la fig. 25. Sicchè le fig. $\alpha_6 n_3$ sono più numerosi delle cfr. n_3; ciò non pertanto il loro studio facilita quello delle configurazioni le quali si possono in base alle figure α_6 distinguere in 16 tipi qualunque sia n (esclusi naturalmente i valori più piccoli).

37. L'intimo legame fra le configurazioni n_3 e le fig. $\alpha_6 n_3$ è stabilito da questo fatto: Soppresse due rette estranee rimane una fig. $\alpha_6 n_3$ con i sei punti eccezionali nei punti delle due rette. Determinati allora tutti i tipi di fig. $\alpha_6 n_3$ risultano anche determinati tutti i tipi di Cfr. n_3. Per determinare la fig. α si comincia col costruire il *nucleo*; poi, servendosi opportunamente dell'arbitrarietà delle rette l_1 lo si completa in modo che i 6 punti eccezionali stiano a 3 a 3 su due rette; la quistione, in ognuno dei 16 tipi è ricondotta a facili problemi di geometria proiettiva, quasi tutti suscettibili di costruzione lineare. Rimangono in fine le configurazioni per le quali *tutte* le figure α sono dotate di un punto separato (n.° 31). Queste si possono anche facilmente costruire osservando che il problema è ricondotto a quello delle figure $\alpha'_6(n-7)_3$.

Dopo ciò sarebbe facile ripigliare l'analisi dei varii tipi di Cfr. $9_3, 10_3, 11_3$ e condurla a termine basandosi su le fig. α_6. Noterò soltanto le configurazioni 11_3 i cui nuclei hanno un punto separato. Basterà costruire soltanto le due fig. α_6 corrispondenti (fig. 26).

La (1) ha il gruppo di 24 sostituzioni e la (2) il gruppo di 4 sostituzioni.

Sarebbe inoltre interessante trovare il carattere delle fig. α_6 di configurazioni regolari, di configurazioni atrigone ecc.

38. Le figure $\alpha_{3\nu}(n_3)$. Con lo stesso ragionamento del n.° 32 (posto ν al posto di 2) si ricavano le 4 relazioni fondamentali che legano i numeri k_i, l_i nel caso generale delle fig. $\alpha_{3\nu}(n_3)$:

$$\begin{cases} n-3\nu = k_1+k_2+k_3 & (1) \\ n-\nu = l_1+l_2+l_3 & (2) \\ l_1 = 2k_1+k_2 & (3) \\ 3(n-\nu-l_1) = 3k_3+2k_2+k_1+l_2\,. & (4) \end{cases}$$

Da queste si ricavano, come nei n.[i] 33 e 34 le altre due:

$$l_1 = 3\nu - \frac{l_2}{2} \qquad (5)$$

$$3(n-3\nu) = l_1 + 2l_2 + 3l_3\,.$$

Il nucleo di una figura $\alpha_{3\nu}$ ha sempre un numero pari di rette che contengono due punti.

39. Per un dato valore di n qual'è il massimo di ν?

Dalla (4) si ricava

$$3n - 3\nu - 3l_1 = 3k_3 + 2k_2 + k_1 + l_2$$

$$3n - (3k_3 + 2k_2 + k_1) - 3\nu - (l_2 + 2l_1) = l_1$$

ma per la (5): $l_2 + 2l_1 = 6\nu$ dunque

$$3n - (3k_3 + 2k_2 + k_1) - 3\nu - 6\nu = l_1$$

e poichè $l_1 \geq 3\nu$ si ha:

$$3n - (3k_3 + 2k_2 + k_1) - 9\nu \geq 3\nu$$

$$3n - (3k_3 + 2k_2 + k_1) \geq 12\nu$$

$$3n - n + 3\nu - 2k_3 - k_2 \geq 12\nu$$

(per la 1)

$$2n - (2k_3 + k_2) \geq 9\nu$$

e per essere $2n - (2k_3 + k_2) \leq 2n$:

$$2n \geq 9\nu$$

$$\nu \leq \frac{2n}{9}$$

si ha il segno eguale per $l_1 = 3\nu$ e $k_2 = k_3 = 0$.

Le configurazioni le cui figure α_6 *hanno il nucleo privo di punti separati non possono avere più di* $E\left(\frac{2n}{9}\right)$ *rette a due a due estranee.*

Ma vi sono, come si sa, configurazioni con più di $E\left(\frac{2n}{9}\right)$ rette a 2 a 2 estranee, dunque queste configurazioni debbono avere figure α col nucleo dotato di punti separati oppure col nucleo *nullo*, quando la Cfr. sia formata da $3n$ punti situati su n rette a 2 a 2 estranee; es. la Cfr. 9_3 di Pappo. E si ha il seguente teorema generale:

Se una Cfr. n_3 *ha le sue figure* α *prive di punti separati, e possiede più di* $E\left(\frac{2n}{9}\right)$ *rette a due a due estranee, ne possiederà* $E\left(\frac{n}{3}\right)$.

§ 6.

Le figure α nello spazio.

40. L'importanza del metodo delle figure α consiste nel fatto della possibilità di una estensione allo spazio ed agl' iperspazii.

Consideriamo un gruppo di n punti ed m piani tali che su ogni piano stiano 4 punti, per k degli n punti passino 3 piani e per i rimanenti $n - k$ ne passino quattro. Come nel n.° 29 si dimostra che:

$$4m = 3k + 4(n - k)$$

ossia

$$k = 4(n - m) .$$

Il caso più semplice si ha per $n - m = 1$ ed allora $k = 4$ e si hanno le figure αn_4 formate da n punti ed $n - 1$ piani tali che in tutti i piani giacciano 4 punti, per 4 punti passino 3 piani e per i rimanenti $n - 4$ punti ne passino 4. Sarebbe facile procedere ad uno studio delle fig. αn_4 analogo a quello del § 4.

In generale, posto $n - m = \nu$ si hanno le fig. $\alpha_{4\nu}(n_4)$ di punti e piani, analoghe alle fig. $\alpha_{3\nu}(n_3)$ di punti e rette.

41. Scartati i 4ν punti eccezionali rimangono $n - 4\nu$ punti che si dividono in 4 categorie: k_1, k_2, k_3, k_4. Con k_i indichiamo i piani che contengono i punti ed anche il loro numero. Si avrà dunque la 1ª relazione

$$n - 4\nu = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \,. \tag{1}$$

Con l_1 indicheremo i piani che contengono uno solo degli $n - 4\nu$ punti k_i (piani che si possono condurre arbitrariamente quando sia data la figura dei punti k_i e degli altri piani che contengono più di uno dei punti k_i). Con l_2, l_3, l_4 indicheremo i piani che contengono due, tre o quattro dei punti k_i. La figura formata dai punti k_1, k_2, k_3, k_4 e dei piani l_2, l_3, l_4 sarà il *nucleo* della figura α. Anche qui si può scartare il caso in cui il nucleo possegga *punti separati*.

Ciò premesso, si stabilisce subito la 2ª identità

$$n - \nu = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \,.$$

Poichè di piani l_1 se ne possono condurre 3 per ogni k_1, due per ogni k_2 ed uno solo per ogni k_3 si ha ancora

$$l_1 = 3k_1 + 2k_2 + k_3 \,. \tag{3}$$

Di più, $n - \nu - l_1$ è il numero dei piani del nucleo sui quali già vi sono 2 o 3 o 4 punti k_i; se teniamo conto, non solo dei punti *segnati*, ma anche di quelli *da segnarsi* sui piani l_1 per completare la figura α, $4(n - \nu - l_1)$ sarà il numero dei punti segnati e da segnarsi sugli $n - \nu - l_1$ piani considerati come *staccati* gli uni dagli altri. Ogni k_i assorbe i di questi punti; su ogni l_2 se ne debbono segnare due e su ogni l_3 se ne deve segnare 1, dunque un'altra espressione del numero precedente è $4k_4 + 3k_3 + 2k_2 + k_1 + 2l_2 + l_3$ e si ha la 4ª identità

$$4(n - \nu - l_1) = 4k_4 + 3k_3 + 2k_2 + k_1 + 2l_2 + l_3 \,. \tag{4}$$

Sommando (3) e (4) si ha

$$4n - 4\nu - 3l_1 = 4k_4 + 4k_3 + 4k_2 + 4k_1 + 2l_2 + l_3$$

e per la (1)

$$4n - 4\nu - 3l_1 = 4(n - 4\nu) + 2l_2 + l_3$$

$$3l_1 = 12\nu - (2l_2 + l_3)$$

$$l_1 = 4\nu - \frac{2l_2 + l_3}{3} \,. \tag{5}$$

Dunque $2l_2 + l_3$ è sempre divisibile per 3.

42. A questo punto si potrebbero risolvere le seguenti quistioni:

1.ª Determinare tutti i possibili tipi di figure $\alpha_4(n_4)$ ed $\alpha_8(n_4)$; si troverebbero 5 classi di fig. α_4 e 9 classi di fig. α_8.

2.ª Costruzione di questi varii tipi; deduzione delle configurazioni n_4 di punti e piani.

3.ª Studio delle configurazioni n_4 che si possono ritenere *composte* da fig. $\alpha_4 n_4$: operazioni analoghe alle ω_1, ω_2; deduzione dei gruppi relativi alle dette configurazioni.

4.ª Le figure α nelle configurazioni n_4 appartenenti a determinate categorie (configurazioni regolari n_4, configurazioni n_4 prive di tetraedri, configurazioni del tipo **Möbius** ecc.).

5.ª Estensione delle figure α agl'iperspazii ecc.

I risultati già ottenuti nei paragrafi precedenti e l'enunciato di queste quistioni, per le quali vi è un avviamento alla risoluzione, dimostrano che lo studio delle configurazioni col metodo delle figure α costituisce un nuovo e forse non infecondo campo di ricerche.

finita di stampare il dì 20 Dicembre 1911

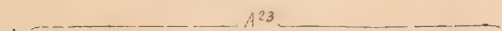
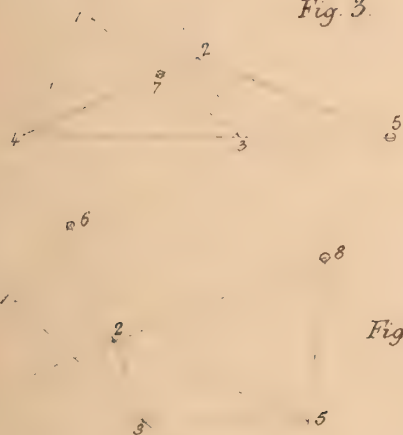
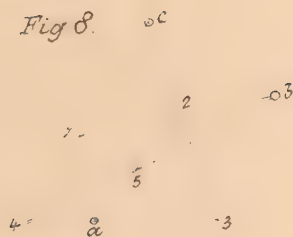
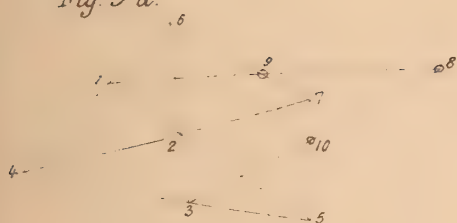
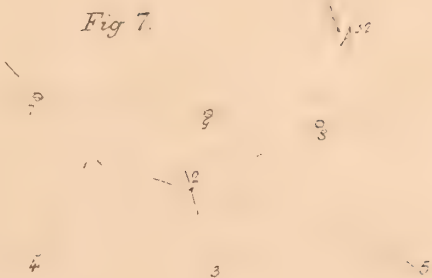
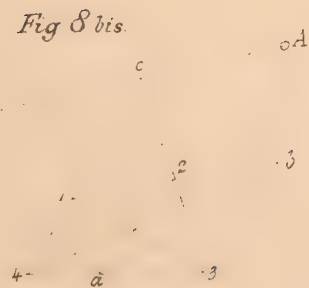
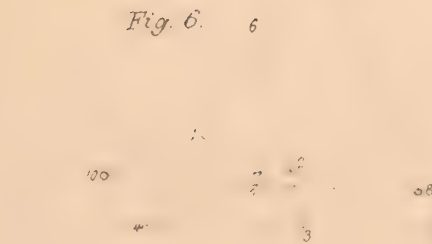



Fig. 1.
Fig 2 a.
Cfr. (24₄ 32₃) A
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5 a.
Fig 5 b.
Fig 8.
Fig 8 bis.
Fig 7.
Fig. 6.

Fig. 9

Fig. 9 bis

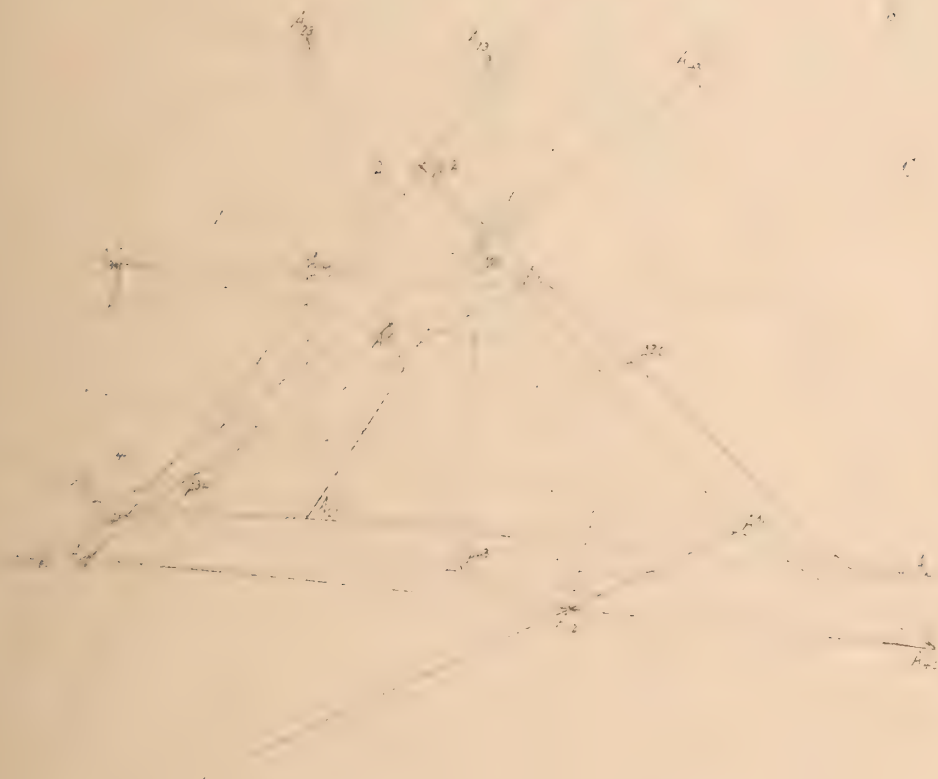
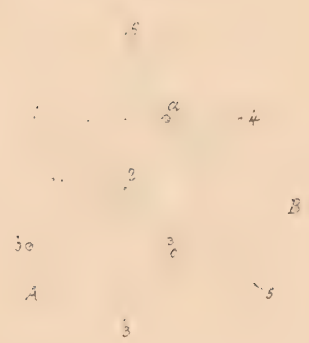
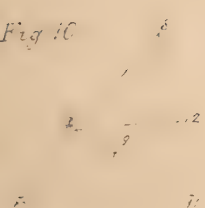
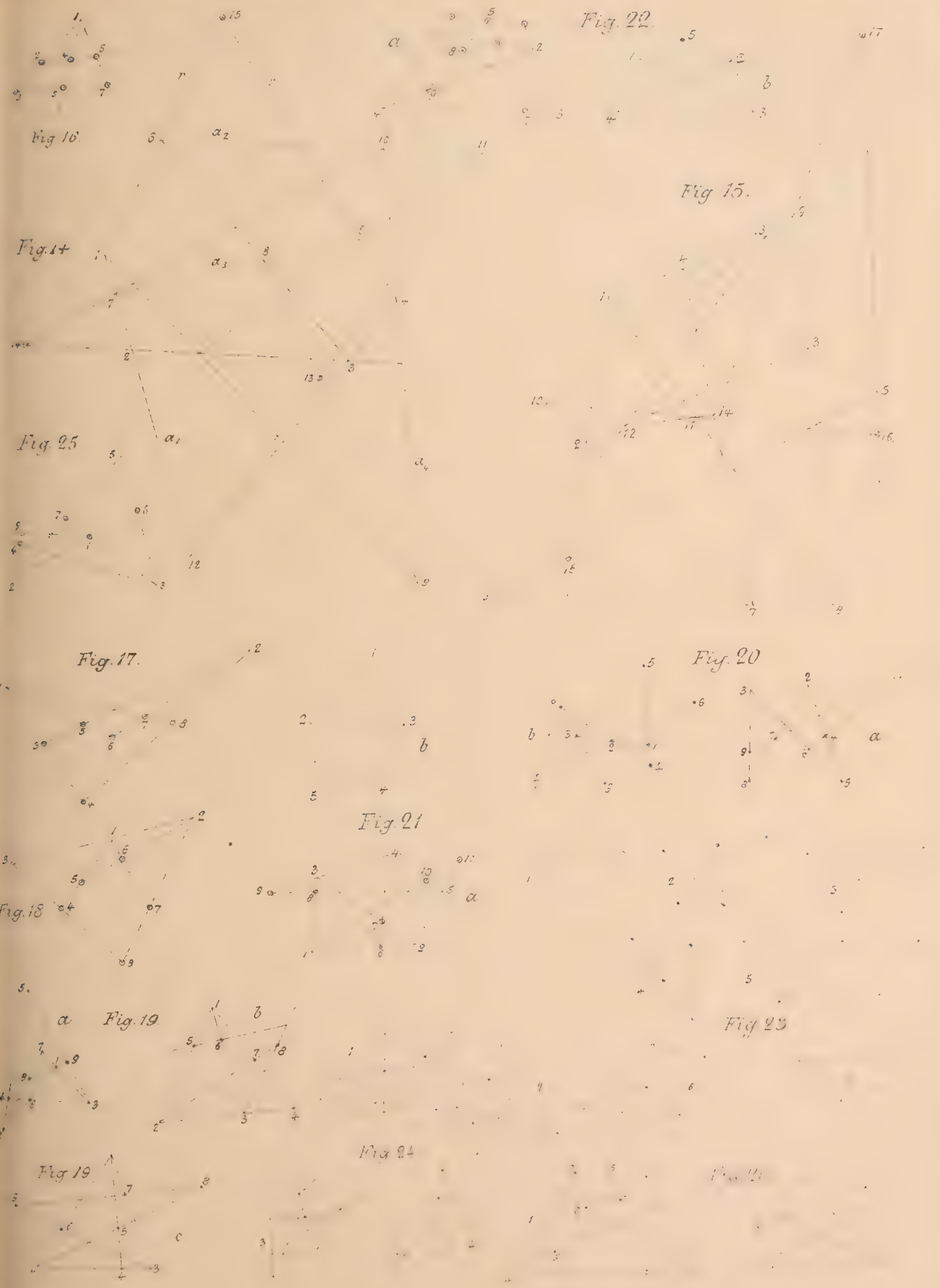
Fig. 10

Fig. 11

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 16.
Fig. 14
Fig. 22.
Fig. 15.
Fig. 25
Fig. 17.
Fig. 20
Fig. 21
Fig. 18
Fig. 19.
Fig. 19
Fig. 23

Vol. XV, Serie 2.ª N.º 5.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SOPRA ALCUNI AVANZI DI PESCI CRETACEI

DELLA PROVINCIA DI LECCE

MEMORIA

del dott. GEREMIA D'ERASMO

presentata nell' adunanza del dì 4 Marzo 1911

Nella penisola salentina i terreni mesozoici sono rappresentati, com'è noto, da un calcare dolomitico bigio-scuro o leggermente rossastro, talora nero, duro, omogeneo e compattissimo, di estensione poco conosciuta e con scarsi fossili caratteristici, e da un calcare compatto, talvolta bianco, ma più spesso tendente al grigio, stratificato, sonoro, meno duro del primo, a frattura irregolare, il quale costituisce tutta l'ossatura del sistema collinesco della Terra d'Otranto. Poche sono le località fossilifere; e gli avanzi sinora determinati appartengono tutti agl'invertebrati (molluschi, echinodermi, corallari e protozoi). Lo studio di essi ha dimostrato, in base alle ricerche successivamente compiute dal Dainelli [1]), dal De Franchis [2]), dal De Giorgi [3]), dal Di Stefano [4]), dal Flores [5]), dal Parona [6]), dal Virgi-

---

[1]) Dainelli G., *Appunti geologici sulla parte meridionale del Capo di Leuca*, in Boll. Soc. Geol. It., vol. XX (1901), pag. 639. — Id., *Vaccinites (Pironaea) polystylus* Pirona *nel Cretaceo del Capo di Leuca, loc. cit.*, vol. XXIV (1905), pag. 119.

[2]) De Franchis F., *Ricerche sui terreni del bacino di Galatina*, in Boll. Soc. Geol. It., vol. XVI (1897), pag. 122 e seg.—Id., *Molluschi della Creta media del Leccese, loc. cit.*, vol. XXII (1903), pag. 147.

[3]) De Giorgi C., *Note geologiche sulla provincia di Lecce* (1876), pag. 48 e seg. — Id., *Note stratigrafiche e geologiche da Fasano a Otranto*, in Boll. d. R. Comit. Geol. d'It., vol. XII (1881), pag. 189. — Id., *Cenni di geografia fisica della provincia di Lecce*. Lecce, 1884, pag. 45. — Id., *La serie geologica dei terreni nella penisola salentina*, pag. 57 (Mem. d. Pont. Acc. Romana dei Nuovi Lincei. vol. XX. Roma, 1903).

[4]) Di Stefano G., *Sulla presenza dell' Urgoniano in Puglia*, in Boll. Soc. Geol. It., vol. XI (1892), pag. 681.

[5]) Flores E., *Appunti di Geologia pugliese*, in Rassegna Pugliese, 1899, fasc. 9, pag. 10 e seg.

[6]) Parona C. F., *Sopra alcune Rudiste senoniane dell'Appennino meridionale*, pag. 4 (Mem. d. R. Acc. d. Sc. di Torino, serie II, tomo L, 1900). — Id., *Le Rudiste e le Camacee di S. Polo Matese* (*ibidem*, 1901), pag. 199 e seg. — Id., *La fauna coralligena del Cretaceo dei monti d'Ocre nell'Abruzzo aquilano*, pag. 25 (Mem. per servire alla descr. d. carta geol. d'It., vol. V, Roma, 1909).

lio [1]) ecc., che nella provincia di Lecce è rappresentata buona parte dei piani del Cretacico; spettando i calcari dolomitici scuri compattissimi con Toucasie, Requienie e Monopleure all'Urgoniano, e i calcari bianchi compatti con Rudiste e i calcari dolomitici grigi con Acteonelle, Nerinee ed Apricardie al Sopracretacico.

Non vi sono dunque accenni a vertebrati, se si fa eccezione di quanto ebbe a scrivere nel 1810 l'abate Giuseppe Maria Giovene [2]) a proposito di due mal conservati frammenti di pesci fossili trovati nelle vicinanze di Barbarano (frazione del comune di Salve), e che gioverebbe sottoporre ad uno studio accurato, tanto più che la descrizione data è insufficiente e le figure lasciano molto a desiderare, se non lo vietasse l'impossibilità di esaminarli direttamente, ignorandosi se e dove siano conservati. Gli schizzi del Giovene, affatto rudimentali, permettono soltanto di esprimere il dubbio che i due avanzi in questione, e specialmente quello alla tav. V, possano riferirsi alla fam. *Pycnodontidae*, come inducono a credere la mancanza di un vero asse vertebrale, il forte sviluppo degli archi neurali ed emali e la forma molto alta del corpo. Ogni ulteriore induzione sarebbe arrischiata.

In tanta scarsezza di conoscenze, avendo recenti scoperte in varie località della provincia di Lecce fornito alcuni avanzi di pesci cretacei, m'è sembrato utile farne oggetto di esame, tanto più che il risultato di questo, mentre da un lato presenta un interesse paleontologico con la istituzione di una specie nuova, tende a confermare dall'altro le conclusioni cronologiche ottenute con l'esame degl'invertebrati.

Infatti gli avanzi di pesci studiati da me, essendo già rappresentati in ittiofaune cenomaniane (*Scombroclupea macrophthalma* Heckel sp., riscontrata pure a Comen, Lesina, ecc.) o avendo le maggiori affinità con altre specie di questo piano (*Halec Bassanii* n. sp., somigliante ad *H. Haueri* di Comen, Malidol, Lesina, isola di Brazza, ecc.; e *Coelodus* sp. vicino a *Coel. Muraltii* Heckel del calcare di Pola e di Parenzo, nell'Istria, e a *Coel. cantabrigiensis* A. S. Woodward del Cenomaniano di Cambridge, in Inghilterra), inclinano, benchè in numero ristretto, ed alcuni anche frammentari, a far ritenere che il calcare dolomitico che li contiene debba essere riferito al Cenomaniano. Questo risultato, mentre appoggia l'idea già espressa dal prof. C. F. Parona, cioè che la *facies* dolomitica non si arresti ai soli calcari urgoniani, come si era dapprima creduto, ma invada i piani più recenti del Cretacico [3]), porta un nuovo argomento per dimostrare l'esistenza del Cenomaniano nel Leccese, finora stabilita dal Parona, dal Dainelli e dal De Franchis in base alla presenza dell'*Apricardia carentonensis* d'Orbigny sp. (riscontrata sulla via da Lecce a Lèquile e nelle località: Pindaro, la Vita, la Scisciola, lo Schito, il Pede-grosso, il Basilico, del bacino di Galatina) e dell'*Apricardia laevigata* id. (trovata sulla detta via Lecce-Lèquile) [4]).

Degli esemplari studiati in questa nota l'*Halec Bassanii* si conserva nel Museo

[1]) Virgilio F., *Geomorfogenia della provincia di Bari*. Trani, 1900, pag. 68.

[2]) Giovene G. M., *Notizie geologiche e meteorologiche della Japigia*, in Mem. della Soc. It. delle Scienze, tomo XV, parte II. Verona, 1810, pag. 278, tav. V e VI.

[3]) Parona C. F., *Sopra alcune Rudiste* ecc., nota a pag. 4.

[4]) Le altre forme raccolte dal Dainelli nel calcare dolomitico sulla strada Lecce-Léquile non permettono utili confronti con le malacofaune cenomaniane, perchè nuove o specificamente indeterminabili.

geologico dell'Università di Napoli, gl'individui di *Scombroclupea macrophthalma* appartengono alla collezione paleontologica del R. Ufficio geologico, e dei due avanzi di *Coelodus* sp. uno è di proprietà del Gabinetto di Storia naturale dell'Istituto tecnico di Lecce, l'altro fa parte della ricca collezione del prof. Cosimo De Giorgi, in Lecce.

Al prof. Francesco Bassani, che aveva raccolto molte indicazioni relative ai fossili che formano oggetto di questa nota, dei quali ha voluto gentilmente affidarmi lo studio, e che mi è stato sempre largo di aiuti e di consigli, esprimo la mia gratitudine.

Halec Bassanii n. sp.

Fig. 1-6.

L'individuo, basso e di forma slanciata, misura 125 millimetri nella totale lunghezza; in questa è compresa circa sei volte la massima altezza del tronco, presa un po' dopo l'arco toracico. Le linee che segnano i profili superiore e inferiore del tronco, alquanto arcuate nella metà anteriore, diventano pressochè diritte nella regione codale, e il corpo si assottiglia gradatamente fino al pedicello della coda, alto nove millimetri.

La testa, grande e triangolare, è contenuta (insieme con l'apparato opercolare) tre volte nella lunghezza del pesce, esclusa la coda, e più di cinque volte vi è compresa la sua altezza. Le ossa che la compongono, screpolate, rotte e alcune anche spostate (per es., il frontale) sono mal definibili; assai poco si può dire dello squarcio boccale, nella metà posteriore del quale si riesce a intravedere appena i margini del mascellare e un frammento di sopramascellare: anteriormente rimane solo l'espansione terminale, in forma di piccolo triangolo, del premascellare. Quasi nulla resta dei denti: con l'aiuto della lente si riesce a scorgerne due o tre, all'estremità del muso, piccoli, conici, evidentemente appartenenti al dentario, il quale doveva essere robusto, ma non permette, per il suo cattivo stato di conservazione, di stabilirne con sicurezza i confini. L'orbita, ampia, arrotondata, alta, è traversata dal presfenoide nel suo quarto inferiore: il suo diametro uguaglia l'altezza del pedicello codale. L'apparato opercolare ha la superficie leggermente striata. Si contano una diecina di raggi branchiosteghi.

La colonna vertebrale è composta di trentasei vertebre, anteriormente un poco più alte che lunghe, delle quali sedici sono codali. Le apofisi spinose, assai forti presso la base, sono quasi diritte nella metà posteriore del tronco (fig. 4), notevolmente arcuate verso l'indietro in quella anteriore (fig. 3). Le neurapofisi delle vertebre addominali hanno quasi tutte (eccettuate le ultime), in vicinanza dell'estremità distale, delle appendici secondarie, pure arcuate; le coste sono robuste.

Le pinne pettorali distano dall'estremità del muso di un tratto corrispondente allo spazio tra l'ultimo raggio dorsale e il pedicello della coda; si contano nove raggi, appuntati, semplici, dei quali i maggiori raggiungono una lunghezza di sei vertebre.

Le ventrali, la cui origine è a 38 millimetri da quella delle pettorali, sono in-

serite a metà del tronco, a livello del settimo interspinoso della dorsale, e sorrette da ossa pelviche molto sottili, solcate, terminate in punta e lunghe 8 millimetri. I raggi che le compongono sono in numero di otto, probabilmente divisi all'estremità, la quale non è ben conservata: la loro lunghezza doveva essere di poco inferiore a quella dei raggi pettorali.

La pinna dorsale, quasi opposta alle ventrali, comincia un po' prima di queste ed ha una estensione di nove millimetri, corrispondente alla lunghezza di cinque vertebre codali. Risulta di 12 o 13 raggi, che si vanno lievemente accorciando verso l'indietro; il primo è inserito a metà della lunghezza totale: molli e semplici nel tratto che è conservato, essi mostrano verso l'estremità pallide tracce di suddivisione. Sono portati da interapofisari quasi diritti, i quali decrescono, eccettuato il primo, assai breve, dall'avanti all'indietro. La distanza tra l'inserzione dell'ultimo raggio dorsale e il pedicello codale corrisponde al triplo dell'altezza di questo.

La pinna anale, piccola e remota, pare costituita da otto o nove raggi, divisi distalmente e diminuenti successivamente in altezza; il primo di essi, inserito ad uguale distanza dalle ventrali e dal pedicello della coda, è a livello della decima vertebra codale (contate dall'indietro).

La codale, compresa cinque volte e mezza nella lunghezza totale del pesce, è forcuta, ma non conservata bene sino all'estremità. Ciascun lobo è costituito da circa 15 raggi (fig. 5), dei quali i nove interni sono divisi, gli altri semplici; fra questi il primo è lungo, i quattro o cinque successivi, esterni, si abbreviano rapidamente. Eccettuati i più piccoli, tutti gli altri sono articolati; le linee di divisione tra un articolo e i contigui sono ondulate (fig. 6).

L'esemplare testè descritto, che mostra all'evidenza i caratteri della fam. *Enchodontidae*, deve, per la posizione delle pinne, per le particolarità della testa e per la mancanza di scudi dorsali o laterali, essere ascritto al gen. *Halec* Agassiz, il quale comprende specie del Sopracretacico della Boemia, dell'Inghilterra, della Siria, della Dalmazia e della Westfalia.

Nettamente distinto dalle specie *H. Sternbergi* Ag. e *H. eupterigius* (Dixon) per il minor numero di vertebre, il fossile del Leccese, che può considerarsi il più piccolo fra gli *Halec* conosciuti, avvicinandosi per la sua statura solo all'*Halec* aff. *Haueri* Bassani sp. [1]), proveniente dal Sopracretacico di Monte S. Agata, nel Friuli austriaco, si differenzia d'altra parte dall'*H. microlepis* (Davis) principalmente per la proporzione tra l'altezza e la lunghezza, per il numero maggiore di vertebre e per la posizione della pinna anale. Notevolmente diverse nell'aspetto sono pure le specie *H. Laubei* Fritsch e *H. guestphalicus* (von der Marck), per quanto esclusivamente rappresentate l'una dalla sola testa, l'altra dalla testa e dal tratto anteriore del tronco di un grande individuo.

L'esemplare di cui ci occupiamo presenta invece le maggiori affinità con *Halec Haueri* (Bassani), riscontrato a Comen, a Lesina, a Malidol e all'isola di Brazza (?). Un carattere che fa distinguere subito il nostro fossile da questa specie, e che lo allontana ancor più dalle altre fin qui nominate, è dato dalla inserzione più remota

[1]) Bassani F., *Ueber zwei Fische aus der Kreide des Monte S. Agata im Görzischen*, in Jahrbuch d. k. k. geol. Reichsanst., 1884, Band 34, Heft 5, pag. 403, tav. IX, fig. 1-2.

della dorsale e delle ventrali, opposte ad essa. La pinna dorsale infatti, che nell'*H. Haueri* comincia ai due quinti della lunghezza totale o anche più innanzi, si inizia nel fossile del Leccese non prima della metà del corpo; e conseguentemente la distanza fra ventrali e pettorali, che nella specie presa a confronto è di solo dieci vertebre circa, è nella nostra di ben venti vertebre [1]). Così pure le vertebre, che negli esemplari di Lesina e Comen sono distinte in 21 o 22 addominali e 14 codali e nel fossile dell'isola di Brazza sono rispettivamente 16 e 18, nel pesce leccese si suddividono in 19 addominali e 16 codali. Finalmente vi è pure differenza nell'altezza del pedicello codale, la quale tanto nell'*H. Haueri* di Lesina quanto nell'esemplare da me studiato è di nove millimetri, mentre il primo dei fossili è lungo quasi il doppio dell'altro.

Tutte le ragioni suaccennate m'inducono a ritenere che il pesce testè descritto si possa considerare come rappresentante di una specie nuova, che chiamo *Halec Bassanii*, in segno di riconoscenza verso il Maestro che è stato mia prima guida negli studi paleontologici.

Detto fossile proviene da Acquàrica del Capo, presso Presicce; vi fu trovato nel 1897 dal maestro muratore Gabriele Panese, tra le pietre che si scavano sotto il terreno vegetale, a trenta centimetri o poco più di profondità, nel preparare le fosse per i magliuoli.

Scombroclupea macrophthalma (Heckel) Pictet et Humbert

Fig. 7.

1843. *Clupea macrophthalma*, J. J. Heckel, *Abbildungen und Beschreibungen der Fische Syriens*, pag. 242, tav. XXIII, fig. 2. Wien.
1863. *Scombroclupea pinnulata*, R. Kner, *Ueber einige fossile Fische aus den Kreide- und Tertiärschichten von Comen und Podsused*, in Sitzungsb. k. Akad. Wiss., math.-naturw. Cl., vol. XLVIII, parte I, pag. 132, tav. II e tav. III, fig. 1.
1866. *Scombroclupea macrophthalma*, Pictet et Humbert, *Nouvelles recherches sur les poissons fossiles de M. Liban*, pag. 71, tav. IX, Genève.
1867. *Scombroclupea pinnulata*, R. Kner, *Neuer Beitrag zur Kenntniss der fossilen Fische von Comen bei Görz*, in *loc. cit.*, vol. LVI, parte I, pag. 187, tav. I, fig. 2.
1882. *Scombroclupea macrophthalma*, F. Bassani, *Descrizione dei pesci fossili di Lesina* ecc., in Denkschr. k. Akad. Wiss., math.-naturw. Cl., vol. XLV, pag. 225, 261 e 265, tav. VII, fig. 7-13, tav. X, fig. 3, e tav. XI, fig. 3.
1886. *Scombroclupea macrophthalma*, D. Gorjanovic-Kramberger, *Palaeoichthyologische Beiträge*, in Soc. Hist. Natur. Croatica, vol. I, pag. 131.
1891. *Scombroclupea macrophthalma*, D. Gorjanovic-Kramberger, *Palaeoichthyolozki Prilozi*, Dio II, in Rad Jugoslaw. Akad., vol. CVI, pag. 65, tav. I, fig. 10.
1901. *Scombroclupea macrophthalma*, A. S. Woodward, *Catalogue of the fossil fishes in the Br. Mus.*, parte IV, pag. 135, tav. VI, fig. 1.

L'esemplare figurato, privo della parte posteriore del tronco e delle pinne anale e codale, doveva nella lunghezza complessiva misurare più di cinque centimetri: in questa è compresa cinque volte la maggiore altezza del tronco.

[1]) L'avanzo proveniente dal Sopracretacico di Monte di S. Agata e descritto dal Bassani (*loc. cit.*) corrisponde, per l'inserzione della dorsale e delle ventrali, con la specie *Halec Haueri*.

Nella testa, lunga quattordici millimetri e alta dieci, si notano specialmente: l'impronta del caratteristico mascellare, con orlo orale convesso e ricoprente in parte il dentario; l'orbita, alta, arrotondata; l'apparato opercolare, discretamente sviluppato, e sei o sette raggi branchiosteghi, spostati e rotti.

La colonna vertebrale, che doveva complessivamente essere costituita da una quarantina di vertebre, ne ha conservate circa trenta, delle quali le anteriori hanno il diametro verticale quasi uguale a quello longitudinale; le successive invece si fanno più lunghe che alte. Nella regione addominale le neurapofisi sono molto delicate, diritte o leggermente arcuate in avanti e provviste di appendici secondarie; nel tratto caudale invece tanto le neurapofisi che le emapofisi sono più robuste e notevolmente piegate verso l'indietro: le coste si mostrano sottili e lunghe. Delle coste sternali restano deboli impronte soltanto nella parte anteriore.

Le pinne pettorali, la cui inserzione è più vicina all'origine della dorsale che all'estremità del muso, sono costituite da circa dodici raggi, divisi all'estremità, dei quali i meglio conservati sono lunghi sei millimetri.

Le ventrali, opposte alla metà della dorsale e distanti quindici millimetri dalle precedenti, risultano di cinque raggi, lunghi tre millimetri.

Della pinna dorsale, che comincia a livello della tredicesima vertebra, rimangono soltanto otto o nove raggi, anch'essi non completamente conservati.

Il fossile testè descritto, avuto gentilmente in comunicazione dal prof. Giovanni Di Stefano, proviene dal calcare di Nardò, il quale somiglia molto a quello di Hakel (M. Libano). Vi fu trovato anche un altro esemplare, privo della parte posteriore del tronco: benchè piccoli e mutilati, si possono con grandissima probabilità ascrivere entrambi a *Scombroclupea macrophthalma* (Heckel) Pictet et Humbert per le strettissime analogie che presentano con questa specie.

La *Scombroclupea macrophthalma*, riscontrata a Comen, Lesina, Crespano, Tolfa e Hakel, è distinta dalla *Scombr. Gaudryi* (Pictet et Humbert), proveniente da Lesina, Hakel ecc., per le diverse proporzioni fra l'altezza e la lunghezza, e dalla *Scombr. scutata* A. S. Woodward [1]) del Cretacico del Brasile per la mancanza di squame solcate all'anale e per il numero dei raggi delle pinne.

Coelodus sp.

(Cfr. **Coel. cantabrigiensis** A. S. Woodward e **Coel. Muraltii** Heckel)

Ascrivo al gen. *Coelodus* due frammenti di dentatura spleniale.

Uno, proveniente dai calcari affioranti tra Monteroni e Copertino, e conservato nel Gabinetto di Storia naturale dell'Istituto tecnico di Lecce, mostra cinque denti, appartenenti al mascellare destro, ellittici trasversalmente e a superficie liscia e convessa: due di essi, molto allungati, col diametro longitudinale più che doppio di quello trasversale, appartengono alla fila interna, comprendente i denti più grandi; gli altri tre, pure ellittici, ma a diametri meno disuguali, sono della serie di mezzo.

[1]) A. S. Woodward, *On fossil fishes from the Cretaceous formation of Bahia (Brazil)*, in Quarterly Journal of the Geological Society, vol. LXIV, 1908, pag. 360, tav. XLIII, fig. 3 e 4.

Questi denti offrono grandi analogie con quelli provenienti dal Cenomaniano di Cambridge, in Inghilterra, che il dott. A. Smith Woodward illustrò col nome di *Coel. cantabrigiensis* [1]).

L'altro frammento, trovato nel calcare di Campi, nei dintorni del paese, e appartenente alla collezione del prof. C. De Giorgi, in Lecce, mostra tre grossi denti ellittici, successivamente decrescenti, che possono spettare tanto alla fila mediana dei denti palatini quanto alle file principali interne di quelli spleniali: più probabilmente (data la loro lunghezza) a queste ultime.— La forma assai caratteristica, che non lascia alcun dubbio sulla determinazione generica, li fa avvicinare ai frammenti descritti dall'Heckel [2]) e dal Bassani [3]) col nome di *Coel. Muraltii*, e provenienti dal calcare di Pola e di Parenzo, nell'Istria.

Napoli, Istituto geologico dell' Università, Dicembre 1910.

finita di stampare il dì 10 Maggio 1911

[1]) A. S. Woodward, *A Synopsis of the remains of Ganoid fishes from the Cambridge Greensand*, in Geological Magazine, anno 1895, pag. 208, tav. VIII, fig. 2, 2a.

[2]) J. J. Heckel, *Ueber den Pycnodus Muraltii von Pola* (Berichte über die Mittheilungen von Freunden der Naturwiss., vol. IV, pag. 184. Wien, 1848). — Id., *Beiträge zur Kenntniss der fossilen Fische Oesterreichs* (Denkschr. d. k. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Cl., Band XI, pag. 225, tav. VIII, fig. 2. Wien, 1856).

[3]) F. Bassani, *Note paleontologiche* (Atti Soc. Veneto-Trent. di Sc. nat., vol. VII, pag. 26-28, tav. C, fig. 5. Padova, 1880).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. *Halec Bassanii* n. sp., di Acquàrica del Capo, presso Presicce, in grandezza naturale (Museo geologico dell' Università di Napoli).

Fig. 2. *Id.*, (Controparte).

Fig. 3. *Id.*, Vertebra della metà del tronco, molto ingr.

Fig. 4. *Id.*, Vertebra della regione anale, molto ingr.

Fig. 5. *Id.*, Ricostruzione schematica della codale, molto ingr.

Fig. 6. *Id.*, Articoli di un raggio codale, a più forte ingrandimento.

Fig. 7. *Scombroclupea macrophthalma* (Heck.) Pict. et Humb., di Nardò, in grandezza naturale (Collezione paleontologica del R. Ufficio geologico d' Italia).

1

7

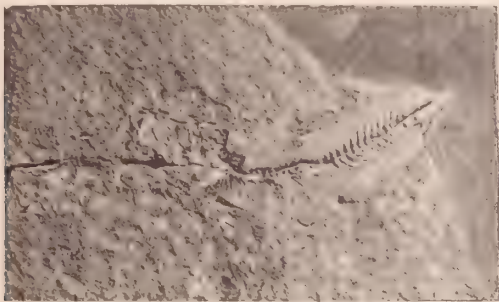
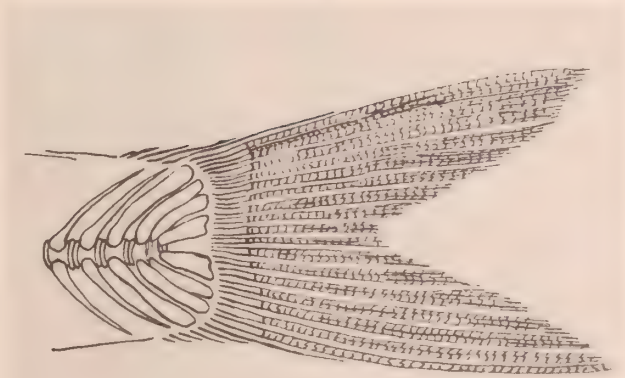
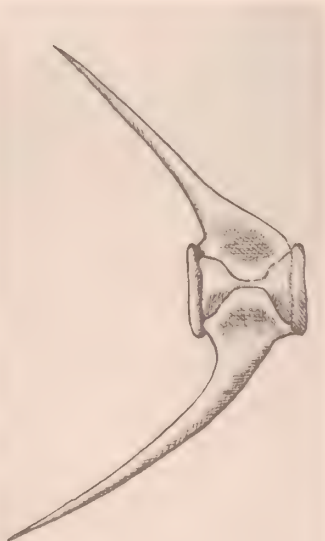
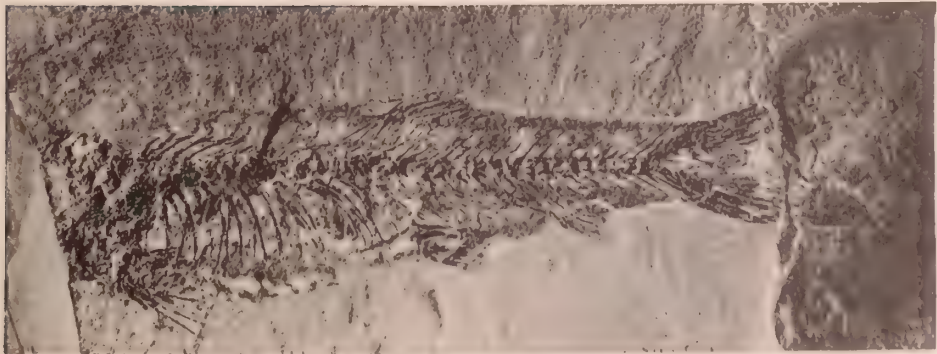
3

4

6

5

2

Vol. XV, Serie 2.ª N.° 6.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

I GASTROTRICHI

DEL LAGO-STAGNO CRATERICO DI ASTRONI

MEMORIA

della dott.sa INES MARCOLONGO

presentata nell' adunanza del dì 4 Marzo 1911

INTRODUZIONE

I Gastrotrichi delle acque dolci italiane non hanno formato mai oggetto di speciali ricerche, nè figurano negli indici faunistici di coloro, che si sono occupati di limnologia biologica e fisica tanto in passato quanto in tempi più o meno recenti; solo il Maggi (1878, pag. 4) fa menzione dell'*Ichthydium podura* O. Fr. Müller e del *Chaetonotus larus* O. Fr. Müller nel suo elenco dei Sistolidi della Valcuvia; lo Zacharias cita il *Chaetonotus Chuni* Voigt nella Lanca Rottone presso Pavia (1905, pag. 268), e l'Issel jun. (1901, pag. 30; 1906, pag. 40) nota il *Lepidoderma ocellatum* F. Metschnikoff nelle acque termali euganee. Il Perty poi (1849, 1852) riporta il *Chaetonotus maximus* C. G. Ehrenberg, il *Chaetonotus Schultzei* F. Metschnikoff e il *Chaetonotus larus* O. Fr. Müller nella fauna di Lugano, e dalla Grünspan (1908, pag. 246) si trova citato nel suo elenco sistematico geografico il *Lepidoderma squammatum* F. Dujardin nella microfauna di Trieste. Infine voglio rammentare il « peloso animaluzzo molle » che Bonaventura Corti rinvenne a Modena (1774, pag. 87, tav. 2, fig. XI) e che l'Ehrenberg crede di potere identificare con il suo *Chaetonotus maximus*. Convinto che l'esplorazione sistematica delle acque dolci italiane, riguardo alla microfauna in genere e a quella dei Gastrotrichi in specie, avesse dovuto condurre a risultati positivi, il Prof. Fr. Sav. Monticelli, alla cui iniziativa si deve lo studio in corso della microfauna del lago-stagno di Astroni, volle affidare a me, sotto la guida del suo Aiuto al Laboratorio Dott. Giulio Tagliani, la ricerca e la identificazione dei Gastrotrichi viventi in questo isolato laghetto d'acqua dolce dei Campi Flegrei [1]).

Le specie trovate dal novembre 1909 a tutto luglio 1910 — periodo nel quale

---

[1]) Delle presenti ricerche venne fatta comunicazione al Convegno Zoologico Italiano tenuto l'anno scorso a Napoli (v. Bibliografia).

ho potuto eseguire le ricerche — sono state 17, di cui 8 nuove, e di queste 6 appartenenti al genere *Chaetonotus*:

Chaetonotus laroides
» *hirsutus*
» *minimus*
» *nodifurca*
» *decemsetosus*
» *paucisetosus.*

1 appartenente al genere *Dasydytes*:

Dasydytes paucisetosus

1 al nuovo genere *Anacanthoderma*:

Anacanthoderma punctatum.

Delle forme già conosciute, 2 non erano state fin'ora notate in Europa:

Chaetonotus enormis Stokes.
» *acanthophorus* Stokes.

I metodi da me usati per lo studio tassinomico dei Gastrotrichi non sono improntati a nessuna tecnica speciale, perchè, non avendo potuto mai disporre di un materiale molto abbondante, ho dovuto rinunciare alla ricerca della loro minuta organizzazione e mi sono perciò limitata al riconoscimento e alla accurata identificazione delle forme. Dapprima ho esaminato gli animali viventi, neppure ricoperti da vetrino coprioggetto, cercando di fissarne la forma quale realmente è e non quale si presenta dopo l'azione dei fissativi o la pressione del coprioggetto. Per evitare, quanto più era possibile, la deformazione, che segue all'azione brusca di qualsiasi liquido fissativo, ho lentamente anestesizzato gli animali, aggiungendo all'acqua in cui si muovevano una o più gocce di acido acetico glaciale in soluzione molto diluita (°/₀) ; quando i movimenti dei nastri ciliari cominciavano a rendersi appena sensibili, coprivo l'animale molto delicatamente con il vetrino coprioggetto, facendo poi passare tra questo e il portaoggetto — tra cui il Gastrotrico era contenuto — una corrente di liquido dell' Hermann (aceto-osmio-platinico), liquido, che ho preferito a quello dell' Hertwig (aceto-osmico) adoperato dallo Zelinka, per la presenza del cloruro di platino, che in certo modo limita l'annerimento prodotto dall'acido osmico applicato a solo e non ingiallisce di troppo il preparato. Ho tentato di avvalermi del sublimato in soluzione acquosa satura, del liquido sublimato-picrico del Rabl, del liquido del Perenyi, dell'alcool assoluto, ma con minor risultato favorevole della miscela dell' Hermann. E pure poco adatto ho trovato il liquido del Flemming, usato dal Voigt, che, similmente al liquido dell' Hertwig, ingialliva troppo l'animale, rendendo meno chiari i minuti particolari del tegumento. Poco vantaggio ho potuto ritrarre dalle colorazioni in toto. Come eccellente anestetico, o meglio paralizzante, ho più tardi sperimentato nel corso delle ricerche il rosso-neutro in soluzione diluitissima (1 : 10000). Io aggiungevo di questa soluzione una goccia a quella in cui si trovava l'animale; dopo pochi secondi l'intestino era colorato in rosso, e l'animale rimaneva completamente disteso, muovendosi per breve tempo con grande lentezza, e restando poi del tutto paralizzato, mentre solo i due nastri ciliari continuavano a muoversi con rapidità e per lungo tempo. Quando però, raggiunte queste condizioni, cercavo di fare agire il liquido dell' Hermann o un altro qualsiasi fis-

satore, l'animale si disgregava quasi istantaneamente: e di questo fatto non ho saputo mai darmi ragione. Dopo averli fissati in liquido dell' Hermann, ho conservato i preparati per solito in glicerina purissima. Il balsamo del Canadà, per il suo alto potere rifrangente, si adatta poco allo studio di questi animali, i quali vengono rischiarati tanto fortemente da essere resi del tutto trasparenti e non lasciano quindi vedere la loro intima organizzazione. Mi ha dato ottimi risultati l'euparale, che evita alcune manipolazioni e, rendendo meno trasparente il preparato, mette in evidenza particolari minutissimi quali ho potuto riconoscere nello studio del *Lepidoderma rhomboides* Stokes.

Nella descrizione delle specie ho seguito per la sistematica essenzialmente lo Zelinka, secondo l'ordine segnato nel seguente breve prospetto:

Ord. Euichthydina, C. Zelinka, 1889.
Estremità posteriore del corpo intaccata e provvista di due appendici forcali più o meno lunghe.
Fam. **Ichthydidae**, C. Zelinka, 1889.
Tegumento liscio o squamato, ma privo di spine.
Gen. *Ichthydium*, C. G. Ehrenberg, 1830.
Gen. *Lepidoderma*, C. Zelinka, 1889.
Fam. **Chaetonotidae**, C. Zelinka, 1889.
Tegumento provvisto di spine.
Gen. *Chaetonotus*, C. G. Ehrenberg, 1830.
Ord. Apodina, C. Zelinka, 1889.
Estremità posteriore del corpo per lo più arrotondata e costantemente priva di appendici forcali.
Fam. **Dasydytidae**, E. v. Daday, 1905.
Corpo provvisto di spine o di setole. Capo ben distinto dal corpo e senza tentacoli. Estremità posteriore del corpo arrotondata o lievemente intaccata.
Gen. *Dasydytes*, P. H. Gosse, 1851.
Fam. **Anacanthodermidae**, I. Marcolongo, 1910.
Corpo completamente sprovvisto di spine, setole e squame. Capo distinto dal tronco e privo di tentacoli. Estremità posteriore del corpo nettamente arrotondata.
Gen. *Anacanthoderma*, I. Marcolongo, 1910.

ELENCO DESCRITTIVO DELLE SPECIE STUDIATE

Ordine — **EUICHTHYDINA**, C. Zelinka (1889)

Famiglia **Ichthydidae**, C. Zelinka (1889)

Genere **Ichthydium**, C. G. Ehrenberg (1830)

1) **Ichthydium podura**, O. Fr. Muller, 1773.

Sinonimia — *Cercaria podura*, O. Fr. Müller (1773) tom. 1, pag. 66; (1786) pag. 124, tav. 19, fig. 1-5, escl. fig. 3.
Furcocerca podura, I. B. Lamarck (1815) pag. 447.
Euchelys podura, Chr. L. Nitzsch. (1817) pag. 6.
Diurella podura, Fr. W. Hemprich et C. G. Ehrenberg (1820) tav. I, fig. XI (nel testo però si ha la denominazione di *Ichthydium podura*).
Furcocerca triloba, I. B. Bory de St. Vincent (1824) (citato da Ehrenberg).
Ichthydium podura, C. G. Ehrenberg (1829) pag. 8, 16; (1830) pag. 44; (1831) pag. 50, 121; (1838) pag. 388, 389, tav. 43, fig. 2. — F. Dujardin (1841) pag. 270. — P. H. Gosse (1864) pag. 392, 393. — H. Ludwig (1875) pag. 214-218, tav. 14, fig. 1-4. — C. Zelinka (1889) pag. 296-299, tav. 14, fig. 15, 16. — Th. Grünspan (1910) pag. 244-256 fig. 8.
Chaetonotus podura, A. C. Stokes (1887) pag. 150.

Note. — Ho trovato frequentemente questa specie, sopratutto in maggio e giugno, tra le *Lemna* e il detrito organico in vicinanza della riva, in compagnia di parecchie specie di Rotiferi e di numerosi Infusori ciliati. Parecchi individui erano sessualmente maturi: tra essi qualcuno possedeva due uova bene sviluppate, uno dal lato destro, e un altro da quello di sinistra. Lunghezza degli esemplari da me esaminati 74-78 μ.

Genere **Lepidoderma**, C. Zelinka (1889)

2) **Lepidoderma rhomboides**, A. C. Stokes, 1887.

Tav. 3, fig. 20-23.

Sinonimia — *Chaetonotus rhomboides*, A. C. Stokes (1887) pag. 561, 562, tav. 2, fig. 31-35.
Lepidoderma rhomboides, C. Zelinka (1889) pag. 309, 310, tav. 15, fig. 4 *a-d*. Th. Grünspan (1910) pag. 253-255, fig. 12 *a-c*.
Chaetonotus longicaudatus, F. G. Tatem (1876) pag. 251, 252, tav. 10, fig. 1.— C. Zelinka (1889) pag. 447, 448, fig. 10.—Th. Grünspan (1910) pag. 347, 348, fig. 60.

Descrizione — È uno dei Gastrotrichi di maggiori dimensioni, misurando poco meno di 0,4 mm. Il corpo è nastriforme, relativamente sottile, e molto slanciato; presenta quasi da per tutto la medesima larghezza, meno un lieve restringimento nella regione del collo e un lieve rigonfiamento a metà del corpo, il cui massimo diametro trasverso (42 μ) non sorpassa la massima larghezza del capo (42 μ).

Malgrado il suo aspetto svelto, questo animaletto è relativamente torpido: si avanza con movimenti serpentini piuttosto lenti, quasi trascinasse a fatica il lungo corpo e le due gracili ma lunghe appendici forcali. Il corpo è del tutto privo di spine, ma ricoperto di squame, carattere costante di tutti i rappresentanti del genere. Osservando l'animale vivo e a debole ingrandimento, esso presenta una delicatissima e serrata anellatura (fig. 20), così come si rileva anche dalla figura d'insieme di *Lepidoderma elongatum* data dal Daday nel 1905; quando però l'animale è morto, l'anellatura o striatura trasversale diviene meno appariscente e il tegumento sembra piuttosto punteggiato, punteggiatura, come ora dimostrerò, corrispondente agli apici liberi delle squame, di cui è ricoperto tutto il corpo. Ma quando l'animale è stato convenientemente fissato (trattato prima con debole soluzione acetica, per anestesizzarlo, e poi con la miscela dell'Hermann), disidratato e chiuso in euparale, i caratteri del tegumento (adoperando lenti a immersione omogenea) si presentano nitidissimi e con le particolarità più minute. Dallà regione anteriore del capo fino alla base delle due appendici forcali si nota una successione ininterrotta di squame embriciate, disposte in serie trasverse e in modo che le squame di una serie si alternano con quelle della serie successiva (fig. 21). È proprio questa speciale disposizione, che mentisce l'anellatura del tegumento, anellatura, che è più evidente ai lati del corpo, ove pure meglio si dimostra l'embriciatura delle squame, avendosi in complesso quell'aspetto, che il Voigt ha riprodotto in una delle figure del suo *Aspidiophorus paradoxus* (1905, tav. 6, fig. 45a). Ed è anche una pura apparenza la disposizione a losanga descritta e raffigurata dallo Stokes (1887, pag. 572, tav. 2, fig. 32-33) e riprodotta dallo Zelinka (pag. 310, tav. 15, fig. 4c), e che pure si osserverebbe secondo il Daday (1887, pag. 29, 30, fig. 11) nel suo *Lepidoderma biroi*. Queste squame sono delle lamelle triangolari lievemente arcuate, lunghe 3 μ, con i lati liberi un po' convessi — ciò che pure lo Stokes ha osservato (pag. 562, nota) — e con l'apice rivolto in alto; alzando e abbassando il tubo del microscopio, si arriva a colpire un momento in cui le squame, che si trovano nel piano inferiore, più non si distinguono in totalità, ma invece risaltano i loro apici incurvati in alto, che meno illuminati assumono l'aspetto di rilievi neri, trigoni, acuminati, simili a corte e tozze spine, apici che dallo Stokes vennero interpretati, sebbene con un certo riserbo, come scaglie triangolari supplementari. Tali rilievi apparenti, a debole ingrandimento, conferiscono all'animale morto l'aspetto punteggiato già sopra notato, aspetto, che forse il Tatem era riuscito a sorprendere nel suo *Chaetonotus longicaudatus*, esagerandolo però, e forse anche ad arte, per dare un certo effetto plastico al disegno dalla linea troppo semplice. Le squame nella parte posteriore del capo e sul collo hanno dimensioni alquanto minori, e si stenta anche più a metterle in evidenza.

Il capo (fig. 23) del *Lepidoderma rhomboides* è subgloboso, misura in lunghezza 48 μ e in larghezza 42 μ. A ciascun lato si notano due linee oscure, che lo Stokes, (1887, tav. 2, fig. 35) seguito dallo Zelinka (tav. 15, fig. 4a), interpreta come due incisure o incavi abbastanza distinti. Il capo è ricoperto dorsalmente da uno scudo, derivante dal tegumento, e distinto in due porzioni: quella anteriore è fusa col tegumento cefalico, e si potrebbe considerare come un semplice ispessimento dello stesso, quella posteriore rappresenta una duplicatura del tegumento ed è libera e, fino ad un certo limite, mobile. Quando l'animale procede in linea retta, lo scudo cefalico aderisce

tutto alla superficie dorsale del capo, il quale si presenta allora completamente globoso, nè si possono vedere in tal caso le due linee oscure anteriori; quando però l'animale incurva il capo, o lateralmente, o ventralmente, per l'allontanarsi della porzione mobile dello scudo a mo' di una cocolla che si sollevi o si abbassi nei movimenti del capo, si mostrano le due linee oscure laterali anteriori, e le due posteriori si allargano, si rischiarano, e si forma una specie di seno più o meno ampio, che corrisponde allo spazio tra capo e porzione mobile dello scudo cefalico. In questa posizione, il capo può mentire, a una osservazione superficiale, l'aspetto trilobato descritto dallo Stokes (1887, pag. 561). Mancano assolutamente occhi o altri così detti corpi rifrangenti. Ai lati della bocca si trovano due ciuffi di peli tattili, alcuni dei quali lunghissimi; e più indietro ne esistono altri due, con peli molto più corti, ma più numerosi. Lo Stokes descrive dietro l'anello orale un solco trasverso, stretto e profondo, lungo circa la metà della lunghezza del capo. A me sembra invece di poter interpetrare questo preteso solco, data la sua posizione, la sua corrispondenza in larghezza al faringe ed il suo aspetto discoidale come un setto faringeo, perchè nel movimento del capo non muta di posizione, mentre si sposta, senza mutar forma, nei movimenti del faringe. Il collo è cilindrico, lungo appena 15 μ e largo 30 μ. Il corpo lungo 217 μ è percorso dall'intestino; anteriormente largo 30 μ, va lentamente allargandosi fino a raggiungere a metà lunghezza 42 μ, per poi restringersi di nuovo a poco a poco fino a riguadagnare il diametro trasverso di 30 μ in corrispondenza della forca codale. La forca codale (fig. 22) è rappresentata da due pezzi basali triangolari lunghi 9 μ, separati tra loro da una insenatura semilunare del diametro di circa 7 μ. All'apice tronco e arrotondato di ciascun pezzo basale si fissa un appendice forcale lunga 110 μ, rappresentata da uno strettissimo tubo cavo che va assottigliandosi gradatamente verso l'estremo libero e che è suddiviso in circa 20 segmenti, determinati da ispessimenti nodiformi delle sue stesse sottilissime pareti. Le branche della forca non sono immobili: quando l'animale procede in linea retta, esso suole tenerle distese per lungo; non raramente le divarica più o meno, talvolta disponendole ad angolo retto col corpo: questi movimenti sono favoriti dalla speciale maniera di attacco dei pezzi basali sul tronco, e dalla stessa insenatura interforcale, che, con lo spianarsi, agevola il divaricamento delle due appendici forcali. L'ostio boccale circolare, guarnito di corte setole, immette in una piccola cavità boccale crateriforme; il faringe muscoloso e largo occupa tutta la lunghezza del capo e del collo, mentre l'intestino ha la lunghezza del corpo.

Note. — Questo Gastrotrico appartiene certamente alle forme più rare del gruppo, poichè dopo lo Stokes, che lo scoperse a New Jersey (Trenton) nel Nord-America, fu ritrovato soltanto nel 1901 dal Lauterborn nelle acque principali (*Altwässer*) del Reno. Il fatto di averlo notato nel piccolo lago-stagno di Astroni, ci permette indurre che questa specie debba avere un'area di distribuzione geografica molto estesa, entrando così a far parte di quelle forme cosmopolite, le quali, pur presentandosi raramente alla nostra osservazione, debbono ritenersi come tali per le modalità stesse del loro habitat in regioni tra loro così distanti.

Io escludo dal genere *Lepidoderma* il *Lep. hystrix* Daday, giacchè esso è un vero *Chaetonotus*. A questo ultimo genere va pure riferito il *Lepidoderma* (*Ichthydium*) *Entzii* Daday, considerando che anche esso presenta spine non solo sul corpo, ma

altresì a quasi tutti gli articoli delle appendici forcali. E qui, a proposito delle specie del genere *Lepidoderma*, voglio far notare, che mentre nel testo il Daday afferma essere il *Lep. elongatum* privo di spine, ve le disegna intanto al capo e al collo (tav. 6, fig. 2), e di più, il Daday recentemente nel mettere in evidenza i caratteri differenziali tra il *Lep. hystrix* e il *Lep. elongatum*, scrive che nei suoi ultimi studi comparativi sulla cuticola anellata dell'ultima specie, ha osservato spine piccolissime ripiegate fortemente in basso, le quali spine aveva prima riguardato come linee della cuticola. Conseguentemente anche il *Lep. elongatum* andrebbe escluso, se così fosse, dal genere *Lepidoderma*. Ma le osservazioni superficiali contradittorie del Daday lasciano sempre il dubbio sulla precisa identificazione delle forme da lui descritte. Che se venisse provato fossero realmente forme di *Lepidoderma*, certo a parer mio sarebbero molto affini, e qualcuna (*Lep. elongatum e Lep. biroi*) anche identica al *Lep. rhomboides*. Contrariamente alle conclusioni dubitative che trae lo Zelinka dalle sue argomentazioni teoriche sulla interpetrazione del *Chaetonotus longicaudatus* del Tatem, io sono convinta che questa forma è senza dubbio un Gastrotrico e va riferito al genere *Lepidoderma*. La probabile interpretazione del Tatem delle linee oscure anteriori e posteriori per occhi, i ciuffi o pennelli di peli tattili per una corona ciliare cefalica, l'esagerazione nella punteggiatura del tegumento, hanno contribuito certamente a deviare i ricercatori posteriori, meno lo Stokes — che poi ignorava anche il lavoro del Tatem — dalla precisa identificazione di questo *Chaetonotus longicaudatus*. Alla stregua di queste considerazioni critiche, tenuto conto che l'autore stesso afferma essere il tegumento del *Ch. longicaudatus* liscio, e attenendomi inoltre all'aspetto del piccolo animale dal corpo nastriforme e slanciato e dalle lunghe appendici forcali, così come si vede riprodotto nel disegno stesso del Tatem, io ritengo senza dubbio trattarsi di una forma di *Lepidoderma* molto probabilmente identica al *Lep. rhomboides* o per lo meno a questo molto affine.

Famiglia **Chaetonotidae**, C. Zelinka (1889)

Genere **Chaetonotus**, C. G. Ehrenberg (1830)

3) **Chaetonotus maximus**, C. G. Ehrenberg, 1831.

SINONIMIA — *Chaetonotus maximus*, C. G. Ehrenberg (1831) pag. 153, tav. 3, fig. 6; (1838) pag. 389, tav. 43, fig. 3.—P. H. Gosse (1864) pag. 396, tav. I, fig. 4-5.—C. Zelinka (1889) pag. 312-317, tav. 12, fig. 4, 10, 12, tav. 13, fig. 1-4, 6-9, 11-13. Th. Grünspan (1910) pag. 263-266, fig. 14 *a, b, c*.
Chaetonotus squammatus, F. Dujardin (1841) pag. 569, tav. 18, fig. 8*a*.
Chaetonotus squamosus, M. Schultze (1853) pag. 247.
Chaetonotus gracilis, P. H. Gosse (1864) pag. 399, tav. I, fig. 8.
Chaetonotus maximus, larus, brevis, E. Metschnikoff (1865) pag. 451, tav. 35, fig. 5.
Ichthydium maximum, H. Ludwig (1875) pag. 219.

Nota. — Ho seguito senz'altro lo Zelinka nell'attribuire al *Ch. maximus* Ehrenberg il *Ch. gracilis* Gosse, non avendo potuto consultare direttamente il lavoro di quest'ultimo autore. E sono d'accordo ancora con lo Zelinka nel riportare alla sinonimia della specie in questione, le diverse tre forme (*Ch. maximus, larus, brevis*)

che il Metschnikoff ha raggruppate in un'unica specie (*Ch. maximus*). Il *Ch. squammatus* Dujardin è stato riferito dallo Zelinka al genere *Lepidoderma*; però la breve descrizione del zoologo francese e una delle figure annesse indicano abbastanza chiaramente che si tratta del *Ch. maximus* Ehrenberg, ciò che del resto aveva già intuito lo stesso Dujardin, ed è stato in seguito ritenuto dallo Schultze, dal Metschnikoff e dal Ludwig. Ho escluso dalla sinonimia il *Ch. larus* del Bütschli (nec Müller) essendo questo il tipo di una specie ben distinta, che io ho denominato *Chaetonotus laroides*. Alla diagnosi ed alle osservazioni dello Zelinka non ho nulla da obiettare e da aggiungere; gli esemplari di *Ch. maximus*, che ho esaminato, rispondevano perfettamente alle caratteristiche differenziali stabilite da questo autore.

Ho trovato il maggior numero di esemplari nel cuore dell'inverno: gli animali sono andati poi scomparendo di mano in mano; dall'aprile non m'è stato più possibile ritrovarne uno solo.

4) **Chaetonotus laroides**, I. Marcolongo, 1910.

Tav. 1, fig. 4-6.

SINONIMIA — *Chaetonotus larus*, O. Bütschli (nec Müller) 1876, pag. 386, 387, tav. 26, fig. 7-9.
Chaetonotus laroides, I. Marcolongo (1910) pag. 315.

Descrizione. — Questo grazioso animaletto, che somiglia molto al *Chaetonotus maximus* Ehrenberg, misura in lunghezza 186-200 μ, di cui 27-30 μ spettano alle appendici forcali. Il capo è nettamente quinquelobato, con lobi molto arrotondati; di cui il mediano — trasversalmente — è circa il doppio di ciascuno dei lobi laterali, la sua larghezza massima è di 29-30 μ in corrispondenza dei due lobi posteriori. Il collo è relativamente ristretto, lungo 36 μ e largo 19 μ. L'esofago è circa il terzo della lunghezza totale dell'animale. L'intestino è lungo 75 μ. Il dorso e i lati dell'animale sono ricoperti di spine semplici, arrotondate, disposte al collo in 11 serie longitudinali, e in 15 sul tronco. Le spine delle singole regioni sono tra loro tutte uguali, ma mentre quelle del capo misurano 12 μ, e quelle del collo 15 μ le altre del tronco vanno gradatamente aumentando in lunghezza da 20 a 22 μ; verso l'estremità del corpo esistono 9 spine, che sono le più lunghe di tutte e misurano 32 μ; 3 sporgono nel mezzo della forca e sono attaccate dorsalmente poco più sopra del margine interforcale e misurano 84 μ, e le altre 6 sono disposte a tre a tre simmetricamente di lato e poco in sopra della base delle appendici forcali. Tutte le spine partono dal centro di una squama, che ha forma rotondo-ovata, troncata posteriormente, e che sembra costituita da tre piani triangolari, lievemente inclinati, i cui apici s'incontrano nel punto basale d'impianto della spina. La forma delle squame, che ho riprodotta (fig. 5, 6), corrisponde esattamente a quella figurata dal Bütschli (1878, tav. 26, fig. 9 *a*, *b*), quindi trovo ingiustificata l'obiezione fatta dallo Zelinka, che la dichiara non corrispondente al vero.

Note. — Gli esemplari da me studiati sono stati pochissimi, avendone trovato ogni tanto uno e a notevole intervallo dall'altro. Erano però tutti adulti, contenendo

ciascuno nell'interno del corpo uova bene sviluppate. Lo Zelinka ha ritenuto il *Ch. larus* del Bütschli come identico al *Ch. maximus* Ehrenberg, nella cui sinonimia lo ha incluso. Senza dubbio la forma, descritta dal Bütschli e indentificata al *Ch. larus*, non corrisponde alla forma, tipica scoperta da Fr. Müller e poi individualizzata con esattezza dal Ludwig per le sue spine trigone (1875, tav. 14, fig. 12-13). La forma da me descritta, pur avendo punti di contatto molto più numerosi con il *Ch. maximus* Ehrenb. che non con il *Ch. larus* Müller, riguardanti specialmente la forma, la lunghezza e la disposizione delle spine, ha due caratteristiche costanti che la separano dal primo, cioè la forma del capo e la forma delle scaglie. Queste differenze morfologiche mi hanno indotta a riguardare la forma in discorso come una specie nuova, abbastanza bene caratterizzata.

5) **Chaetonotus hirsutus**, I. Marcolongo, 1910.

Tav. 1, fig. 1-3.

Sinonimia — *Chaetonotus hirsutus*, I. Marcolongo (1910) pag. 316.

Descrizione. — La lunghezza totale di questo animale è di .230 μ, quindi supera alquanto quella del *Ch. maximus* Ehrenberg — che secondo l'Ehrenberg oscilla fra 121 e 218 μ, e secondo lo Zelinka tra 112 e 205 μ — e anche quella del *Ch. Zelinkai* Grünspan, che raggiunge 224 μ. Il capo presenta 5 lobi, i quali sono meno prominenti di quelli del *Ch. maximus* Ehrenberg e del *Ch. laroides*, e tutti quasi della medesima grandezza. La larghezza massima del capo, misurata tra i punti più prominenti dei due lobi laterali posteriori, è di 34 μ, mentre la sua massima altezza è di 29 μ: esso trapassa senza notevole strozzamento, nel collo, che infatti nel suo punto più ristretto misura 29 μ. La massima larghezza e la massima altezza del tronco si uguagliano, misurando entrambe 44 μ. La faccia dorsale dell'animale è ricoperta da 13 file longitudinali di spine con disposizione alterna. Al collo si hanno soltanto 11 file. Queste spine sono semplici, cilindriche e partono dal centro di scaglie che per la loro conformazione differiscono moltissimo da quelle del *Ch. laroides*, perchè sono appuntite e mitriformi (fig. 3). Le spine al capo e al collo misurano fra i 12 e i 15 μ, quelle sul tronco fra i 20 e i 22 μ; poco in sopra del margine interforcale si notano 3 spine più lunghe, misuranti 33 μ, alternanti con 4 spine molto più corte, lunghe quanto quelle del capo e del collo. Notevoli sono due spine poste esternamente, alla base delle appendici forcali, una a destra ed una a sinistra; queste spine superano con i loro 50 μ, la lunghezza delle appendici forcali, che misurano solo 43 μ.

Note. — Per la forma del capo e per le due lunghe spine questa specie si distingue abbastanza bene dalle due precedenti; la forma delle scaglie costituisce un altro importante carattere differenziale tra la specie e il *Ch. maximus* Ehrenberg e il *Ch. laroides*. Ho esaminato soltanto due esemplari: erano entrambi maturi, contenevano cioè uova, e li ho trovati tra le lemne e le spirogire nel mese di aprile.

6) **Chaetonotus brevispinosus**, C. Zelinka, 1889.

Tav. 1, fig. 9, 10.

Sinonimia — *Chaetonotus brevispinosus*, C. Zelinka (1889) pag. 328-331, tav. 14, fig. 11-14. Th. Grünspan (1910) pag. 274-277, fig. 19 *a-c*.

Descrizione. — Presenta un corpo tozzo, la cui lunghezza oscilla tra i 140 e i 150 μ: il corpo è insensibilmente trilobo, grosso, quasi globoso, e si continua senza apprezzabile restringimento nel collo. Le spine sono cilindriche e partono dal centro di scaglie quasi circolari, tagliate ad angolo posteriormente; sono disposte in 11 serie longitudinali e sono quasi tutte uguali; quelle posteriori sono un po' più lunghe delle anteriori. Notevoli sono due spine quasi diritte, sopra al margine interforcale — Zelinka ne disegna di più in due serie (tav. 14, fig. 11-13) — e altre quattro, due a destra e due a sinistra, laterali alle due appendici forcali, molto incurvate, con la punta rivolta in basso e in dentro; queste 6 spine misurano poco più del doppio delle altre maggiori spine del corpo. Malgrado un' attenta ricerca non mi è stato possibile, nè pure con le lenti a immersione, di rintracciare quei corpi speciali riempiti di granuli neri, che lo Zelinka scrive che esistono al margine anteriore del corpo.

Note. — Di questa specie ho trovato pochissimi individui verso la fine di febbraio, e di essi, due con un organo speciale, che il Ludwig (1875, pag. 208, 209, 217) presume sia il testicolo; uno dei due (fig. 10) racchiudeva pure un uovo molto grosso (fig. 27). Lo Zelinka, in ciò seguito dalla Grünspan, ha ascritto alla sinonimia del suo *Ch. brevispinosus*, il *Ch. larus* del Fernald e il *Ch. larus* dello Stokes. La forma del Fernald deve per me essere attribuita al *Ch. multispinosus* Grünspan, e perchè presenta il capo a 5 lobi distinti, e per la forma e distribuzione delle spine, poichè mancano all'estremità posteriore quelle speciali spine, che sono poi la caratteristica fondamentale del *Ch. brevispinosus* Zel. In quanto al *Ch. larus* dello Stokes, tanto la breve e incompleta descrizione, che ne dà l'autore (1887, pag. 153), quanto il frammento di figura (1887, tav. 1, fig. 11), non autorizzano in alcun modo a trovargli un posto qualsiasi tra le specie di *Chaetonotus* conosciute; ma se la si volesse, malgrado la mancanza di dati ben definiti, identificare con un'altra specie qualunque, questa dovrebbe essere quella del Fernald, cioè il *Ch. multispinosus* Grünspan.

7) **Chaetonotus multispinosus**, Th. Grünspan, 1908.

Sinonimia — *Chaetonotus multispinosus*, Th. Grünspan (1908) pag. 225, 226, tav. 18, fig. 4 e 5. — (1910), pag. 303-304, fig. 42 *a, b*.
Chaetonotus larus, Ch. H. Fernald (1883) pag. 1217. — A. C. Stokes (1885) pag. 80, tav. 1, fig. XI.
Chaetonotus brevis, C. G. Ehrenberg (1838) pag. 390; tav. 43, fig. 5.
Chaetonotus tesselatus, E. Metschnikoff (1865) pag. 451, tav. 35, fig. 8.
Ichthydium jamaicense, C. Schmarda (1861) pag. 8, tav. 17, fig. 148 *a, b*.

Note. — Il *Ch. multispinosus* Grünspan ha molta somiglianza con il *Ch. brevispinosus* Zel., come la stessa Grünspan ha rilevato, e ancora più con il *Ch. minimus*. Ho già messo in rilievo a proposito del *Ch. brevispinosus* Zel., le diffe-

renze caratteristiche tra questa forma e quella, di cui ora mi occupo; dirò fra breve delle differenze con la specie seguente. La Grünspan dà del *Ch. multispinosus* la seguente descrizione, che coincide esattamente con i due individui da me osservati: « Corpo raccolto, grosso e tozzo ricoperto sul dorso da 17 + 2 serie longitudinali di spine semplici corte, tutte uguali, che partono da squame circolari. Capo ingrossato nettamente quinquelobato, largo 31 μ, collo anche grosso ma un po' meno largo. Esofago corto e grosso, lungo circa 38 μ e largo posteriormente 15,5 μ. Spazio tra i nastri ciliari coperto da scaglie delicate, a cui si attaccano spine con disposizione seriale alterna, 5 spine al punto più largo ».

Per quanto il Fernald non dia alcuna notizia sulla presenza e aspetto delle scaglie, tuttavia è qui che deve porsi la forma da lui descritta per *Chaetonotus larus*, come si può rilevare dalla figura dataci dall'autore medesimo. Ho già detto a proposito del *Ch. brevispinosus* Zel., perchè meglio al *Ch. multispinosus* che non al *Ch. brevispinosus* debba riferirsi, con le dovute riserve, la forma, che lo Stokes ha erroneamente indicata come *Ch. larus*. Forse nella sinonimia della specie dovranno comprendersi il *Ch. brevis* Ehrenbg, il *Ch. tesselatus* Metschnikoff e l'*Ichthydium jamaicense* Schmarda; su queste tre forme non si può dare un giudizio esplicito, perchè le descrizioni relative sono insufficienti, e le figure non tanto dimostrative da poter ritrarre dalle une e dalle altre caratteri differenziali tali da distinguere e delimitare tassinomicamente le specie.

8) **Chaetonotus minimus**, I. Marcolongo, 1910.

Tav. 2, fig. 14.

Sinonimia — *Chaetonotus minimus*, I. Marcolongo (1910) pag. 317.

Descrizione. — È forse la specie più piccola, che si conosca, dalla forma piuttosto sottile, dal portamento svelto. La lunghezza totale del corpo, compresa la forca codale è di 105 μ. Il capo è corto, ma relativamente largo; la sua massima larghezza, posteriormente, misura 18 μ. Esso presenta tre distinti lobi arrotondati: quello di mezzo — il frontale — alquanto più piccolo degli altri due e questi — i laterali — sono più arrotondati e più prominenti. Mancano macchie pigmentarie e speciali corpi rinfrangenti colorati al margine del capo. Esistono quattro ciuffetti di corti peli tattili. Il collo, ben distinto dal capo, digrada invece quasi insensibilmente nel tronco; è largo 18 μ. Il tronco sottile presenta la sua massima larghezza verso il terzo posteriore, misurando 80 μ, poco più della larghezza massima del capo. La forca codale misura circa 11 μ. Il corpo, dalla testa in giù è ricoperto di numerosissime spine tutte uguali, assai corte, semplici, lievemente arcuate, disposte in 13 serie longitudinali, serrate, ciascuna di circa 40 spine; ogni spina parte dal centro di una piccola e sottile scaglia circolare. Esistono ventralmente due soli nastri vibratili. La bocca si apre nel lobo mediano frontale del capo; è circolare e contornata da una corona di setole corte. L'esofago è lungo appena 22 μ, ed è lievemente strozzato nel mezzo. Intestino quasi rettilineo, lungo 65 μ. È una specie rara, avendone trovato due soli esemplari, nuotanti con agilità fra le piccole lemna, in compagnia di qualche Rotifero e di alcuni Ciliofori.

Note. — Il *Ch. minimus* si avvicina per l'uniformità e la brevità delle numerosissime spine al *Ch. multispinosus* Grünsp., e per tal fatto anche alle forme erroneamente determinate dal Fernald e dallo Stokes come *Ch. larus* Ehrbg; si distingue intanto da essi perchè non ha il capo quinquelobato, perchè ha forma più gracile e portamento più svelto. Ma la specie, che è più vicina al *Ch. minimus* n. sp., è veramente il *Ch. formosus* Stokes (1889, pag. 50-51), ritrovato recentemente dal Daday (1900, pag. 58, tav. 3, fig. 10 16), però il capo di questo, sebbene trilobo anch'esso, differisce alquanto da quello del primo; infatti lo Stokes dice che nel *Ch. formosus* il lobo anteriore è appiattito frontalmente e porta uno scudo cefalico e il Daday scrive essere il capo di questo animaletto, trilobo, con lobo mediano molto più sviluppato dei due laterali, che somigliano a tubercoletti sporgenti; tali caratteristiche non si riscontrano mai nel *Ch. minimus*. Un altro elemento differenziale si trova nelle dimensioni: il *Ch. minimus* misura nella lunghezza totale 105 μ, e non può certo superarla di molto, trattandosi di misura di animale già adulto, perchè maturo; per il *Ch. formosus* lo Stokes indica una lunghezza di 182 μ, e il Daday una anche maggiore, variante da 220 a 240 μ. Altro carattere differenziale importantissimo esisterebbe nel *Ch. formosus*, secondo le indicazioni concordi dello Stokes e del Daday, che allontanerebbe questa specie da tutte le altre forme conosciute di Chaetonotus e quindi anche dal *Ch. minimus*, nella costituzione delle spine: lo Stokes (1888) nota che ogni spina deriva dalla cuticola direttamente, senza che sia impiantata su d'una scaglia, e il Daday non si accontenta di affermare che la cuticola non ha scaglie, ma aggiunge che verificandosi tale fatto pure nel suo *Lepidoderma hystrix* (1910, pag. 37, tav. 3, fig. 11, 12) — che per me è un *Chaetonotus* bello e buono — le due specie potrebbero riguardarsi come i rappresentanti di un nuovo genere. Se si pensa alle difficoltà, che si incontrano tanto frequentemente nel poter mettere in rilievo le scaglie e la loro forma, specialmente nelle piccole specie, si comprenderà che non è permesso negare con tanta facilità la presenza di scaglie alla base delle spine nei Chaetonotus, solo perchè non si è riusciti a metterle in evidenza. Intanto, in attesa di più precise e decisive osservazioni in proposito, è bene eliminare dai caratteri differenziali delle due forme in questione le note relative alle scaglie, giacchè bastano i connotati desunti dalle dimensioni degli animali e quelli ricavati dalla forma del capo.

9) **Chaetonotus nodifurca**, I. Marcolongo, 1910.

Tav. 2, fig. 11-13.

Sinonimia — *Chaetonotus nodifurca*, I. Marcolongo (1910) pag. 317.

Descrizione. — È tra le forme di Chaetonotus una delle maggiori, misurando 395 μ nella sua lunghezza totale. Il suo corpo è molto allungato, nastriforme, e a primo aspetto rammenta il *Lepidoderma rhomboides* Stok., dal quale si differenzia per le numerosissime spine, che ne rivestono il dorso e i fianchi.

Il capo (fig. 12) è subgloboso, largo 45 μ, e presenta a destra e a sinistra una lieve incisura che lo rende trilobo; da queste incisure partono due ciuffetti di peli

tattili. Esiste uno scudo cefalico molto ben visibile (fig. 11) quando l'animale viene osservato di profilo. Il collo, largo al massimo 32 μ trapassa gradatamente nel tronco. Il tronco presenta trasversalmente ovunque la stessa larghezza di 45 μ, e si assottiglia solo in prossimità immediata della forca codale. Le due appendici forcali sono molto lunghe, misurano ciascuna 102 μ, e riproducono interamente, nella forma e costituzione, le appendici forcali del *Lepidoderma rhomboides* Stok: esse sono formate da due tubi esilissimi, leggermente ricurvi in fuori alle loro estremità, con pareti molto sottili, che presentano di tanto in tanto degli ingrossamenti nodiformi, i quali si vanno allungando e rendendo meno bene visibili verso le estremità assottigliatissime delle due medesime appendici. Il numero di queste nodosità, come a proposito del *Chaetonotus nodicaudus* giustamente fa rilevare il Voigt (1904, pag. 134), non si può determinare sicuramente, anche perchè il loro numero non deve essere costante per tutti gli individui, essendo ora di 20, ora anche più. Tutto l'animale, a cominciare dalla testa e persino sul primo tratto delle appendici forcali (fig. 13), è rivestito dorsalmente e lateralmente di numerose spine semplici, tutte uguali, che vanno a grado a grado rendendosi più lunghe (fig. 11, 12): quelle al capo e al collo misurano 8-10 μ, e quelle sul tronco 15-18 μ; le più lunghe si trovano alla base delle appendici forcali e nei due esemplari da me esaminati misuravano 21 μ, poco meno di quanto indica il Voigt per il suo *Ch. nodicaudus* (1904, pag. 135). Non mi è stato possibile in alcun modo mettere in evidenza le scaglie, per notarne i rapporti di forma. La bocca si apre anteriormente, proprio in sotto dello scudo cefalico, e presenta una corona marginale di cirri, nettissima (fig. 11). L'esofago è relativamente corto.

Note. — Al *Chaetonotus nodifurca* si avvicinano parecchie altre forme di *Chaetonotus*, le quali tutte presentano il medesimo carattere delle appendici forcali molto lunghe e nodose. La prima forma è stata descritta dal Daday (1881) sotto l'appellativo di *Ichthydium Entzii*, che lo Zelinka non ha riportato nella sua classica monografia. Io ho avuto tra mani il lavoro del Daday, ma non ho potuto tenerne tutto il debito conto, essendo esso redatto in lingua magiara, tuttavia posso affermare che l'*Icht. Entzii* non può identificarsi con la mia specie, dopo aver confrontato le figure relative, che ne riproducono i particolari, e aver tenuto conto della breve diagnosi latina, che dice: « *species ex Ichthydium familia elegantissima, corpore elongato; fronte obtusa supra orem appendiculo semilunari; pseudopodio furcato articulis multis; dorsi setis inaequalibus; epidermidis tabulis tetragonis* ».

Al *Ch. nodifurca* manca l'appendice frontale, mancano le scaglie rombiche, e mancano pure le spinette laterali a ciascun articolo delle appendici forcali, carattere dell'*Ichthydium Entzii* (v. Voigt, 1904, pag. 137); e tutto ciò non volendo anche tener conto della diversa forma generale delle due specie.

La seconda forma nota è quella descritta sommariamente dal Lauterborn (1893) col nome di *Ch. macracanthus*; la descrizione di questo autore potrebbe servire per tutte le forme di *Chaetonotus* a lunghe appendici forcali nodose. In fatti il Lauterborn dice della specie da lui rinvenuta che: « Il *Ch. macracanthus* si distingue per avere due lunge appendici codali articolate, quali con la medesima conformazione occorrono solo nel *Lepidoderma rhomboides* Stok.; che il corpo svelto è ricoperto di spine gracili, verso il dietro gradatamente allungantisi; misura in totalità la lun-

ghezza di 297 μ, di cui 81 per le appendici codali. La deficienza di diagnosi e la completa mancanza di illustrazioni non mi permettouo una più lunga discussione in merito, per tentare di identificare possibilmente con precisione la specie del Lauerborn.

La terza forma è rappresentata dal *Ch. nodicaudus* Voigt, con cui il *Ch. nodifurca* avrebbe le maggiori somiglianze, ma non può ad esso identificarsi e per la forma del corpo, molto diversa, e per lo scudo cefalico, che nel primo è tripartito e nell'altro è intero. Non essendo riuscita a mettere in evidenza le scaglie, malgrado tutti i tentativi fatti, non posso dedurre se nelle caratteristiche delle stesse esistono punti in pro o contro un maggiore ravvicinamento delle due forme in parola.

La quarta ed ultima forma a me nota, che ha dei punti di contatto molto rilevanti con il *Ch. nodifurca* è quella che recentemente il Daday (1900) ha descritto come *Lepidoderma hystrix*, e che io non esito a riferiro al genere *Chaetonotus*, come ho già detto innanzi (v. pag. 6), per il suo corpo tutto rivestito di spine. Il Daday fa rilevare che la cuticola tanto al dorso che ai lati e al ventre ha aspetto uniforme, cioè non è divisa nè in scaglie nè in anelli, e ripete che alla base delle spine la cuticola è più spessa che negli altri punti, ma non differenziata in lamelle, perchè le basi ispessite delle spine trapassano direttamente nella sottile membrana cuticolare. Questo fatto ho io pure osservato nel *Ch. nodifurca*, e, ripeto, il non aver potuto mettere in evidenza le scaglie, non è un motivo sufficiente per negarne assolutamente l'esistenza. Se l' aspetto generale dell' animale, quale si rileva da una delle figure (1910, tav. 3, fig. 11) del Daday, è stato ritratto con fedeltà, io non dubito che il *Lepidoderma hystrix* e il *Chaetonotus nodifurca* siano forme ben distinte. Se poi volessi prescindere da questo fatto, e tener conto piuttosto della seconda figura (tav. 3, fig. 12), che ritrae l'animale di profilo, e mi volessi attenere alle due descrizioni, la mia e la sua, che tanto bene collimano nei più minuti particolari, meno che per le misure, dovrei allora ritenere che le due specie in discussione sono la stessa identica forma. Il Daday vorrebbe anche nel suo *Lep. elongatum* aver trovato delle spine minutissime, che aveva prima considerate come strie cuticolari; in tal caso anche questa forma entrerebbe a far parte del genere *Chaetonotus*, e sarebbe anch'esso molto prossimo al *Ch. nodifurca*. Affine a questo, e forse anche identico potrebbe essere il *Ch. macrurum* Collins, ma di questo autore, malgrado tutte le ricerche fatte, non ho potuto consultare direttamente il lavoro, nè trarre altrove un qualsiasi cenno riassuntivo.

10) **Chaetonotus decemsetosus**, I. Marcolongo, 1910.

Tav. 1, fig. 7, 8.

Sinonimia — *Chaetonotus decemsetotus*, I. Marcolongo (1910) pag. 317.

Descrizione. — È una graziosa e caratteristica specie di *Chaetonotus*, che con tutta la forca misura in lunghezza 107 μ. Il capo è distintamente quinquelobato, e i lobi sono tutti uguali e prominenti: negli angoli delle insenature interlobari si trovano quattro ciuffetti di peli tattili. Il massimo diametro trasverso del capo è di 23 μ; il capo trapassa insensibilmente nel collo e questo, a livello del punto di

passaggio dall'esofago nell'intestino, è largo solo 16 μ. Il tronco è un po' tozzo, dai fianchi molto larghi, e misura trasversalmente nel suo punto più largo 30 μ. L'esofago misura 27 μ, e l'intestino 58 μ. Tutto l'animale, sul dorso e anche un po' ai lati, è rivestito di spine molto corte, tutte uguali, incurvate in basso, disposte sul capo e sul collo in 9 serie, e sul tronco in 11 serie. Sono notevoli 10 lunghe spine, che si attaccano alla regione mediana del dorso, 8 più in avanti e 2 — le più lunghe — più caudalmente. Le 8 spine del gruppo anteriore misurano 35-40 μ, le due posteriori 45 μ, e sorpassano per un buon tratto le appendici forcali, venendo a sporgere ai lati di queste, quando la forca è ben distesa per lungo. Tutte le spine, tanto le piccole quanto le grandi, sono a sezione circolare, e semplici, senza alcuna spina accessoria.

Note. — Non mi è stato possibile mettere in rilievo la forma delle scaglie, avendo di questa specie esaminato un solo individuo a metà marzo. Il *Ch. decemsetosus* e il *Ch. succinctus* Voigt (1904, pag. 141-142, tav. 6, fig. 46*a-d*, tav. 7, fig. 50*a-b*) segnano il termine di passaggio tra le forme a spine semplici, che hanno spine tutte uguali, lunghe e numerosissime, e quelle a spine con spinette accessorie, nelle quali accanto a numerose cortissime spine ne esiste un numero più o meno grande di notevole lunghezza e con speciale disposizione.

11) **Chaetonotus paucisetosus**, I. Marcolongo, 1910.

Tav. 2, fig. 15, 16.

Sinonimia — *Chaetonotus paucisetotus*, I. Marcolongo (1910) pag. 318.

Descrizione. — È una forma piccola, che misura in totalità 95-100 μ. Il capo è arrotondato e presenta a ciascun lato due incisure lievissime, quella anteriore un po' più accentuata, risultando così una divisione del capo in 5 lobi, uno mediano meglio individualizzato e più esteso trasversalmente, e 4 laterali piccoli, di cui quelli posteriori si continuano insensibilmente nel collo. La larghezza massima del capo è di 18 μ, la minima del collo è di 13 μ. Il tronco è poco giù largo del capo; quando non contiene uova, il suo massimo diametro trasverso è di 21 μ; e quando esistono uova è appena di 23 μ. L'esofago occupa tutta la lunghezza del capo e del collo, ossia 28 μ. Il capo e il collo sono ricoperti di spine molto corte, scarse, disposte in 7 serie longitudinali, e si continuano anche sul tronco, e sono quasi tutte ugualmente lunghe, circa 4 μ. Nella regione mediana del dorso si notano 8 lunghissime spine trigone, di 30 32 μ, 4 a destra, 4 a sinistra, disposte a ciascun lato in due serie longitudinali, e in modo che le due della fila anteriore e le due della terza fila sono più vicine alla linea mediana, e le altre più vicine al rispettivo margine laterale del tronco. Ogni spina (fig. 16) porta non molto lontano dall'estremo libero, circa a $^1/_5$ della lunghezza totale, una spinetta accessoria, ed essa stessa è impiantata non direttamente sul tegumento, ma per mezzo di una scaglia obovata, tronca posteriormente e qui ancora intaccata ad angolo acuto.

Note. — Ho trovato pochissimi esemplari alla fine di maggio, qualcuno con uova abbastanza grandi. Per il numero delle lunghe spine dorsali questa nuova specie si

avvicina al *Ch. longispinosus* Stok. (1887, pag, 565, tav. 1, fig. 8-10) e al *Ch. octonarius* Stok. (1887, pag. 564, tav. 1, fig. 4) ritrovato dalla Grünspan (1908, pag. 218, 219, tav. 18, fig. 6, 9); ma dall'uno e dall'altro si allontana sopra tutto per la diversa disposizione e conformazione delle spine.

12) **Chaetonotus enormis**, A. C. Stokes, 1888.

Sinonimia — *Chaetonotus enormis*, A. C. Stokes (1888) pag. 19, tav. 1, fig. 12. — C. Zelinka (1889) pag. 333, 334, tav. 15, fig. 16.

Di questa specie, nuova per la fauna europea, scoperta dallo Stokes negli Stati Uniti (Trenton), ho trovato soltanto due esemplari.

13) **Chaetonotus acanthophorus**, A. C. Stokes, 1888.

Sinonimia — *Chaetonotus acanthophorus*, A. C. Stokes (1888) pag. 20, tav. 1, fig. 13-14. — C. Zelinka (1889) pag. 332, tav. 15, fig. 11.

È una specie nuova essa pure per la fauna europea. Fu scoperta dallo Stokes nel Trenton.

Note. — Ho rinvenuto un solo esemplare a fine aprile tra le lemne.

14) **Chaetonotus persetosus**, C. Zelinka, 1889.

Sinonimia — *Chaetonosus persetotus*, C. Zelinka (1889) pag. 337, 339, tav. 14, fig. 1-6. — Th. Grünspan (1910) pag. 281-282, fig. 27 *a*, *b*, 28, 29.

Note. — Di questa forma ho avuto occasione di esaminare parecchi esemplari e in epoche diverse, alcuni senza uova, altri con uno o due uova bene sviluppate. Alla descrizione minuziosa dello Zelinka non ho nulla da aggiungere; noto soltanto che uno degli esemplari misurava 92 μ, quindi era alquanto più lungo di quelli osservati dallo Zelinka, la cui lunghezza oscillava tra i 77 e gli 81 μ.

15) **Chaetonotus macrochaetus**, C. Zelinka, 1889.

Sinonimia — *Chaetonotus macrochaetus*, C. Zelinka (1889) pag. 335, 337, tav. 16, fig. 7-10. — Th. Grünspan (1910) pag. 279-281, fig. 25 *a*, *b* e 26.

Note. — Un solo esemplare alla fine di maggio tra le lemne.

Ordine **Apodina**, C. Zelinka (1889)

Famiglia Dasydytidae E. v. Daday (1905)

Genere **Dasydytes**, P. H. Gosse (1851)

16) **Dasydytes paucisetosus**, I. Marcolongo, 1910.

Tav. 2, fig. 18.

Sinonimia — *Dasydytes paucisetosus*, I. Marcolongo (1910) pag. 318.

Descrizione. — È una specie molto piccola, che non oltrepassa in lunghezza 83 μ. Il capo è globoso-ovale, largo 19 μ, e trapassa insensibilmente in un collo, che nel punto più ristretto misura 16 μ. Il corpo è piuttosto corto, quasi globoso, con una larghezza massima di 36 μ; l'estremità di esso è nettamente arrotondata e non presenta appendici di sorta. Sul dorso esistono presso il margine del corpo 13 setole tutte uguali, brevemente arcuate, disposte con ordine simmetrico e lunghe 20 μ; nella regione centrale si notano altre 3 setole, più lunghe, misuranti 30 μ. Tutte le setole sono direttamente attaccate al tegumento, senza intermediarietà di scaglie. Mancano posteriormente peli tattili. Ai lati del capo e del collo si scorgono le ciglia vibratili, appartenenti ai nastri ventrali. La bocca è apicale; l'esofago, trasversalmente striato, lungo 15 μ è distintamente strozzato — carattere questo che condivide con la *Stylochaeta fusiformis* Spencer e con l'*Anacanthoderma punctatum* I. Marcolongo.

Note. — Un solo esemplare il 19 febbraio, con un grosso uovo dorsalmente.

Famiglia **Anacanthodermidae**, I. Marcolongo (1910)

Capo distinto dal tronco e privo di tentacoli. Estremità posteriore del corpo nettamente arrotondata. Tegumento affatto privo di appendici (spine, setole e squame).

Genere **Anacanthoderma**, I. Marcolongo (1910)

Capo subgloboso distinto dal tronco, senza tentacoli. Faringe strozzato nel mezzo. Estremità posteriore del corpo uniformemente arrotondata. Mancano assolutamente setole e squame. Due peli tattili dorsalmente quasi all'estremo del tronco.

18) **Anacanthoderma punctatum**, I. Marcolongo, 1910.

Tav. 2, fig. 17.

Sinonimia — *Anacanthoderma punctatum*, I. Marcolongo (1910) pag. 318.

Descrizione. — È una forma graziosa, lunga 115 μ, abbastanza svelta nell'aspetto e nelle movenze. Il capo è arrotondato, largo 24 μ, e non presenta nè tentacoli, nè peli tattili. Il collo è breve, e nel punto più ristretto ha un diametro

di 20 μ. Il tronco è obovato con grossa estremità posteriore, e presenta una larghezza massima di 42 μ.

Mancano spine e scaglie, ma la cute è tutta punteggiata, come se fosse zigrinata; la punteggiatura è molto evidente sul tronco, meno al collo e meno ancora al capo.

Dorsalmente, sulla linea mediana, poco in sopra dell'estremità posteriore si notano due peli tattili lunghi 30 μ. L'esofago lungo 29 μ, presenta una evidentissima strozzatura, che lo fa sembrare come costituito da 4 lobi, due anteriori un po' più corti, e due posteriori alquanto più robusti, muscolosi e striati per trasverso; una struttura quasi identica è stata notata fra i Gastrotrichi solo nella *Stylochaeta fusiformis* dallo Spencer (1890, pag. 59, tav. 5) e dallo Hlava (1904, pag. 332, fig. 1-2) e da me nel *Dasydytes paucisetosus*. L'intestino percorre solo i $^3/_4$ della lunghezza del tronco, e sbocca ventralmente con un foro circolare: esso è ripieno di grosse granulazioni giallastre e presenta nel tratto anteriore quattro grossi granuli traslucidi. Non mi è stato possibile vedere i nastri ciliati ventrali, per cui non posso dare di essi alcun connotato.

Note. — Un solo esemplare nei primi di marzo 1910.

PARTE GENERALE

Il lago-stagno di Astroni alberga una microfauna essenzialmente neritica. Tutti i Gastrotrichi, che vi ho trovati, fanno parte di quell'associazione di microscopici viventi, che il Lauterborn chiamò sapropelici, i quali abbondano insieme a taluni Rotiferi e Ciliofori sul fondo dello stagno e raramente si sollevano fino alla superficie tutta ricoperta da un denso strato di lemna minor, quando lo spessore dell'acqua soprastante misura appena qualche decimetro. Ciò è dovuto al fatto che i Gastrotrichi si nutrono essenzialmente di detriti organici vegetali e forse anche animali.

Le specie trovate sono state 17:

1 del genere *Ichthydium*
1 » » *Lepidoderma*
13 » » *Chaetonotus*
1 » » *Dasydytes*
1 » » *Anacanthoderma.*

Il tempo ristretto, di cui ho potuto disporre per la ricerca di questi graziosi esseri, appena otto mesi, dalla metà del novembre 1909 alla metà del luglio del 1910, non mi ha permesso di determinare in quale epoca dell'anno le diverse specie raggiungono la loro massima frequenza, per potere oppugnare o confermare i dati dello Zelinka e del Ludwig.

Un fatto però voglio far notare: due anni fa, mentre la mia collega Dott. Isabella Iroso studiava i Rotiferi della stessa regione, faceva meraviglia il gran numero di Gastrotrichi, che si trovavano in ogni goccia d'acqua; l'anno scorso, invece, non solo i Gastrotrichi sono stati abbastanza rari, ma pure gli stessi Rotiferi erano molto più scarsamente rappresentati. A che cosa ciò sia dovuto, io non oso indagare, perchè le condizioni fisico-biologiche del laghetto — che appena ora comincia ad

essere studiato — ci sono affatto ignote, e anche perchè le condizioni metereologiche invernali e primaverili, sebbene variabili, sono state eccezionalmente miti, per pensare che abbiano esse causato questa relativa diminuzione. In linea generale posso asserire che l'inverno, sopratutto se freddo, è poco propizio alla vita dei Gastrotrichi, la quale si esplica con un notevole torpore, e anche le uova impiegano un tempo insolitamante lungo a svilupparsi, così che non è possibile seguirne l'evoluzione sotto il microscopio. Nelle piccole vaschette del Laboratorio di Zoologia, da cui nei giorni invernali miti si potevano pescare un certo numero di *Chaetonotus maximus* Ehrenberg, *Chaetonotus brevispinosus* Zelinka, e di *Ichthydium podura* O. Fr. Müller, un semplice abbassamento di temperatura, specialmente brusco, bastava a fare scomparire tutte le forme per qualche giorno, le quali di mano in mano ricomparivano appena la temperatura si andava sensibilmente elevando.

Ho potuto occuparmi assai poco della organizzazione e della biologia di questi piccoli esseri, ma posso nelle linee generali confermare quanto in merito ha riferito lo Zelinka e riassunto la Grünspan. Su due punti mi voglio intanto brevemente fermare: uno riguarda le uova, l'altro il preteso testicolo.

Il Metschnikoff (1864, pag. 454) aveva creduto di trovare nei Gastrotrichi, così come esistono nei Rotiferi, due specie di uova, quelle invernali con guscio spesso, che vengono deposte all'esterno, e quelle estive, senza guscio, che si segmentano e si sviluppano nella cavità viscerale dell'animale adulto. Questa opinione, benchè non suffragata da positive osservazioni, venne accettata dal Ludwig (1876, pag. 208; 1886, pag. 281). Coloro, che si sono posteriormente occupati dei Gastrotrichi, il Bütschli, lo Stokes, lo Zelinka (1889) non hanno mai ritrovato queste volute uova estive, anzi già lo Schultze (1853, pag. 248, 249) aveva affermato che uno sviluppo delle uova nell'interno della madre non si avverava mai. Io stessa ho veduto uova con i caratteri delle uova d'inverno in tutti i mesi dell'anno, anzi con relativa maggiore frequenza in giugno e in luglio, e quindi credo che l'affermazione del Metschnikoff, come ha già osservato lo Zelinka, si fondi su di una errata interpetrazione; non è possibile intuire che cosa il Metschnikoff abbia equivocato con uova in segmentazione, di cui ha trovato in qualche individuo fino al numero di 15; probabilmente si tratta di protozoi in fase di moltiplicazione.

L'uovo deposto ha sempre nel profilo la forma di un'ellisse, ma l'asse maggiore supera talvolta di poco l'asse minore. La membrana, che lo riveste, assai flessibile, è però poco resistente ed è ora affatto liscia (fig. 19), ora tutta ricoperta di rugosità granulari (fig. 24), ora, più spesso, rivestita di spine (fig. 26 e 27), di papille cilindriche più o meno lunghe (fig. 28) o di peli (fig. 25); queste diverse ornamentazioni alcune volte si riscontrano per tutta la superficie dell'uovo (fig. 24, 25, 28), e perciò è esagerata l'affermazione dello Stokes (1887, pag. 83), secondo cui uno dei lati della membrana è costantemente privo di difesa; altre volte le spine o le altre produzioni protettrici sono limitate ad un sol lato (fig. 26, 27), o, secondo lo Stokes, ai due poli, ciò che lo Zelinka nega a torto (1889, pag. 279). Io non ho potuto determinare con sicurezza a quale specie appartenessero le diverse uova da me trovate e sopra riportate; sono convinta che le diverse modalità enumerate debbano avere carattere costante rispetto alla specie, alla quale appartengono, per cui sono d'accordo con lo Zelinka nel ritenere inesatta l'osservazione dello Stokes, il quale vorrebbe

(pag. 83) far credere che la stessa specie possa deporre uova, la cui ornamentazione varii grandemente, come un reticolo di linee sporgenti o di papille pentagonali cave, o di lunghe spine con estremità triforcata o quadripartita. Il Ludwig ritiene (1875, pag. 213) che lo sgusciamento del piccolo Gastrotrico non abbia luogo in modo regolare, ossia con il meccanismo di uno speciale opercolo; l'uovo si lacererebbe in uno dei poli, ove trovasi il capo dell'animale, unicamente perchè la membrana resasi quivi più debole verrebbe lacerata dalle spine dorsali nei movimenti del piccolo animaluccio a termine di sviluppo. Questo è vero, ma non in tutti i casi: io ho assistito alla fuoriuscita di un piccolo *Chaetonotus* (fig. 19), probabilmente il *Chaetonotus macrochaetus* Zelinka, il quale, dopo di aver con la bocca lambito tutt'intorno il polo corrispondente dell'uovo, fatta una pressione col capo, era riuscito a distaccare e sollevare una piccola calotta polare, una specie di opercolo, non completamente separato dal rimanente dell'uovo, sgusciando immediatamente fuori e perdendosi a nuoto in mezzo al detrito organico e minerale e all'intreccio delle oscillarie della goccia d'acqua in esame.

L'Ehrenberg aveva in via ipotetica ammessa come possibile l'esistenza di un testicolo nei Gastrotrichi (1838, pag. 387). A questa ipotesi avevano creduto dare un fondamento obiettivo lo Schultze (1853, pag. 249) e il Metschnikoff (1874, pag. 454) e il Bütschli (1876, pag. 369); ma ciò che hanno veduto e descritto questi studiosi è così problematico da non potersi in nessun modo accettare come dimostrazione di fatto per l'esistenza della gonade maschile. Il Ludwig (1878, pag. 208, 209, 217; 1886, pag. 821) ha descritto nel *Chaetonotus larus* Ehrenberg e nell'*Ichtydium podura* Mueller un organo speciale in prossimità della porzione posteriore dell'intestino, che per posizione e forma corrisponderebbe a quanto io ho veduto (fig. 9, 10) nel *Chaetonotus brevispinosus* Zelinka (= *Chaetonotus larus* Stokes), ove era stato già notato dallo Stokes. Un organo identico è stato visto dallo Zelinka (1889, pag. 279, 280) nel *Chaetonotus persetosus* Zelinka e nel *Lepidoderma squamatum* Dujardin e non soltanto in individui giovani, ma anche in quelli portanti un grosso uovo, ciò che io posso pienamente confermare (fig. 10), e aggiungo che la presenza dell'organo problematico è affatto indipendente dalla fase evolutiva, in cui si trovano gli ovarii.

Naturalmente la questione del testicolo ha messo anche in campo il problema dei sessi nei Gastrotrichi: lo Schultze aveva parlato di ermafroditismo, ma il Metschnikoff sostenne la separazione dei sessi, in altri termini il dimorfismo sessuale, che è stato pure accettato dal Ludwig e anzi riguardato come di natura proterandra.

Non è possibile allo stato delle nostre conoscenze affermare se i Gastrotrichi siano o no ermafroditi, e quale sia la natura di questo ermafroditismo, o se essi siano sessualmente dimorfi. Già come fa notare lo Zelinka, la proterandria verrebbe per sè stessa a cadere, non essendo raro che si trovino insieme in uno stesso animale l'uovo ovarico a completo sviluppo e il preteso testicolo; però è arrischiata l'attribuzione di testicolo ad un organo, sulle cui proprietà e funzioni nulla assolutamente si conosce, che in qualche caso si ritrova, ma che per solito è assente.

Io credo che questo strano organo — notato per la prima volta dal Ludwig, e sul quale hanno portato la loro attenzione lo Stokes e lo Zelinka — non appartenga affatto alla normale organizzazione dei Gastrotrichi, e sia piuttosto qualche

cosa venuta dal di fuori, in altri termini un parassita. Il Bertram (1892), il Bilfinger (1894), lo Zacharias (1893), il Fritsch (1895, 1901), il Przesmycki (1901), il Rousselet (1902), il Cohn (1902), il Voigt (1905) hanno avuto agio di notare la presenza di endoparassiti nella cavità viscerale di parecchi Rotiferi, per cui non può sorprendere che ne esistano anche nei Gastrotrichi.

Il preteso testicolo del Ludwig ha una somiglianza accentuatissima con le cisti sporigene della *Glugea asperospora* scoperta dal Fritsch nel *Brachiomus pala* (1895, pag. 5, fig. 7 *b*), sporozoo, che ebbe dallo Zacharias (1903) l'appellativo di *Ascosporidium Blochmanni*, e dal Voigt (1905) — conformandosi alle norme della nomenclatura zoologica — quello di *Ascosporidium asperospora* Fritsch. Se sia la stessa forma di parassita non oso affermare, certamente però sarebbe una forma assai prossima.

INDICE BIBLIOGRAFICO

1896. Apstein C., Das Süsswasserplankton. Methode und Resultate der quantitativen Untersuchung. Kiel u. Leipzig.

1892. Bertram A., Beiträge zur Kenntnis der Sarcosporidien, nebst einem Anhange über parasitische Schläuche in der Leibeshöhle von Rotatorien. Z. Iahrb. (Anat. Ont.) Bd. 5, pag. 581-604; tav. 38-40.

1894. Bilfinger L., Zur Rotatorienfauna Württembergs. 2 Beitrag. Iahresh. Ver. vaterl. Naturk. Württemberg. 50 Iahrg.; pag. 35-65; tav. 2-3.

1886. Blochmann Fr., Die mikroskopische Tierwelt des Süsswassers. Braunschweig.

1824. Bory de St. Vincent I. B., Encyclopédie méthodique des vers. Paris.

1826. — — Essay d'une classification des animaux microscopiques. Paris.

1876. Bütschli O., Untersuchungen über freilebende Nematoden und die Gattung Chaetonotus. Z. w. Z. Bd. 26; pag. 363-413; tav. 23-26.

1897. Collin A. Rotatorien, Gastrotrichen und Entozoen Ost-Afrikas. Deutsch. Ost-Afrika, Bd. 4. (Citato da v. Daday e Grünspan).

1902. Cohn L., Protozoen als Parasiten in Rotatorien. Z. A. Bd. 25; pag. 497-502.

1774. Corti B., Osservazioni microscopiche sulla Tremella. (Citato da Ehrenberg).

1881. Daday I., Ichthydium Entzii, mihi, a kolozsvàri édesvizi fauna egy íy alakia. Termész. füzetek, vol. 5; pag. 230-252; tav. 3.

1887. Daday E. v., Beiträge zur Kenntnis der Mikrofauna der Tàtra-Seen. ibid., vol. 20; pag. 149-196.

1897. — — Uj Guineai Rotatoriák, (Rotatoriae Novae Guineae). Mathem. term.-tud. Értes. vol. 15; pag. 131-148.

1901. — — Mikroskopische Süsswasserthiere ans Deutsch-Neu-Guinea. Termézs. füzet. vol. 24; pag. 1-56; tav. 1-3.

1901 — — Mikroskopische Süsswasserthiere. Zool. Ergebn. der 3 asiat. Forschungsreise d. Grafen Zichy. Bd. 2; pag. 375-470; tav. 14-28.

1905. — — Untersuchungen über die Süsswasser-Mikrofauna Paraguays. Zoologica. Bd. 18; Heft 44, pag. 1-374, tav. 1-23.

1910. — — Die Süsswasser-Mikrofauna Deutsch-Ost-Afrikas. Zoologica, Bd. 23; Heft 59.

1841. Dujardin F., Histoire naturelle des zoophytes. Infusoires. Paris.

1829. Ehrenberg C. G., Die geographische Verbreitung der Infusionsthierchen in Nord-Afrika und West-Asien, beobachtet auf Hemprich und Ehrenbergs Reisen. Phys. Abh. k. Akad. Wiss. Berlin a. d. I. 1829; pag. 1-20.

1830. — — Beiträge zur Kenntnis der Organisation der Infusorien und ihrer geographischen Verbreitung besonders in Sibirien. ibid. a. d. I. 1830; pag. 1-88.

1831. — — Ueber die Entwicklung und Lebensdauer der Infusionsthiere nebst ferneren Beiträgen zu einer Vergleichung ihrer organischen Systeme. ibid. a. d. I. 1831; pag. 1-154.

1838. — — Die Infusionsthierchen als vollkommene Organismen. Ein Blick in das tiefere organische Leben der Natur. Nebst Atlas. Leipzig.

1909. Eyferth B., Einfachste Lebensformen des Tier-und Pflanzenreiches. Naturgeschichte der mikroskopischen Süsswasserbewohner. Braunschweig.

1883. Fernald C. H., Notes on the Chaetonotus larus. Americ. Naturalist vol. 17, pt. 2; pag. 1217-1220.

1878. Forel, F. A., Faunistische Studien in den Süsswasserseen der Schweiz. Z. w. Z. Bd. 30 Suppl. pag. 383-391.

1895. Fritsch A., Ueber Parasiten bei Crustaceen und Raederthieren der sussen Gewässer. Bull. internat. Acad. sc. de l'empereur François Ioseph I. Cl. sc. mathém. et nat. II Kl., vol. 4; 7 pgg.

1894. Fric A. u. Vavra, V., Untersuchungen über die Fauna der Gewässer Böhmens. IV. Die Thierwelt des Unterpocernitzer und Gatterschlager Teiches als Resultat der Arbeiten an der übertragbaren zoologischen Station. Arch. Naturw. Landesdurschf. Böhmen, Bd. 9, n. 2, 124 pgg.

1897. — — — — Untersuchungen über die Fauna der Gewässer Böhmens. Untersuchung zweier Böhmerwaldseen, des schwarzen und des Teufelsees. Arch. Naturw. Landesdurschf. Böhmen. Bd. 10, 74 pgg.

1901. — — — — Untersuchungen über die Fauna der Gewässer Böhmens. 5. Untersuchung des Elbeflusses und seiner Altwässer durchgeführt auf der übertragbaren zoologischen Station. ibid. Bd. 11.

1904. Giard A., Sur une faunule caractéristique des sables à diatomées d'Ambleteuse. II. Les Gastrotriches normaux. C. R. soc. biol. vol. 56, pag. 1061-1063.

1904. — — Sur une faunule caractéristique des sables à diatomées d'Ambleteuse. III. Les Gastrotriches aberrants. Ibid., pag. 1063-1065.

1851. Gosse P. H. A catalogue of Rotifera found in Britain, with descriptions of five new genera and thirty-two new species. Ann. Mag. nat. hist. (2) vol. 8, pag. 197-203.

1864. — — The natural history of the hairy-backed animalcules (Chaetonotidae). Intellectual Observer, vol. 5; pag. 387-406; tav. 1, 2. (Citato da Zelinka).

1877. Grimm O. A., Zur Kenntuis der Fauna im baltischen Meere und deren Entstehungsgeschicte. [in lingua russa]. Arb. St. Petersb. Naturf. Ges. Bd. 8;

1908. Grünspan Th., Beiträge zur Systematik dar Gastrotrichen. Mit besonderer Berücksichtigung der Fauna aus der Umgebung von Czernowitz und der marinen Gastrotrichen. Z. Iahrb. (Syst.) Bd. 26; pag. 214-256; tav. 18-19.

1910. — — Fauna aquatica Europeae. Die Süsswasser-Gastrotrichen Europas. Ann. biol. lac. tom. 4; pag. 215-365.

1831. Hemprich Fr. W. et Ehrenberg C. G., Symbolae physicae. Pars Zoologica. Ser. I. IV. Animalia Evertebrata, exclusis insectis (recensuit Dr. C. G. Ehrenberg). Berolini. L'atlante venne pubblicato prima del testo nel 1828].

1904. Hlava St., Ueber die systematische Stellung von Polyarthra fusiformis Spencer. Z. A. Bd. 28; pag. 331-336.

1885. Imhof O. E., Faunistische Studien in 18 kleineren und grösseren österreichischen Süsswasserbecken. Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Cl. Bd. 91, Abt. 1; pag. 211-225.

1886. — — Neue Resultate über die pelagische und Tiefsee-Fauna einiger im Flussgebiet des Po gelegener Süsswasserbecken. Z. A. Bd. 9; pag. 41-47.

1891. — — Ueber die pelagische Fauna einiger Seen des Schwarzwaldes. Z. A. Bd. 14;

1901. Issel R., Studi sulla fauna termale euganea. (Nota preventiva) Atti Soc. ligust. sc. nat. geogr. vol. 12; 7 pgg.

1906. — — Sulla termobiosi negli animali acquatici. Ricerche faunistiche e biologiche. ibid. vol. 17; pag. 1-72; tav. 1.

1841. Kutorga S., Naturgeschichte der Infusionsthiere, vorzüglich nach Ehrenberg's Beobachtungen. Mit 1 Atlas. Carlsruhe.

1815. Lamarck I. B. P. de, Histoire naturelle des animaux sans vertèbres. tom. 1. Paris.

1910. Lampert K., Das Leben der Binnengewässer. Leipzig.

1893. Lauterborn R., Beträge zur Rotatorienfauna des Rheins und seiner Altwasser. Z. Iahrb. (Syst.) Bd. 7; pag. 254-273; tav. 11.

1901. — — Die sapropelische Lebewelt. Z. A. Bd. 24; pag. 50-55.

1875. Ludwig H., Ueber die Ordnung Gastrotricha Metschn. Z. w. Z. Bd. 26; pag. 193-226; tav. 14.

1851. Leuckart R., Bericht über die Leistungen in der Naturgeschichte der niederen Tiere während der Iahre 1848-53. Arch. Naturg. Iahrg. 20; Bd. 2; pag. 289-473.

1878. Maggi L., Primo elenco dei Rotiferi o Sistolidi della Valcuvia. Atti Soc. Ital. sc. nat. Pavia, vol. 21; pag. 320. Studj Laborat. Anat. Fisiol. comp. Pavia, ann. 1878, n.° 7.

1910. Marcolongo, I., Primo contributo allo studio dei Gastrotrichi del lago-stagno craterico di Astroni. Monit. Zool. ital., vol. 21, pag. 315-318.

1865. Mecnicow E., Ueber einige wenig bekannte niedere Tierformen. Z. w. Z. Bd. 15; pag. 450-465; tav. 35.

1865. Mueller O. Fr., Animalcula infusoria, fluviatilia et marina, quae detexit, systematice descripsit et ad vivum delineari curavit; op. posthum. cura O. Fabricii. Hafniae et Lipsiae.

1773. — — Vermium terrestrium et fluviatilium, seu animalium infusoriorum, helminthicorum et testaceorum, non marinorum succincta historia, vol. 1. Havniae et Lipsiae.

1817. Nitzsch Chr. L., Beitrag zur Infusorienkunde oder Naturbeschreibung der Zerkarien und Bazillarien. N. Schr. naturf. Ges. Halle Bd. 3, Heft 1; 6 tav.

1827. — — Cercaria, in Erscherisch u. Gruber's Allg. Encycl. d. Wiss. u. Kunste. Leipzig. Theil 16, pag. 66-69.

1896. Parsons F. A., Report of excursion Committee. List of objects found on the excursions. Iourn. Queck. micr. Club London (2) tom. 6; pag. 391.

1849. Perty M., Mikroskopische Organismen der Alpen und der italienischen Schweiz Mittheil. naturf. Ges. Bern a. d. I. 1849; pag. 153-176.

1852. — — Zur Kenntnis kleinster Lebensformen mit Spezialverzeichniss der in der Schweiz beobachteten. Bern.

1861. Pritchard A., A history of Infusoria, including Desmidiacea and Diatomacea, 4 edit.

1901. Przesmycki A. M., O paru rodzajach pierwot niaków, pasozytujacych we wrotkach (Ueber parasitische Protozoen aus dem Inneren der Rotatorien) Bull. internat. Acad. sc. Cracovie, C. rend. d. séances de l'année 1901. Cl. sc. mathém. et nat. pag. 358-408; tav. 16-18.

1902. Rousselet Ch. Fr., The genus Synchaeta a monographic study, with descriptions of five new species. Iourn. r. micr. soc. 1902; pag. 269-290, 393-411; tav. 3-8.

1902. Saizeff Ph., Kurzer Bericht über die Tätigkeit der biologischen Süsswasserstation zu Bologoje im Iahre 1901. Trav. Soc. imp. nat. St. Pétersbourg. C. R. d. séances.

1886. Schimkewitsch W. M., Ueber eine neue Species Ichthydium (in russo). Nachr. K. Ges. Freunde Naturw. Moskau, Bd. 50, Protok. Zool. Abt. pag. 148-150.

1861. Schmarda L. K., Neue wirbellose Thiere beobachtet und gesammelt auf einer Reise um die Erde 1853 bis 1857. Bd. 1 (Turbellarien, Rotatorien und Anneliden). Leipzig.

1853. Schultze M., Ueber Chaetonotus und Ichthydium Ehrb. und eine neue verwandte Gattung Turbanella. Arch. Anat. Physiol. wiss. Med. Iahrg. 1853; pag. 241-254; tav. 6.

1878. Slack H., Marvels of pondlife or a year's microscopic recreations among the Polyps, Infusoria, Rotifers, etc. 3 edit. London.

1890. Spencer T., On a new Rotifer. Iourn. Quek. micr. club. (2) vol. 4; pag. 59; tav. 5, fig. 7-9.

1908. Stewart F. H., Rotifer and Gastrotricha from Tibet. Rec. Ind. Mus. Calcutta, vol. 2; pag. 316-323.

1887. Stokes A. C., Observations sur les Chaetonotus. Iourn. microgr. tom. 11; pag. 77-85, 150-153, 560-566; tav. 1, 2.

1888. — — Observations sur les Chaetonotus et les Dasydytes. ibid. tom. 12; pag. 19-22, 49-51; tav. 10.

1867. Tatem T. G., New species of microscopic animals. Q. journ. micr. sc. (2) tom. 7; pag. 251-253; tav. 10.

1891. Thompson P. G., A new specis of Dasydytes. Order Gastrotricha. Science Gossip ann. 1891; pag. 160-162.

1901. Voigt M., Ueber einige bisher unbekannte Süsswasserorganismen Z. A. Bd. 24; pag. 191-195.

1901. — — Diagnosen bisher unbeschriebener Organismen aus Plöner Gewässern. ibid. Bd. 25; pag. 35-39.

1902. — — Drei neue Chaetonotus-Arten aus Plöner Gewässern. Ibid. pag. 116-118.

1902. — — Die Rotatorien und Gastrotrichen der Umgebung von Plön. ibid. pag. 673-681.

1903. — — Eine neue Gastrotrichenspecies (Chaetonotus arquatus) aus dem Schlossparkteiche zu Plön Forschungsber. biol. Stat. Plön, Bd. 10; pag. 90-93.

1904. — — Die Rotatiorien und Gastrotrichen der Umgebung von Plön. ibid. Bd. 11; pag. 1-180; tav. 1-7.

1909. — — Nachtrag zur Gastrotrichen-Fauna Plöns. Z. A. Bd. 34; pag. 717-722.

1893. Wagner, F. v., Der Organismus der Gastrotrichen. Biol. Clbl. Bd. 13, pag. 223-238.

1889. Zacharias O., Die niedere Thierwelt unserer Binnenseen. Sammlung gemeinverst. wiss. Vortr. Heft. 90. Hamburg.

1891. — — Die Thîer-und Flanzenwelt des Süsswassers. Leipzig.

1893. — — Faunistische und biologische Beobachtungen am Grossen Plöner See. Forschungsber. biol. Stat. Plön. Teil. 1, pag. 3-13.

1893. — — Beschreibung der neuen Formen. ibid. pag. 13-26.

1893. — — Fauna des grossen Plöner See. Biol. Clbl. Bd. 13; pag. 377-382.

1894. — — Allerlei über Würmer. Forschungsber. biol. Stat. Plön. Teil 2; pag. 60-62, 69, 83-87.

1898. — — Untersuchungen über das Plankton der Teichgewässer, ibid. Teil 6; pag. 137.

1902. — — Zum Capitel der wurstförmigen Parasiten bei Räderthieren. Z. A. Bd. 25; pag. 647-649.

1903. — — Ueber die Infektion von Synchaeta pectinata Ehrb. mit den parasitischen Schläuchen von Ascosporidium Blochmanni. Forschungsber. biol. Stat. Plön, Teil 10; pag. 216-222.

1905. — — Hydrobiologische und fischereiwirtschaftliche Beobachtungen an einigen Seen der Schweiz und Italiens. ibid. Teil 12; pag. 169-302.

1889. Zelinka C., Die Gastrotrichen. Eine monographische Darstellung ihrer Anatomie, Biologie und Systematik. Z. w. Z. Bd. 49; pag. 209-384; tav. 9-15.

finita di stampare il dì 17 Ottobre 1911

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

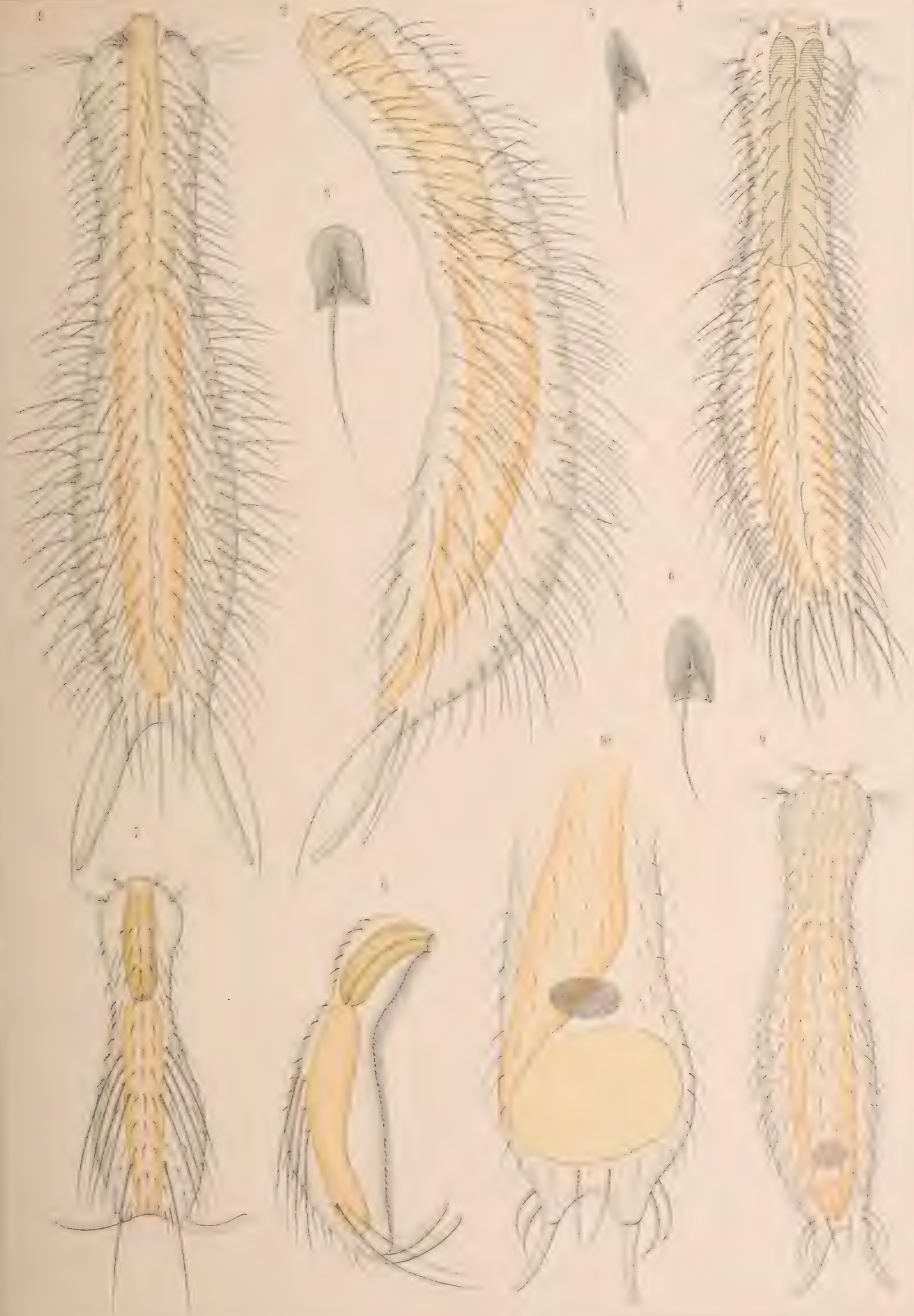
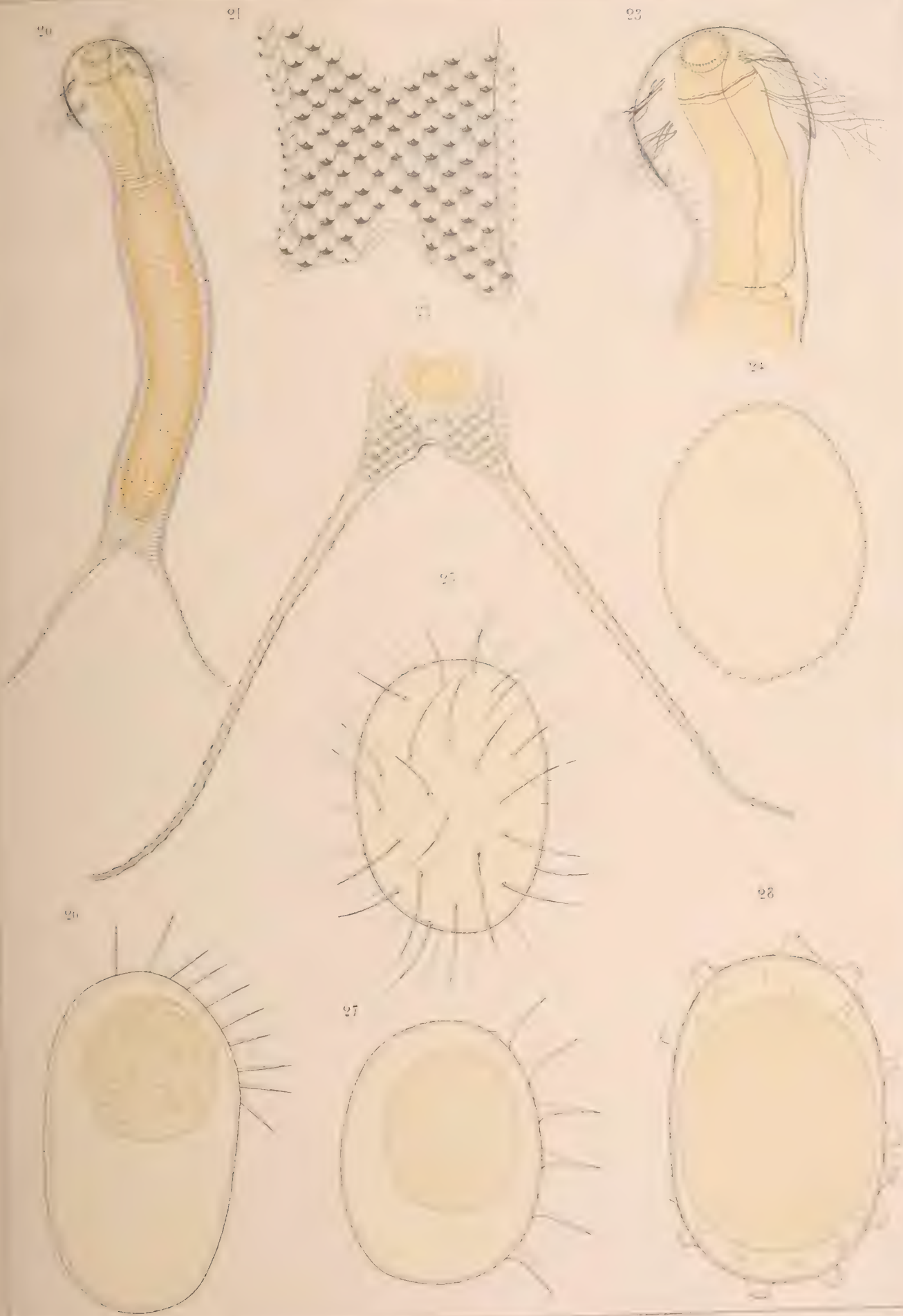
Tavola 1.

Fig. 1. *Chaetonotus hirsutus* I. Marcolongo visto dal dorso. × 750.
» 2. Lo stesso visto di lato. × 750.
» 3. Scaglia con spina dello stesso. × 1500.
» 4. *Chaetonotus laroides* I. Marcolongo visto dal dorso. × 750.
» 5. 6. Scaglie e spine dello stesso. × 1500.
» 7. *Chaetonotus decemsetosus* I. Marcolongo visto dal dorso. × 700.
» 8. Lo stesso visto di lato. × 700.
» 9. *Chaetonotus brevispinosus* C. Zelinka col preteso testicolo. × 500.
» 10. Regione posteriore dello stesso con un grosso uovo e il preteso testicolo. × 750.

Tavola 2.

Fig. 11. *Chaetonotus nodifurca* I. Marcolongo visto di lato. × 500.
» 12. Lo stesso visto dal dorso. × 500.
» 13. Estremità forcale dello stesso con le omonime appendici. × 700.
» 14. *Chaetonotus minimus* I. Marcolongo visto dal dorso. × 750.
» 15. *Chaetonotus paucisetosus* I. Marcolongo visto dal dorso. × 750.
» 16. Scaglia con spina dello stesso. × 750.
» 17. *Anacanthoderma punctatum* I. Marcolongo visto dal dorso. × 750.
» 18. *Dasydytes paucisetosus* I. Marcolongo visto dal dorso. × 750.
» 19. Uovo di *Chaetonotus* (*macrochaetus* Zelinka?) con il piccolo in atto di sgusciare. × 750.

Tavola 3.

Fig. 20. *Lepidoderma rhomboides* A. C. Stokes visto dal dorso. × 350.
» 21. Segmento posteriore dello stesso molto ingrandito. × 1200.
» 22. Appendici forcali dello stesso. × 700.
» 23. Capo dello stesso. × 700.
» 24-28. Uova di *Chaetonotus* sp. × 750.

FAUNA DEGLI ASTRONI

(*Gastrotrichi*)

FAUNA DEGLI ASTRONI
(Gastrotrichi)

Lit. Tacchinardi e Ferrari-Pavia

Vol. XV, Serie 2.ª N.° 7.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

I GRUPPI CREMONIANI DI NUMERI

MEMORIA

del s. o. DOMENICO MONTESANO

presentata nell' adunanza del dì 1° Aprile 1911

Ab imis fundamentis.

Per poter dare base più sicura e svolgimento più ampio alla teoria generale delle trasformazioni birazionali piane è necessario innanzi tutto studiarne metodicamente il sostrato aritmetico.

È noto che in ogni corrispondenza birazionale fra due piani si presentano due reti omaloidiche del medesimo ordine n, una in ogni piano. Gli ordini di multiplicità dei punti base di ciascuna delle due reti soddisfano alle relazioni:

$$\Sigma r_i = 3(n-1) \quad , \quad \Sigma r_i^2 = n^2 - 1 \; ;$$

essi cioè costituiscono — come per ragione di brevità stabilisco di dire — un *gruppo cremoniano geometrico di ordine n.*

Di fianco a questi gruppi geometrici vi sono gruppi cremoniani semplicemente aritmetici di ordine n, gruppi cioè costituiti da numeri interi e positivi che, pur soddisfacendo alle predette relazioni, non risultano essere gli ordini di multiplicità dei punti base di una rete omaloidica.

Ora una prima quistione fondamentale, che occorreva risolvere, era di determinare un criterio uniforme e sicuro per distinguere i gruppi cremoniani geometrici da quelli semplicemente aritmetici. Questa determinazione doveva sembrare opportuna specialmente nelle ricerche fatte con indirizzo aritmetico, nelle quali la questione geometrica delle trasformazioni era ridotta ad un semplice problema di analisi indeterminata.

Invece si preferì sempre far uso di criteri intuitivi non ben determinati.

« ..... *Si la solution... cherchée,* dice il De Jonquières [1]), *doit être géométrique, on devra, une fois la solution arithmétique obtenue, vérifier si elle satisfait à des conditions que la thèorie générale des courbes fait connaître avec précision, par un contrôle dont la théorie des transformations Cremona fournit le moyen facile et presque intuitif* » parole queste che nella loro indeterminazione non dànno alcuna luce sull'argomento.

Nella Memoria *Su le reti omaloidiche di curve* [2]) io indicai un criterio molto semplice per riconoscere se un dato gruppo cremoniano sia geometrico [3]), criterio che ha origine dal noto procedimento di Clifford per ridurre una qualsiasi rete omaloidica ad una rete di rette mediante successive trasformazioni birazionali quadratiche, di cui ciascuna produce il maggiore abbassamento possibile nell'ordine della rete [4]).

Questo criterio che indicai brevemente nell'introduzione della mia Memoria, si fonda esclusivamente sulla proprietà che:

Dato un gruppo cremoniano geometrico $G^{(\nu)} \equiv r_1 r_2 r_3 r_4 \ldots r_p$ *di ordine* $n > 1$, *se dai tre maggiori termini del gruppo si toglie la differenza* $\varepsilon = (r_1 + r_2 + r_3) - n$, *che pel teorema di Noether* [5]) - *Rosanes* [6]) *è maggiore di* 0, *il nuovo gruppo* $G^{(\nu-1)}$ *che ottienesi, è anche esso un gruppo cremoniano geometrico di ordine* $n' = n - \varepsilon$.

Questo gruppo $G^{(\nu-1)}$ di ordine $n' < n$ — ben determinato dal gruppo $G^{(\nu)}$ — viene da me chiamato *gruppo di origine* di $G^{(\nu)}$.

Ora se di $G^{(\nu-1)}$ si determina a sua volta il gruppo di origine $G^{(\nu-2)}$, e così di seguito, la serie $G^{(\nu)}\, G^{(\nu-1)}\, G^{(\nu-2)} \ldots$ che ne risulta, e che designo col nome di *serie di origine* del gruppo $G^{(\nu)}$, è *completa*, essa cioè termina con i gruppi di ordine 2 e 1.

Invece nel caso che il gruppo $G^{(\nu)}$ non sia geometrico, la predetta serie è *incompleta*, cioè si arresta ad un gruppo $G^{(x)}$ di ordine maggiore di 2, pel fatto che l'ordine di tale gruppo è minore della somma dei primi due termini, sicchè sottraendo dal terzo termine il numero $\varepsilon^{(x)}$ già definito ne risulta un numero negativo. Perciò *un gruppo cremoniano è geometrico, se la sua serie di origine è completa.*

I gruppi $G^{(x+1)}$, che hanno per origine un gruppo geometrico dato $G^{(x)}$, sono in numero maggiore di 1, salvo il caso che $G^{(x)}$ sia di 1° ordine.

Ora in questa Memoria io indico il procedimento aritmetico col quale si costruiscono con grande facilità gli anzidetti gruppi $G^{(x+1)}$, che stabilisco di chiamare *gruppi discendenti da* $G^{(x)}$.

E dopo avere esposto molteplici proprietà di siffatte *discendenze*, procedo a gradi a determinare i varii gruppi cremoniani geometrici di ordine $3, 4, \ldots, n$,

---

[1]) Étude sur une question d'analyse indéterminée. (Giornale di Matematiche, vol. 24, 1888).

[2]) Rendiconti di questa Accademia (luglio 1905).

[3]) Il procedimento da me indicato è stato riportato da Sturm nel 4° volume (pag. 55, § 803) dell'opera: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften (Leipzig, 1909).

[4]) Cayley, On the rational transformation between two spaces (Proceedings of the London Mathematical Society, vol. III, § 69 e segg.).

[5]) Ueber Flächen, welche Schaaren rationalen Curven besitzen. (Mathematische Annalen, vol. III, pag. 165).

[6]) Ueber diejenigen rationalen Substitutionen welche eine rationale Umkehrung zulassen. (Giornale di Crelle, vol. 73, pag. 109).

notando che *i gruppi geometrici di ordine* n *si presentano « ciascuno una sola volta » fra i gruppi che discendono da quelli di ordine minore, epperò sono noti quando queste discendenze siano state costruite.*

In sostanza ogni gruppo geometrico G_n è da me ottenuto mediante la serie $G^{(1)}{}_1 G^{(2)}{}_2 G^{(3)} \dots G^{(\nu-1)} G_n$, *unica e ben determinata, opposta* alla serie di origine.

Questo procedimento è reso più rapido dall'uso di speciali serie di gruppi definite nel seguente modo: *Ogni gruppo cremoniano geometrico* $G_n \equiv r r_1 \dots r_q$, *nel quale sia stato fissato ad arbitrio un termine* $r \geq 0$, *determina una serie*, che io chiamo *uniforme di indice* $\varepsilon = n - r$, *costituita da gruppi geometrici del seguente tipo:*

$$G_{n+k\varepsilon} \equiv r + k\varepsilon \ , \ 2k/\varepsilon \ , \ r_1 \dots r_q \quad \text{[7]} \qquad \text{per} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

La serie di indice **1** è quella di De Jonquières costituita dai gruppi *isologici*

$$G_n \equiv 1/n-1 \quad 2(n-1)/1 \ ;$$

quelle di indice **2** ottenute da Cremona sono costituite dai gruppi

$$G_n \equiv 1/n-2 \quad n-2/2 \quad 3/1$$

di ordine pari o dispari [8]).

A queste si associano le due serie costituite l'una dai gruppi

$$G_n \equiv 3\Big/\frac{n}{2} \quad 1\Big/\frac{n-2}{2} \quad n-2/1$$

di ordine pari, l'altra dai gruppi

$$G_n \equiv 1\Big/\frac{n+1}{2} \quad 3\Big/\frac{n-1}{2} \quad n-2/1$$

di ordine dispari. **E** si ha il notevole teorema che:

In un gruppo geometrico l'ordine n *è sempre superiore al numero* p *dei termini, esclusi soltanto:*

i gruppi isologici, nei quali è $p - n = n - 1$;

i gruppi delle due serie di indice **2** *e delle loro associate, nei quali è* $p - n = 2$;

un numero limitato di gruppi — che io costruisco — *nei quali è* $p - n = 1$ *o* $p = n$.

Di conseguenza: *un gruppo geometrico di ordine* n *con* p *termini è necessariamente isologico se la differenza* $p - n$ *è maggiore di* **2**, *o appartiene necessariamente ad una serie di indice* **2** *o alla serie associata se la differenza* $p - n$ *è uguale a* 2.

---

[7]) Con la scrittura k/ε si indica il sistema di k termini del gruppo eguali ad ε. Se nel gruppo vi sono in tutto k termini eguali ad ε, si dirà che k è un *coefficiente* del gruppo.

[8]) Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. (Giornale di Matematiche. vol. 3°, 1865. pag. 364).

In quasi tutte le questioni da me prese in esame riguardanti il numero dei termini di un gruppo geometrico in rapporto all'ordine, oltre ai gruppi isologici si presentano come *gruppi limiti* i gruppi *simmetrici*, i gruppi cioè costituiti ciascuno da numeri eguali.

Questi gruppi sono quattro, rispettivamente degli ordini **2, 5, 8, 17.**

Una proprietà caratteristica comune ai gruppi isologici ed ai simmetrici si è che *essi sono i soli gruppi nei quali la somma dei primi tre termini è superiore all'ordine di una sola unità.*

Oltre alla precedente proposizione che in certa guisa completa il teorema di Noether-Rosanes, ho dato un'altra estensione allo stesso teorema dimostrando che: *in ogni gruppo cremoniano geometrico la somma del primo, del secondo e del quarto termine è superiore all'ordine.*

Infine ho stabilito nuove proprietà dei gruppi *asimmetrici*, dei gruppi cioè a termini a due a due diseguali, la cui esistenza sembrò impossibile a Clebsch [9]).

Ora io ho costruito infiniti di siffatti gruppi ed ho determinato quello di ordine minimo già ottenuto nelle precedenti mie ricerche sulle reti omaloidiche.

Tutti i risultati a cui sono giunto nella presente Memoria, hanno un significato geometrico ben chiaro.

La quistione, che fra le altre è qui risoluta di costruire i vari tipi di reti omaloidiche di un dato ordine, ebbe una prima soluzione nella precedente mia Nota su le reti omaloidiche.

In certa guisa le due soluzioni si completano fondandosi rispettivamente sulla riduzione di una rete omaloidica ad una rete di rette o con successive trasformazioni isologiche di cui ciascuna produce il maggiore abbassamento nell'*indice* della rete [10]), o con successive trasformazioni quadratiche di cui ciascuna produce il maggiore abbassamento nell'*ordine* della rete.

Non manca qualche altro tentativo di risolvere la predetta questione, tentativo riuscito o del tutto vano, o incompleto, perchè fondato sull'uso di trasformazioni non

[9]) Clebsch, *Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen.* (Mathematische Annalen, vol. 4°, pag. 493): « Bisher ist kein Beispiel bekannt, in welchem *nicht* gleiche *r* und gleiche *s* vorkämen, « sodass es scheint, als ob Lösungen mit nur verschiedenen *r* und *s* unmöglich sind ».

La dimostrazione data da Clebsch del teorema di Cremona sull'eguaglianza dei coefficienti dei gruppi relativi a due reti omaloidiche collegate ad una medesima trasformazione, si fonda sul modo simmetrico con cui in ciascuna rete i punti base di eguale multiplicità debbono comportarsi rispetto alle linee eccezionali di eguale ordine e viceversa.

Perciò può nascere il dubbio che la predetta dimostrazione presupponga che la rete non sia asimmetrica.

Nella prossima Memoria *Sulla scomposizione normale delle trasformazioni birazionali piane* darò una nuova dimostrazione assai semplice del teorema di Cremona.

[10]) L'*indice* di una rete omaloidica $R_n \equiv O_1^{r_1} \dots O_p^{r_p}$ o del corrispondente gruppo cremoniano $G_n \equiv r_1 \dots r_p$ è la differenza $n - r_1$ fra l'ordine ed il maggiore termine del gruppo.

Ora io dimostrai che: *una rete omaloidica di indice* i, *che abbia i punti base in posizione generica, può sempre trasformarsi in una rete di rette mediante successive trasformazioni isologiche ben determinate, in numero non superiore ad* i (Not. cit. su le reti omaloidiche, pag. 45).

soddisfacenti ad una legge chiara e precisa, o siffatta da permettere di affermare con ragione la possibilità di giungere a *tutti* i tipi richiesti, *a ciascuno una sola volta* [11]).

In una prossima Memoria proseguirò lo studio della scomposizione *normale* in successive trasformazioni di 2° ordine, di una qualsiasi trasformazione birazionale piana.

1. Più numeri interi e positivi $r_1, \ldots r_p$ si dirà che costituiscono un *gruppo cremoniano* G *di ordine* n se la loro somma è $3(n-1)$ e la somma dei loro quadrati è n^2-1.

Non si esclude che un siffatto gruppo oltre ai numeri interi $r_1, \ldots r_p$, tutti maggiori di zero, possa comprendere termini $r_{p+1}, r_{p+2}, \ldots$ eguali a zero.

Il maggior numero di un gruppo cremoniano G di ordine n non può superare $n-1$.

Ora se si suppone che nel gruppo G formato dai numeri $r_1, \ldots r_p$ vi siano α_{n-1} termini eguali ad $n-1$, α_{n-2} termini eguali ad $n-2, \ldots, \alpha_1$ termini eguali ad 1, per designare il gruppo si farà uso indifferentemente o di uno dei simboli

$$G_n \equiv r_1 \ldots r_p\,, \qquad |n\, r_1 \ldots r_p|\,,$$

nei quali si supporrà sempre che sia $r_1 \geqq r_2 \geqq \ldots \geqq r_p > 0$, o del simbolo

$$G_n \equiv \alpha_{n-1}/n-1 \quad \alpha_{n-2}/n-2 \ldots \quad \alpha_i/i \ldots \quad \alpha_1/1 \quad \text{per} \quad \alpha_i \geqq 0\,.$$

Ogni numero $\alpha_i > 0$ si dirà che è un *coefficiente* del gruppo G_n.

[11]) Ad esempio, la sig.ra Larice nella Nota: *Sulle trasformazioni cremoniane* (Atti del R. Istituto Veneto, Tom. LXVIII, 1908-1909) nell'applicare il suo metodo alla determinazione dei varii tipi di reti omaloidiche di 14° e 15° ordine, non ottiene tutti i tipi possibili e propriamente dei 51 tipi di 14° ordine ne ottiene soltanto 48 e dei 63 tipi di 15° ordine ne ottiene soltanto 54. Vegg. la nota del § 18 della presente Memoria.

Nè certo la duplice proiezione di una superficie di Veronese fatta su due piani generici dello S_5 ambiente da due piani, di cui ciascuno contenga una conica o una terna di punti della superficie, è preferibile all'uso diretto della ben nota corrispondenza birazionale che ne risulta fra i due piani iconici.

Per le reti omaloidiche di ordine < 13 sarà opportuno ricordare che tutte quelle di ordine $2, 3, \ldots, 10$ furono ottenute da Cremona, esclusa soltanto la rete corrispondente al gruppo $G_8 \equiv 3/4\ 3/2\ 3/1$ che fu indicata da Cayley (Not. cit., § 64).

Le reti omaloidiche di ordine 12 e 13 furono indicate da De Jonquières (Not. cit.), mentre quelle di ordine 11 e le corrispondenti jacobiane sono indicate nel § 18 della mia Memoria già citata.

L'elenco dei 17 tipi di reti omaloidiche di ordine 10 dato da Cremona è completo, epperò non ha ragione di essere l'affermazione di Kantor che nel predetto elenco manchi la rete corrispondente al gruppo $G_{10} \equiv 1/5\ 3/4\ 2/3\ 2/2$ (Vegg. Kantor, *Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques*. Atti di questa Accademia, Serie II, vol. I, pag. 204).

Anteriormente Ruffini nell'applicare il metodo generale da lui esposto (*Sulla risoluzione delle due equazioni di condizione delle trasformazioni cremoniane delle figure piane*. Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Serie III, tomo VIII, 1877) alla determinazione dei varii tipi di reti omaloidiche di ordine $n = 10$ già ottenuti da Cremona, dopo calcoli assai laboriosi (pag. 477-487) assegnò 18 soluzioni geometriche delle equazioni cremoniane per $n = 10$, mentre una di queste soluzioni, e propriamente la 15a: $G_{10} \equiv 1/6\ 1/4\ 5/3\ 2/1$ (pag. 483) è semplicemente aritmetica.

I numeri $r_1, r_2, \dots r_p$ si diranno rispettivamente $1^o, 2^o, \dots p^{mo}$ termine del gruppo.

Il *gruppo caratteristico* di una rete omaloidica di ordine n, il gruppo cioè costituito dagli ordini di multiplicità dei punti base della rete, è un gruppo cremoniano di ordine n.

La proposizione inversa non è vera; ad es. il gruppo $G_5 \equiv 2/3 \quad 6/1$ è cremoniano di ordine 5; mentre non esiste alcuna rete omaloidica che abbia per gruppo caratteristico il gruppo in esame, non esistendo alcuna linea non degenere di 5^o ordine che presenti due punti tripli.

Perciò un gruppo cremoniano di ordine n si dirà *geometrico* o semplicemente *aritmetico*, secondochè esiste o no una rete omaloidica che abbia per gruppo caratteristico il gruppo dato.

In generale un gruppo cremoniano di ordine n, nel quale i due termini di maggior valore diano somma maggiore di n, è semplicemente aritmetico.

Il maggior termine di un gruppo cremoniano di ordine n non è superiore ad $n-1$; perciò esiste un unico gruppo cremoniano di 1^o ordine ed è il gruppo costituito da zeri.

Così in un gruppo cremoniano di 2^o ordine ogni termine maggiore di zero è uguale ad 1. Il numero di questi termini è *tre*; cioè esiste un unico gruppo cremoniano di 2^o ordine, ed è il gruppo $G_2 \equiv 3/1$.

In generale, se il maggior termine di un gruppo cremoniano $G_n \equiv r_1 r_2 \dots r_p$ è $n-1$, per i restanti termini $r_2, \dots r_p$ del gruppo si hanno le seguenti relazioni:

$$r_2 + r_3 + \dots + r_p = 2(n-1) ,$$

$$r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_p^2 = n^2 - (n-1)^2 - 1 = 2(n-1) ;$$

onde è necessariamente

$$r_2 = r_3 = \dots = r_p = 1$$

e

$$p = 2(n-1) .$$

Dunque *l'unico gruppo cremoniano di ordine* n *che comprende il numero* n − 1, *è il gruppo*

$$G_n \equiv 1/n-1 \quad 2(n-1)/1 .$$

Esso si dirà *isologico.*

2. Un gruppo cremoniano $G_n \equiv r_1 \dots r_p$ si dice *simmetrico* se i numeri che lo costituiscono sono tutti fra loro eguali.

Indicando con r il valore di uno di tali numeri, si avrà che

$$pr = 3(n-1) ,$$

$$pr^2 = n^2 - 1 ;$$

onde

$$r = \frac{n+1}{3} .$$

Ponendo questo valore nella prima eguaglianza, si ha:

$$p = 9\frac{n-1}{n+1} = 9 - \frac{18}{n+1} :$$

onde il numero $n+1$ deve essere un divisore di 18: e però non tenendo conto del gruppo di 1° ordine, i casi possibili sono i seguenti:

$n+1=3$, cioè $n=2$, nel qual caso è $p=3$ ed $r=1$;
$n+1=6$, » $n=5$, » » » » $p=6$ » $r=2$;
$n+1=9$, » $n=8$, » » » » $p=7$ » $r=3$;
$n+1=18$, » $n=17$, » » » » $p=8$ » $r=6$;

cioè *i gruppi cremoniani simmetrici di ordine superiore ad* 1 *sono i seguenti:*

$$G_2 \equiv 3/1 \quad , \quad G_5 \equiv 6/2 \quad , \quad G_8 \equiv 7/3 \quad , \quad G_{17} \equiv 8/6$$ [12]).

Ne segue che *un solo gruppo cremoniano è costituito da termini tutti eguali ad* **1**, *ed è il gruppo di 2° ordine.*

Un gruppo cremoniano di 3° ordine, per quanto ora si è detto, deve contenere almeno un termine eguale a **2**, e però è necessariamente isologico.

Dunque *esiste soltanto un gruppo cremoniano di 3° ordine ed è il gruppo isologico* $G_3 \equiv 1/2 \; 4/1$.

In generale *un gruppo cremoniano di ordine* n *nel quale ogni termine sia eguale ad* **1** *o ad* n — **1**, *è isologico.*

3. *In un gruppo cremoniano* $G \equiv r_1 \dots r_p$ *di ordine* $n > 1$, *il numero* p *dei termini non è superiore a* $2n-1$, *e raggiunge tale limite soltanto se il gruppo è isologico.*

Infatti, dalle due eguaglianze:

$$\sum r_i = 3(n-1) \quad , \quad \sum r_i^2 = n^2 - 1 ,$$

moltiplicando la prima per n e sottraendo la seconda, si deduce che

$$\sum r_i(n - r_i) = (n-1)(2n-1) .$$

---

[12]) Il primo che si propose di determinare i vari tipi di gruppi simmetrici $G_n \equiv p/r$ fu il Ruffini, Mem. cit., pag. 462.

Ponendo $n = 3\mu - 1$, Ruffini mutò la relazione $p = 9\frac{n-1}{n+1}$ nell'altra $p = 3\left(3 - \frac{2}{\mu}\right)$ e ne concluse che μ potesse avere soltanto i valori 1, 2.

Le reti omaloidiche corrispondenti agli altri due valori possibili 3, 6 di μ, erano già state anche esse ottenute, l'una da Cremona (Mem. cit., pag. 279), l'altra da Bertini, *Sopra una classe di trasformazioni univoche involutorie.* (Annali di Matematica, Serie II, vol. 8, 1877, pag. 11, 146, 244).

Vegg. pure: Salmon, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven (Leipzig 1882, pag. 397).

Ora ogni prodotto $r_i(n-r_i)$ è uguale o maggiore di $n-1$, secondochè r_i è o no eguale ad 1 o ad $n-1$. Perciò è

$$(n-1)p \leqq (n-1)(2n-1) \, ,$$

cioè

$$p \leqq 2n-1 \, .$$

Il caso dell'eguaglianza si ha soltanto se ogni termine del gruppo è eguale ad 1 o ad $n-1$, cioè si ha soltanto pel gruppo isologico; e ne segue il teorema.

Ulteriormente può notarsi che: *Fra i gruppi cremoniani di ordine* $n>2$, *il solo che presenti* $2(n-1)$ *termini eguali ad* 1, *è l'isologico. Tutti gli altri ne hanno un numero minore* [13]).

Infatti un gruppo cremoniano G di ordine $n>2$ che comprenda $2(n-1)$ termini eguali ad 1, non è costituito esclusivamente da tali numeri (§ prec.), sicchè necessariamente esso ha il massimo numero di termini e quindi risulta isologico.

4. Dati p numeri $r_1, \ldots r_p$, indicando con S la loro somma e con Q la somma dei loro quadrati, si ha che

$$2\sum_{i<k} r_i r_k = S^2 - Q \, .$$

Di più è

$$\sum_{i<k} (r_i - r_k)^2 = (p-1)Q - 2\sum_{i<k} r_i r_k \, :$$

perciò è anche

$$\sum_{i<k} (r_i - r_k)^2 = pQ - S^2 \, . \qquad 1)$$

Se i numeri $r_1, \ldots r_p$ costituiscono un gruppo cremoniano G_n, sarà

$$\sum_{i<k} (r_i - r_k)^2 = p(n^2-1) - 9(n-1)^2 = (n-1)\left\{ p(n+1) - 9(n-1) \right\} .$$

Dunque: *In un gruppo cremoniano geometrico di ordine* n *che presenti* p *termini* $r_1, \ldots, r_p$, è

$$(n-1)\left\{ p(n+1) - 9(n-1) \right\} = \sum_{i<k} (r_i - r_k)^2 \quad {}^{14}).$$

Nella ipotesi che sia $n>1$ — e d'ora in avanti, salvo esplicita dichiarazione in contrario, si supporrà che tale condizione si verifichi — sarà

$$p \geqq 9\frac{n-1}{n+1} \, , \qquad 2)$$

[13]) Cfr. Cremona, Mem. cit., pag. 363.

[14]) Vegg. Memoria *Su le reti omaloidiche* § 6. In tutti i teoremi riguardanti il numero dei termini di un gruppo cremoniano s' intenderà sempre di parlare dei *termini maggiori di zero.*

cioè sarà

$$p \geqq 9 - \frac{18}{n+1}, \qquad 3)$$

ove il caso dell'eguaglianza si avrà soltanto per i gruppi simmetrici.

Si è già visto che per $n=2$ è $p=3$. Ora dalla 3) si deduce che:

Se $n>2$ è $p>3$,
» $n>5$ o se $n=5$ senza che il gruppo sia simmetrico, » $p>6$,
» $n>8$ » $n=8$ » » » » » » $p>7$,
» $n>17$ » $n=17$ » » » » » » $p>8$ [15]).

E si conclude che: *Ogni gruppo cremoniano simmetrico ha un numero di termini inferiore a quello di qualsiasi gruppo cremoniano di eguale o maggiore ordine.*

Il teorema del § 3 e quello dato dalla relazione 2) possono riunirsi nella seguente proposizione:

Il numero dei termini di un gruppo cremoniano di ordine n *è compreso fra i limiti* $2n-1, 9\frac{n-1}{n+1}$, *e raggiunge rispettivamente questi valori soltanto nel caso che il gruppo sia isologico o simmetrico.*

A questa proposizione sono da aggiungere le seguenti:

Il maggior termine di un gruppo cremoniano $G_n \equiv r_1 \ldots r_p$ *è compreso fra i limiti* $n-1, \frac{n+1}{3}$ *e raggiunge rispettivamente questi valori soltanto nel caso che il gruppo sia isologico o simmetrico.*

Infatti per la seconda parte del teorema basta notare che dall'essere $r_1 \geqq r_2 \geqq \ldots \geqq r_p$, segue che

$$r_1(r_1+r_2+\ldots+r_p) \geqq r_1^2+r_2^2+\ldots+r_p^2,$$

cioè

$$3(n-1)r_1 \geqq n^2-1,$$

ossia

$$r_1 \geqq \frac{n+1}{3} \text{ [16])}.$$

Il caso dell'eguaglianza si ha soltanto se $r_1=r_2=\ldots=r_p$, se cioè il gruppo è simmetrico, e però ne segue il teorema.

In un gruppo cremoniano esistono al più 8 termini fra loro eguali che hanno maggior valore dei rimanenti [17]).

---

[15]) Cfr. Kantor, Mem. cit., pag. 12. La dimostrazione di Kantor si fonda sulla proprietà non sufficientemente chiarita che per determinare una curva piana di ordine 3, 4, 5 occorrono rispettivamente almeno 7, 8, 9 punti.

[16]) Cfr. Noether, Zur Theorie der eindeutigen Ebenen trasformationen. (Mathematische Annalen, vol. 5°, pag. 636).

Vegg. pure: Salmon, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. (Leipzig, 1882, pag. 396).

[17]) Vegg. Memoria *Su le reti omaloidiche* § 1, 4°. Tenendo conto della definizione data di *coefficiente* di un gruppo cremoniano, si può anche dire che: *Il primo coefficiente di un gruppo cremoniano non è superiore ad 8.* Questa proposizione fu dimostrata da Ruffini soltanto per i gruppi semisimmetrici, per i gruppi cioè del tipo: $G_n \equiv \alpha/r, \alpha'/r'$ Mem. cit., pag. 464.

Infatti si supponga che nel gruppo $G_n \equiv r_1 \dots r_p$ sia $r_1 = r_2 = \dots = r_\mu$. Allora innanzi tutto sarà

$$3(n-1) \geqq \mu r_1 \, .$$

E siccome

$$r_1 \geqq \frac{n+1}{3} \, ,$$

sarà anche

$$3(n-1) \geqq \mu \frac{n+1}{3} \, ,$$

ossia

$$\mu \leqq 9 \frac{n-1}{n+1} \, ,$$

e ne segue il teorema.

Inoltre è

$$n \geqq \frac{9+\mu}{9-\mu} \, .$$

Il caso dell'eguaglianza si ha soltanto se $p = \mu$, se cioè il gruppo è simmetrico. Perciò *un gruppo cremoniano che presenti 8 termini fra loro eguali di maggior valore dei rimanenti, se non è simmetrico, è di ordine maggiore di* 17.

5. *In un gruppo cremoniano la somma dei primi tre termini supera l'ordine* n *del gruppo e risulta eguale ad* n + 1 *soltanto se il gruppo è isologico o simmetrico.*

Infatti, se il gruppo $G_n \equiv r_1 \dots r_p$ $(r_1 \geqq r_2 \geqq \dots \geqq r_p > 0)$ è isologico, sarà

$$r_1 = n - 1 \quad , \quad r_2 = r_3 = 1 \; ;$$

se è simmetrico, sarà:

$$r_1 - r_2 = r_3 = \frac{n+1}{3} \; :$$

sicchè in entrambi i casi sarà

$$r_1 + r_2 + r_3 = n + 1 \, .$$

Inoltre, qualunque sia il gruppo, si avrà:

$$r_3 + r_4 + \dots + r_p = 3n - 3 - r_1 - r_2$$

$$r_3^2 + r_4^2 + \dots + r_p^2 = n^2 - 1 - r_1^2 - r_2^2 \, .$$

Moltiplicando ambo i membri della prima eguaglianza per r_3 e notando che

$$r_3(r_3 + r_4 + \dots + r_p) \geqq r_3^2 + r_4^2 + \dots + r_p^2 \, ,$$

si deduce che

$$3nr_3 - 3r_3 - r_1 r_3 - r_2 r_3 \geqq n^2 - 1 - r_1^2 - r_2^2 \, ,$$

ovvero che

$$r_1^2 + r_2^2 + 1 - r_1 r_3 - r_2 r_3 - 3r_3 \geqq n(n - 3r_3) \, ,$$

e il caso dell'eguaglianza si avrà soltanto se $r_3 = r_4 = \dots = r_p$.

Ora si supponga che sia

$$n+1 \geqq r_1+r_2+r_3 .$$

Sarà anche

$$r_1^2+r_2^2+1-r_1r_3-r_2r_3-3r_3 \geqq (r_1+r_2+r_3-1)(r_1+r_2-2r_3-1) \qquad 1)$$

ove il caso dell'eguaglianza si avrà soltanto se

$$r_3=r_4=\ldots=r_p \qquad 2)$$

ed

$$r_1+r_2+r_3=n+1 . \qquad 3)$$

Fatti i calcoli, la 1) si riduce a

$$2(r_3^2-r_1r_2+r_1+r_2-2r_3) \geqq 0 ,$$

cioè

$$(r_3-1)^2-(r_1-1)(r_2-1) \geqq 0 .$$

Ora il caso della diseguaglianza è assurdo, perchè

$$r_3-1 \leqq r_2-1 \leqq r_1-1 ;$$

mentre il caso della eguaglianza può aversi soltanto o se $r_1=r_2=r_3$, se cioè, per la 2), il gruppo è simmetrico, o se $r_2=r_3=1$, nel qual caso, per la 3), è $r_1=n-1$, cioè il gruppo è isologico. In ogni altro caso è assurda l'ipotesi che sia $n+1 \geqq r_1+r_2+r_3$ e però ne segue il teorema [18]).

6. *Dato un gruppo di numeri* $|n\, r_1 \ldots r_p|$ *se a quattro suoi termini* n, r_h, r_k, r_l *si aggiunge la differenza* $\varepsilon = n-(r_h+r_k+r_l)$ *e si lasciano immutati gli altri numeri, il nuovo gruppo* $|n'\, r'_1 \ldots r'_p|$ *che ottienesi, è ligato al precedente dalle relazioni:*

$$3n-\sum r = 3n'-\sum r' \quad , \quad n^2-\sum r^2 = n'^2-\sum r'^2 . \qquad 1)$$

Infatti dalle relazioni

$$\varepsilon = n'-n = r'_h-r_h = r'_k-r_k = r'_l-r_l \quad , \quad r'_i=r_i \qquad (\text{per } i \neq h,k,l)$$

si deduce che

$$\sum r'-\sum r = 3\varepsilon = 3(n'-n) ,$$

$$\sum r'^2-\sum r^2 = 2\varepsilon(r_h+r_k+r_l)+3\varepsilon^2 = 2\varepsilon(n-\varepsilon)+3\varepsilon^2 = \varepsilon(2n+\varepsilon) = (n'-n)(n+n') = n'^2-n^2$$

e ne segue il teorema.

---

[18]) Per la prima parte del teorema cfr. Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*. Paris, 1880, tom. 2°, pag. 206.

Se il gruppo $|n\, r_1 \ldots r_p|$ è cremoniano, e se, essendo $r_h \geqq r_k \geqq r_l \geqq 0$, è $n \geqq r_h + r_k$, i nuovi numeri

$$r'_h = r_h + \varepsilon = n - (r_k + r_l)$$
$$r'_k = r_k + \varepsilon = n - (r_l + r_h)$$
$$r'_l = r_l + \varepsilon = n - (r_h + r_k)$$

non sono minori di 0, epperò per le 1) il nuovo gruppo $|n'\, r'_1 \ldots r'_p|$ è anche cremoniano.

Disponendo i termini $r'_1, \ldots, r'_p$ nell'ordine indicato nel § 1, si potrà supporre che i nuovi termini vengano ad occupare i posti designati dai numeri h', k', l', e si potrà affermare che:

Dato un gruppo cremoniano $G_n \equiv r_1 \ldots r_p r_{p+1} r_{p+2} r_{p+3}$, *nel quale gli ultimi tre termini siano nulli, se in esso si assumono tre numeri* r_h, r_k, r_l (*per* $r_h \geqq r_k \geqq r_l \geqq 0$) *soddisfacenti all'unica condizione che sia*

$$n \geqq r_h + r_k\,,$$

e si pone

$$\varepsilon = n - (r_h + r_k + r_l)\,,$$

sostituendo nel gruppo G *ai numeri* r_h, r_k, r_l *i numeri*

$$r'_{h'} = r_h + \varepsilon \quad,\quad r'_{k'} = r_k + \varepsilon \quad,\quad r'_{l'} = r_l + \varepsilon\,,$$

si ottiene un nuovo gruppo cremoniano G' *di ordine* $n' = n + \varepsilon$.

Questo gruppo G' si dirà che *è dedotto da* G *operando sulla terna* $r_h r_k r_l$.

E giacchè

$$n' - (r'_{h'} + r'_{k'} + r'_{l'}) = -\varepsilon$$

perciò, viceversa, *il gruppo* G *si deduce dal gruppo* G' *operando sulla terna* $r'_{h'} r'_{k'} r'_{l'}$.

Brevemente si dirà anche che i due gruppi $|n\, r_1 \ldots r_p|$, $|n'\, r'_1 \ldots r'_p|$ sono *deducibili* l'uno dall'altro con *lo scambio delle quaterne* $n\, r_h r_k r_l$, $n'\, r'_{h'} r'_{k'} r'_{l'}$.

In un gruppo geometrico $|n\, r_1 \ldots r_p|$ si può operare su di una qualsiasi terna $r_h r_k r_l$, perchè si ha sempre $n \geqq r_h + r_k$.

In particolare nel gruppo di 1° ordine si può operare sulla terna 000 e su questa soltanto, e il gruppo che ne risulta è quello di 2° ordine $G_2 \equiv 111$.

Perciò viceversa *il gruppo* G_1 *è deducibile soltanto dal gruppo* G_2 *e lo si ottiene operando in* G_2 *sulla terna* 111.

7. Se in una corrispondenza birazionale quadratica $\Theta \equiv \dfrac{O_h\ O_k\ O_l}{O'_{h'} O'_{k'} O'_{l'}}$ fra due piani risultano omologhe le linee $c_n, c'_{n'}$, rispettivamente degli ordini n, n', delle quali la prima nei punti fondamentali O_h, O_k, O_l abbia punti multipli degli ordini $r_h, r_k, r_l \geqq 0$ e la seconda nei punti fondamentali $O'_{h'}, O'_{k'}, O'_{l'}$, coordinati rispettivamente ai precedenti, abbia punti multipli degli ordini $r'_{h'}, r'_{k'}, r'_{l'} \geqq 0$, fra i due gruppi di numeri $|n\, r_h r_k r_l|$ $|n'\, r'_{h'} r'_{k'} r'_{l'}|$ si hanno le relazioni:

$$n' = n + \varepsilon \quad,\quad r_h = r'_{h'} + \varepsilon \quad,\quad r_k = r'_{k'} + \varepsilon \quad,\quad r_l = r'_{l'} + \varepsilon\,,$$

essendo

$$\varepsilon = n - (r_h + r_k + r_l) .$$

Perciò se si assumono nel piano della c_n un gruppo di punti $O_1, \ldots O_p$ che comprenda la terna $O_h O_k O_l$ e nel piano della $c'_{n'}$ il gruppo dei punti $O'_1, \ldots O'_p$ omologhi o coordinati ai punti $O_1, \ldots O_p$, designando con r_i, r'_i gli ordini di multiplicità per le linee c, c' dei punti O_i, O'_i, per $i = 1, 2 \ldots p$, i due gruppi di numeri $|n\, r_1 \ldots r_p|$, $|n'\, r'_1 \ldots r'_p|$ che ne risultano, si trovano nelle condizioni indicate nel primo teorema del § precedente.

Ora se esiste una rete omaloidica R costituita da curve $c_n \equiv O_1^{r_1} \ldots O_p^{r_p}$, esisterà del pari una rete omaloidica R', omologa della precedente nella Θ, costituita da curve $c'_{n'} \equiv O_1'^{r'_1} \ldots O_p'^{r'_p}$.

I gruppi caratteristici delle due reti sono i gruppi $|n\, r_1 \ldots r_p|$, $|n'\, r'_1 \ldots r'_p|$, che si deducono l'uno dall'altro con lo scambio delle quaterne $n\, r_h r_k r_l$, $n'\, r'_h r'_k r'_l$, epperò:

Ogni gruppo cremoniano deducibile da un gruppo cremoniano geometrico è anche esso geometrico.

Ne segue che: *Due gruppi cremoniani deducibili l'uno dall'altro sono della medesima natura: o entrambi geometrici o entrambi aritmetici.*

8. Dato un gruppo cremoniano $G \equiv r_1 \ldots r_p$ di ordine $n > 1$, nel quale sia $r_1 + r_2 \leq n$, il gruppo G' di ordine minimo che può dedursi da G, è quello dovuto alla terna dei maggiori numeri r_1, r_2, r_3 di G. Questo gruppo G' si dirà *gruppo di origine* di G.

Indicando con ε la differenza $(r_1 + r_2 + r_3) - n$, l'ordine n' di G' è $n - \varepsilon$.

Ora se si pone $s_3 = r_1 + r_2$, $s_2 = r_1 + r_3$, $s_1 = r_2 + r_3$, è $\varepsilon = \frac{s_1 + s_2 + s_3 - 2n}{2}$. E siccome per ipotesi è $s_3 \leq n$, è anche $s_2 \leq n$, $s_1 \leq n$, epperò è $\varepsilon \leq \frac{n}{2}$, ove il caso dell'eguaglianza si ha soltanto, per n pari, se $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{n}{2}$.

Inoltre pel teorema del § 5 è $\varepsilon \geq 1$, ove il caso dell'eguaglianza si ha soltanto se il gruppo G è isologico o simmetrico.

Dunque:

Un gruppo cremoniano G *di ordine* $n > 1$, *nel quale la somma dei primi due termini non superi il numero* n, *ammette un gruppo di origine* G' *ben determinato.*

L'ordine n' *di questo gruppo è sempre minore dell'ordine* n *del gruppo* G *da cui si parte, e risulta uguale ad* $n - 1$ *soltanto nel caso che il gruppo* G *sia isologico o simmetrico.*

Se i primi tre termini del gruppo G *sono eguali ad* $\frac{n}{2}$ *(per* n *pari), l'ordine* n' *del gruppo* G' *è* $\frac{n}{2}$. *In ogni altro caso è* $n' > \frac{n}{2}$.

9. Un gruppo cremoniano non ha gruppo di origine soltanto nel caso che il suo ordine sia minore della somma dei primi due termini.

In tale caso il gruppo è semplicemente aritmetico.

Ora, avendo un gruppo cremoniano $G_n^{(x)} \equiv r_1 \ldots r_p$, se $n > r_1 + r_2$, se ne assuma il gruppo d'origine $G^{(x-1)} \equiv r'_1 \ldots r'_{p'}$.

Tale gruppo sarà di ordine $n_1 < n$. E se anch'esso soddisfa alla condizione che $n_1 > r'_1 + r'_2$, ammetterà a sua volta un gruppo di origine $G^{(x-2)}$ di ordine $n_2 < n_1$.

Così proseguendo, si otterrà una *serie* di gruppi

$$G_n^{(x)}, \; G_{n_1}^{(x-1)}, \; G_{n_2}^{(x-2)}, \ldots$$

rispettivamente degli ordini

$$n \;, \; n_1 < n \;, \; n_2 < n_1 \;, \; \ldots$$

Questa serie — ben determinata col gruppo dato — sarà detta *serie di origine* o *serie originaria* di tale gruppo.

Ora due casi potranno darsi: o questa serie si arresta ad un gruppo $G^{(x-i)} \equiv r_1^{(i)} r_2^{(i)} \ldots$ d'ordine $n_i > 2$ $(i \geq 0)$, pel fatto che questo gruppo $G^{(x-i)}$ non ammetta gruppo di origine, o la serie termina col gruppo $G^{(x-i)}$ d'ordine $n_i = 1$, nel qual caso il penultimo gruppo della serie è necessariamente il gruppo G_2 che è l'unico da cui può dedursi il gruppo G_1 (§ 6).

In entrambi i casi i gruppi $G^{(x-i)}, G^{(x-i+1)}, \ldots, G_n$, sono tali che ciascuno di essi, a partire dal secondo, è deducibile dal precedente, sicchè risultano della medesima natura di $G^{(x-i)}$ (§ 7), cioè sono semplicemente aritmetici nel primo caso, e geometrici nel secondo. Ciò accade, in particolare, pel gruppo dato $G_n^{(x)}$; epperò:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo cremoniano sia geometrico, si è che la sua serie di origine termini con i gruppi di 2° e 1° ordine; o, come diremo brevemente, *si è che tale serie sia completa.*

10. Applicando il criterio ora stabilito è agevole riconoscere che:

a) I gruppi cremoniani simmetrici $G_3 \equiv 3/1$, $G_5 \equiv 6/2$, $G_8 \equiv 7/3$, $G_{17} \equiv 8/6$ *sono geometrici.*

Le loro serie di origine sono rispettivamente le seguenti:

1.° $G_3 \equiv 3/1$, G_1.

2.° $G_5 \equiv 6/2$, $G_4 \equiv 3/2 \;\; 3/1$, $G_2 \equiv 3/1$, G_1.

3.° $G_8 \equiv 7/3$, $G_7 \equiv 4/3 \;\; 3/2$, $G_5 \equiv 1/3 \;\; 3/2 \;\; 3/1$, $G_3 \equiv 1/2 \;\; 4/1$, $G_2 \equiv 3/1$, G_1.

4.° $G_{17} \equiv 8/6$, $G_{16} \equiv 5/6 \;\; 3/5$, $G_{14} \equiv 2/6 \;\; 3/5 \;\; 3/4$, $G_{11} \equiv 2/5 \;\; 3/4 \;\; 2/3 \;\; 1/2$, $G_8 \equiv 2/4 \;\; 2/3 \;\; 3/2 \;\; 1/1$, $G_5 \equiv 1/3 \;\; 3/2 \;\; 3/1$, $G_3 \equiv 1/2 \;\; 4/1$, $G_2 \equiv 3/1$, G_1.

Le ultime tre serie dovute a gruppi di ordine 5, 8, 17 comprendono rispettivamente 4, 6, 8 gruppi.

b) Ogni gruppo isologico G_n *è geometrico.*

La sua serie d'origine è costituita dai gruppi isologici degli ordini $n-1$, $n-2, \ldots, 2$ e dal gruppo di 1° ordine, cioè in tutto comprende n gruppi.

Questa proprietà è caratteristica per i gruppi isologici; vale a dire che:

Un gruppo cremoniano geometrico G, *non isologico, di ordine* n, *ha la serie originaria costituita da gruppi in numero inferiore ad* n.

Se il gruppo G è simmetrico, si è visto che il teorema si verifica.

Se il gruppo G non è simmetrico, il suo gruppo d'origine, $G^{(x-1)}$, è di ordine $n_1 < n-1$ (§ 9), epperò nella serie $G_n G^{(x-1)}_{n_1} G^{(x-2)}_{n_2} \dots G_2 G_1$ originaria di G, è

$$n_2 < n-2 \quad , \quad n_3 < n-4 \quad , \quad \dots \ :$$

sicchè la serie comprende, al più, $n-1$ gruppi.

c) Il gruppo

$$G_n \equiv 1/n-2 \quad n-2/2 \quad 3/1 \qquad (n \geqq 2)$$

è un gruppo cremoniano geometrico.

La sua serie di origine comprende ulteriormente i gruppi:

$$G_{n-2} \equiv 1/n-4 \quad n-4/2 \quad 3/1 \quad ; \quad G_{n-4} \equiv 1/n-6 \quad n-6/2 \quad 3/1 \quad ; \quad \dots$$

e termina coi gruppi:

$$G_4 \equiv 1/2 \quad 2/2 \quad 3/1 \quad ; \quad G_2 \quad ; \quad G_1$$

se n è pari; o coi gruppi:

$$G_3 \equiv 1/1 \quad 1/2 \quad 3/1 \quad ; \quad G_2 \quad ; \quad G_1$$

se n è dispari.

d) Il gruppo

$$G_{10} \equiv 1/6 \quad 1/4 \quad 5/3 \quad 2/1$$

indicato nella nota 11) a pag. 5 è semplicemente aritmetico.

Infatti la sua serie di origine comprende ulteriormente i gruppi $G_7 \equiv 5/3 \ \ 3/1$, $G_5 \equiv 2/3 \ \ 6/1$ e si arresta a quest'ultimo.

e) Un esempio di gruppo cremoniano semplicemente aritmetico di ordine arbitrario $n \geqq 5$ è il seguente:

$$G_n \equiv 1/n-2 \quad 1/3 \quad n-5/2 \quad 6/1 \ ,$$

nel quale i due maggiori termini $n-2$ e 3 dànno somma superiore all'ordine del gruppo.

11. A complemento delle ultime proposizioni stabilite nel § precedente è opportuno notare che:

L'unico gruppo cremoniano geometrico di ordine n *che comprende il numero* $n-2$, *è il gruppo* $G_n \equiv 1/n-2 \quad n-2/2 \quad 3/1$.

Infatti un gruppo geometrico G_n che contenga il numero $n-2$, non può ulteriormente contenere che termini eguali a 2 o ad 1, cioè risulta del tipo $G_n \equiv 1/n-2 \quad x/2 \quad y/1$. E nella serie di origine di tale gruppo, secondochè x è pari o dispari, si presenterà o un gruppo $G_{n-x} \equiv 1 \ n-x-2 \quad y/1$ che sarà necessariamente di 2° ordine, perchè pel teorema del § 5 non potrà essere $n-x-2>0$.

o un gruppo $G_{n-x+1} \equiv 1/n-x-1 \ \ 1/2 \ \ y/1$ di ordine maggiore di 2, che per lo stesso teorema sarà isologico e di ordine **3**; sicchè in entrambi i casi sarà $x=n-2$, $y=3$. E ne segue il teorema.

Si è ora al caso di determinare i gruppi cremoniani geometrici di 4° e 5° ordine.

In un gruppo geometrico di ordine $n=4$, che non coincida col gruppo isologico $G_4 \equiv 1/3 \ \ 6/1$, il primo termine, essendo minore di 3 e maggiore di 1 (§ 2), risulta essere $2 \, (=n-2)$.

Sicchè il gruppo in esame è il gruppo $G_4 \equiv 3/2 \ \ 3/1$.

Perciò *i gruppi cremoniani geometrici di 4° ordine sono i gruppi:*

$$G_4 \equiv 1/3 \ \ 6/1 \quad , \quad G_4 \equiv 3/2 \ \ 3/1 \, .$$

Così, in un gruppo geometrico di ordine $n=5$, che non sia nè il gruppo isologico $G_5 \equiv 1/4 \ \ 8/1$, nè il gruppo simmetrico $G_5 \equiv 6/2$, il primo termine essendo minore di 4 e maggiore di 2 (§ 4) risulta essere $3 (=n-2)$. Sicchè il gruppo in esame è il gruppo $G_5 \equiv 1/3 \ \ 3/2 \ \ 3/1$.

Perciò *i gruppi cremoniani geometrici di 5° ordine sono i gruppi:*

$$G_5 \equiv 1/4 \ \ 8/1 \quad , \quad G_5 \equiv 1/3 \ \ 3/2 \ \ 6/1 \quad , \quad G_5 \equiv 6/2 \, .$$

12. Un gruppo cremoniano geometrico $\Gamma_\nu \equiv \rho_1 \ldots \rho_\pi$ ed il suo gruppo di origine G_n differiscono soltanto in questo che al posto della terna $\rho_1 \rho_2 \rho_3$ di Γ si presenta in G la terna τ formata dai numeri:

$$r_h = \nu - \rho_2 - \rho_3 \quad , \quad r_k = \nu - \rho_3 - \rho_1 \quad , \quad r_l = \nu - \rho_1 - \rho_2 \, , \qquad 1)$$

pei quali si ha

$$r_h \geqq r_k \geqq r_l \geqq 0 \, .$$

Si dirà che la τ è una *terna di derivazione nel gruppo* G e che Γ è *il gruppo discendente da* G *dovuto alla* τ.

Se μ numeri della τ sono nulli ($\mu \leqq 3$), i termini del gruppo G maggiori di 0 sono i rimanenti $3-\mu$ termini della τ ed i numeri $\rho_4, \ldots, \rho_\pi$, cioè, in tutto, il gruppo G presenta

$$(3-\mu) + (\pi - 3) = \pi - \mu$$

termini maggiori di zero.

Dunque: *Il numero dei termini di un gruppo geometrico* Γ *non è inferiore a quello del gruppo di origine.*

La differenza fra i due numeri è uguale al numero degli zeri che si presentano nella terna di derivazione relativa al gruppo Γ.

Ora occorre determinare quale condizione debba verificarsi affinchè tre numeri r_h, r_k, r_l del gruppo G_n ($r_h \geqq r_k \geqq r_l \geqq 0$) formino una terna di derivazione in tale gruppo.

Se r_i è il maggior termine di G_n diverso da r_h, r_k, r_l, tale condizione si è che

i tre numeri

$$\rho_1 = n - r_k - r_l \quad , \quad \rho_2 = n - r_l - r_h \quad , \quad \rho_3 = n - r_h - r_k$$

siano maggiori od uguali ad r_i, e siccome è

$$\rho_1 \geqq \rho_2 \geqq \rho_3 \,,$$

perciò la condizione richiesta si è che ρ_3 non sia minore di r_i, ossia che

$$n - r_i \geqq r_h + r_k \,.$$

In particolare le terne di derivazione $r_h r_k r_l$ formate da numeri minori di r_1 soddisfano all'unica condizione che

$$n - r_1 \geqq r_h + r_k \,. \tag{2}$$

Perciò, se la differenza $n - r_1$ viene chiamata *indice* del gruppo G_n, si ha che: *In un dato gruppo geometrico* $G_n \equiv r_1 \ldots r_p r_{p+1} r_{p+2} r_{p+3}$ *tre numeri minori di* r_1 *costituiscono una terna di derivazione, se i due maggiori fra di essi dànno somma minore dell'indice del gruppo.*

Restano ora a determinarsi le terne di derivazione $r_h r_k r_l$ nelle quali è $r_k = r_1$.

In una di queste terne non può essere $r_k = r_2$ ed $r_l = r_3$, perchè non è possibile che di due gruppi G_n, Γ_ν ciascuno sia origine dell'altro, non potendo ciascuno dei numeri n, ν essere maggiore dell'altro.

Nè è possibile che sia $r_k = r_2$ ed $r_l < r_3$. Perchè se così fosse, il maggior termine del gruppo G_n diverso da r_h, r_k, r_l risulterebbe r_3, e dovrebbe aversi

$$n - r_3 \geqq r_1 + r_2 \,,$$

il che è assurdo.

Perciò in una terna di derivazione $r_h r_k r_l$ nella quale $r_h = r_1$, è $r_k < r_2$, e la condizione **2**) per tale terna si riduce alla

$$n - r_2 \geqq r_1 + r_k \,,$$

ossia alla

$$n - r_1 - r_2 \geqq r_k \,. \tag{3}$$

Ora questa è la condizione affinchè in G_n la $r_2 r_k r_l$ sia una terna di derivazione, epperò *nel gruppo* G_n *le terne di derivazione che contengono* r_1, *si ottengono da quelle già ottenute che comprendono* r_2, *sostituendo in queste* r_1 *ad* r_2.

In conclusione: *In un dato gruppo geometrico* $G_n \equiv r_1 \ldots r_p r_{p+1} r_{p+2} r_{p+3}$ *le terne di derivazione formate da numeri minori di* r_1 *si ottengono assumendo tutte le coppie di termini* r_h, r_k *minori di* r_1, *la cui somma non superi l'indice del gruppo, ed aggregando a ciascuna coppia ogni termine* r_l *pel quale sia* $r_h \geqq r_k \geqq r_l$. *Le terne di derivazione che contengono* r_1, *si ottengono da quelle già costruite che contengono* r_2, *sostituendo in queste* r_1 *ad* r_2.

È bene inteso che questa sostituzione dà origine a nuove terne soltanto se r_2 è diverso da r_1.

Se si vogliono costruire direttamente le terne che comprendono r_1 (o r_2), basterà aggregare ad r_1 (o ad r_2) ogni coppia di termini $r_k r_l$ tale che

$$n - r_1 - r_2 \geqq r_k \geqq r_l .$$

In qualunque gruppo geometrico $G_n \equiv r_1 \ldots r_p$ si presentano le terne di derivazione 000, $r_1 00$, ..., $r_p 00$. Queste perciò si diranno *ordinarie*, mentre quelle che contengono due o tre termini maggiori di 0, si diranno *speciali*, perchè non si hanno in tutti i gruppi.

Per stabilire la condizione che deve verificarsi perchè siffatte terne si presentino, basta notare che se nel gruppo G_n ad un termine di una terna di derivazione si sostituisce un termine minore del gruppo, si ottiene una nuova terna di derivazione.

Perciò esistono terne di derivazione che comprendono due (o tre) numeri maggiori di 0, soltanto nel caso che la $r_{p-1} r_p 0$ (o la $r_{p-2} r_{p-1} r_p$) sia una terna di derivazione, soltanto cioè nel caso che l'indice i del gruppo non sia minore della somma $r_{p-1} + r_p$ (o della somma $r_{p-2} + r_{p-1}$).

Perciò *soltanto nel caso che sia*

$$i < r_{p-1} + r_p ,$$

nel gruppo G_n *non vi saranno terne di derivazione speciali.*

Analogamente *soltanto nel caso che sia*

$$i < r_2 + r_p ,$$

non vi sarà nel gruppo alcuna terna di derivazione speciale che comprenda r_1 *(o* r_2*)*, perchè in tale caso la $r_2 r_p 0$ (o la $r_1 r_p 0$) non sarà terna di derivazione.

Infine occorre notare che il gruppo Γ dovuto alla terna di derivazione ordinaria $r_h 00$, è di ordine $2n - r_h$ e comprende i numeri n, $n - r_h$, $n - r_h$ e tutti i numeri del gruppo G_n diversi da r_h.

In particolare il gruppo dovuto alla terna 000 è costituito da tre numeri eguali ad n e dai numeri $r_1, \ldots r_p$ del gruppo G.

Viceversa un gruppo $G_{2n} \equiv n\, n\, n\, r_1 \ldots r_p$, nel quale i primi tre termini siano eguali alla metà dell'ordine, ha per origine un gruppo $G_n \equiv r_1 \ldots r_p$ e per terna di derivazione la 000.

Perciò *in ogni gruppo geometrico* $G_{2n} \equiv n\, n\, n\, r_1 \ldots r_p$ *i termini* $r_1, \ldots r_p$ *sono tutti minori di* n.

13. Daremo ora alcuni esempi per chiarire le proposizioni stabilite nel prec. §.

1° Sia dato il gruppo cremoniano geometrico

$$G_{13} \equiv 1/7 \;\; 1/6 \;\; 1/5 \;\; 2/4 \;\; 2/3 \;\; 2/2 .$$

L'indice i del gruppo è 6, ed è $i < r_2 + r_p$. Perciò non esistono terne di derivazione speciali che comprendano r_1 o r_2.

Invece è $i > r_{p-1} + r_p$; perciò esistono terne di derivazione speciali formate da numeri minori di r_2. Per ottenerle si assumano tutti i termini del gruppo inferiori ad r_2.

Essi sono i numeri

$$5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 0. \qquad 1)$$

Aggruppando a due a due tali numeri, escluso lo 0, si riterranno soltanto le coppie formate da termini la cui somma non superi l'indice, cioè le coppie

$$42, 33, 32, 22.$$

Ad ognuna di queste coppie si aggregherà ciascuno dei numeri del sistema 1) susseguente al secondo termine della coppia, e si otterranno le terne richieste:

$$422, 420, 332, 330, 322, 320, 220.$$

2° Si parta dal gruppo cremoniano geometrico

$$G_{14} \equiv 4/6 \;\; 3/4 \;\; 3/1.$$

L'indice del gruppo è 8, ed è $i > r_2 + r_p$.

Perciò esistono terne di derivazione speciali che comprendono $r_1 (= r_2)$.

Per ottenerle si assumano tutti i numeri del gruppo non superiori ad $n - r_1 - r_2$, cioè i numeri 1, 1, 1, 0.

Aggregando il termine $r_1 = 6$ ad ogni coppia formata dai predetti numeri, si ottengono le terne richieste

$$611, 610.$$

I termini del gruppo minori di r_2 sono

$$4, 4, 4, 1, 1, 1, 0 \qquad 1)$$

Le coppie che possono formarsi con due di questi numeri, escluso lo 0, che diano somma non superiore all'indice, sono le

$$44, 41, 11.$$

Aggregando a ciascuna di queste coppie ogni termine del sistema 1) che sussegua al secondo termine della coppia, si otterranno le terne di derivazione speciali

$$444, 441, 440, 411, 410, 111, 110$$

formate da termini minori di r_2.

3° Sia dato il gruppo cremoniano geometrico

$$G_{14} \equiv 1/6 \;\; 6/5 \;\; 1/3.$$

L'indice i del gruppo è 8, ed è $i = r_2 + r_p$. Perciò esistono terne di derivazione speciali che comprendono r_1 o r_2. Esse sono le

630 , 530 .

Fra i termini $r_3, \ldots, r_p$ del gruppo soltanto l'ultimo è minore di r_2, epperò non esistono altre terne di derivazione speciali oltre quelle trovate.

14. Dalle proprietà già stabilite sulle *discendenze* di un dato gruppo cremoniano si deducono ulteriormente le seguenti proposizioni:

In un gruppo cremoniano geometrico $\Gamma_\nu \equiv \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 \ldots \rho_\pi$ *la somma del primo, del terzo e del quarto termine è maggiore dell'ordine del gruppo.*

Infatti il gruppo di origine G_n di Γ_ν comprende i numeri $\rho_4, \ldots, \rho_\pi$, pei quali è $\rho_4 \geqq \rho_5 \geqq \ldots > \rho_\pi$, ed i numeri

$$r_h = \nu - \rho_2 - \rho_3 \quad , \quad r_k = \nu - \rho_3 - \rho_1 \quad , \quad r_l = \nu - \rho_1 - \rho_2 \, ,$$

pei quali è

$$r_h \geqq r_k \geqq r_l \, .$$

Ora se fosse

$$\nu \geqq \rho_1 + \rho_3 + \rho_4 \, , \tag{1}$$

sarebbe

$$r_k \geqq \rho_4 \, ,$$

cioè nel gruppo G_n la terna di derivazione $r_h r_k r_l$ relativa al gruppo Γ comprenderebbe i due maggiori termini r_h, r_k del gruppo, il che è assurdo.

Perciò è assurda la 1) e ne segue il teorema.

Il maggior termine r_1 del gruppo G_n o è ρ_4 o è $r_h = \nu - \rho_2 - \rho_3$. Perciò $\rho_1 \geqq r_1$, e propriamente il caso dell'eguaglianza si ha soltanto se $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$, nel qual caso è

$$n = 2\nu - 3\rho_1 \quad , \quad i = 2\nu - 4\rho_1 \quad ; \quad r_h = r_k = r_l = \nu - 2\rho_1 = \frac{i}{2} \, .$$

E viceversa. Dunque:

Il maggior termine di un gruppo geometrico Γ *non è inferiore al maggior termine del gruppo di origine* G. *Il caso dell'eguaglianza si ha soltanto se la terna di derivazione del gruppo* Γ *è formata da numeri eguali alla metà dell'indice del gruppo* G.

Questa proposizione è completata dall'altra che:

L'indice di un gruppo geometrico Γ *non è inferiore all'indice del gruppo di origine* G. *Il caso dell'eguaglianza si ha soltanto se la terna di derivazione del gruppo* Γ *comprende il maggior termine del gruppo* G.

Infatti nel gruppo Γ_ν è $\nu = n - \varepsilon$ e $\rho_1 = r_h - \varepsilon$, epperò l'indice ι del gruppo è $n - r_h$.

L'indice i di G_n è $n - r_1$, epperò

$$\iota - i = r_1 - r_h \, ,$$

e ne segue il teorema.

Ed è notevole il fatto che: *Fra i gruppi discendenti da un gruppo dato* G_n *quello dovuto alla terna* 000 *è il gruppo in cui l'ordine, il numero dei termini, l'indice ed il primo termine hanno il maggior valore.*

Ulteriormente si ha che: *In un gruppo geometrico* Γ *l'indice è minore, eguale o maggiore della metà dell'ordine, secondochè la terna di derivazione del gruppo ha il primo termine maggiore, eguale o minore della somma degli altri due.*

Infatti pel gruppo Γ_ν si ha

$$r_h-(r_k+r_l)=\nu-\rho_2-\rho_3-(\nu-\rho_3-\rho_1+\nu-\rho_1-\rho_2)=2\rho_1-\nu\ ,$$

epperò secondochè la differenza $r_h-(r_k+r_l)$ è maggiore, eguale o minore di 0, ρ_1 è maggiore, eguale o minore di $\frac{\nu}{2}$, e corrispondentemente l'indice $\iota=\nu-\rho_1$ è minore, eguale o maggiore di $\frac{\nu}{2}$.

Nel primo caso ρ_1 è maggiore di ρ_2, nel secondo caso i termini del gruppo eguali a ρ_1 possono essere al più ρ_2, ρ_3 (§ 12); nel terzo caso possono essere eguali a ρ_1 al più i termini $\rho_2, \ldots, \rho_8$ (§ 4).

15. Se i termini $r_1, \ldots, r_p$ di un gruppo geometrico G_n formano χ sottogruppi dei quali ciascuno comprenda tutti i termini aventi un medesimo valore, le terne di derivazione ordinarie che si presentano in G_n, sono $\chi+1$; nè esisteranno terne di derivazione speciali se è $n<r_1+r_{p-1}+r_p$, sicchè in tale caso vi saranno in tutto $\chi+1$ gruppi Γ discendenti da G_n.

Questo fatto si verifica se è $r_2=r_3=\ldots=r_p$, giacchè allora è

$$n-(r_1+r_{p-1}+r_p)=n-(r_1+r_2+r_3)<0\ .$$

In particolare pei *gruppi simmetrici* e pei *gruppi isologici* (pei quali è $r_2=r_3=\ldots=r_p$) si ha che:

1° *Un gruppo simmetrico* $G_n=p/r$ *ammette soltanto due gruppi discendenti dovuti alle terne di derivazione* $r00$, 000. *Essi sono i gruppi*

$$G_{2n-r}\equiv 1/n\ \ 2/n-r\ \ p-1/r\quad ,\quad G_{2n}\equiv 3/n\ \ p/r\ ^{19}).$$

2° *Un gruppo isologico di ordine* $n>2$ *presenta soltanto tre gruppi discendenti dovuti alle terne di derivazione* $n-1\,00$, 100, 000. *Essi sono il gruppo isologico di ordine* $n+1$ *ed i gruppi*

$$G_{2n-1}\equiv 1/n\ \ 3/n-1\ \ 2n-3/1\quad ,\quad G_{2n}\equiv 3/n\ \ 1/n-1\ \ 2(n-1)/1\ .$$

Questi ultimi due gruppi hanno rispettivamente l'uno $2n+1$ e l'altro $2n+2$ termini (§ 13), sicchè in ciascuno il numero dei termini supera di 2 unità l'ordine.

Se si pone $m=2n-1$ pel primo e $m=2n$ pel secondo, i simboli dei due gruppi risultano essere

$$G_m\equiv 1\Big/\frac{m+1}{2}\quad 3\Big/\frac{m-1}{2}\quad m-2/1\qquad (m \text{ dispari} >3)$$

$$G_m\equiv 3\Big/\frac{m}{2}\quad 1\Big/\frac{m-2}{2}\quad m-2/1\qquad (m \text{ pari} >2).$$

---

[19]) I valori dei numeri n, p, r sono stati indicati nel § 2.
Per $n=2$, si hannno i due gruppi

$$G_3\equiv 1/2\ \ 4/1\quad ,\quad G_4\equiv 3/2\ \ 3/1\ .$$

Un gruppo G_n si dirà *semisimmetrico*, se è costituito soltanto da due sottogruppi.

Ora da ciò che si è detto in generale pel numero dei gruppi discendenti da un dato gruppo G_n, segue che tale numero è 2 soltanto pei gruppi simmetrici, ed è 3 soltanto pei gruppi semisimmetrici che non abbiano terne di derivazione speciali.

Si è visto che in queste condizioni si trova ogni gruppo G_n nel quale sia $r_2 = r_3 = \ldots = r_p$. Ora anche se in G_n è $r_1 = r_2$, ed $r_3 = r_4 = \ldots = r_p$, dall'essere $n - (r_1 + r_3 + r_4) < 0$ (§ 13) segue che è $n < r_1 + r_{p-1} + r_p$, sicchè il gruppo G_n si trova anche esso nelle condizioni indicate [20]).

16. Un gruppo cremoniano geometrico $G_n \equiv r_1 \ldots r_p$ si dirà di *modulo* 3, 2, 1, 0 secondochè i tre numeri $n - (r_2 + r_3)$, $n - (r_3 + r_1)$, $n - (r_1 + r_2)$, che ne costituiscono la terna di derivazione, sono tutti nulli, o sono nulli soltanto gli ultimi due, o soltanto l'ultimo o nessuno; cioè si chiamerà *modulo* di un gruppo geometrico *il numero* μ *degli zeri che si presentano nella sua terna di derivazione.*

Se il gruppo è di modulo 0, non esiste alcuna coppia di termini che diano somma eguale ad n; se è di modulo 1, l'unica coppia soddisfacente alla predetta condizione è la $r_1 r_2$; se è di modulo 2, i due termini r_2, r_3, entrambi eguali ad $n - r_1$, appartengono ad un medesimo sottogruppo $r_2 r_3 \ldots r_x$, (per $x \geq 3$) e le coppie soddisfacenti alla condizione indicata sono le $r_1 r_2, r_1 r_3, \ldots r_1 r_x$; se infine il gruppo è di modulo 3, i tre termini r_1, r_2, r_3, tutti eguali ad $\frac{n}{2}$, costituiscono un sottogruppo, e le coppie soddisfacenti alla condizione indicata sono le $r_2 r_3, r_3 r_1, r_1 r_2$. E viceversa.

In particolare il gruppo G_2 è di modulo 3; ogni gruppo isologico di ordine > 2 ed ogni gruppo $G_n \equiv 1/n-2 \;\; n-2/2 \;\; 3/1$ di ordine > 4 sono di modulo 2; ogni gruppo simmetrico diverso da G_2 è di modulo 0.

In generale *il modulo di un gruppo* $G_n \equiv r_1 \ldots r_p$ *risulta eguale alla differenza fra il numero dei termini del gruppo ed il numero dei termini del gruppo di origine* (§ 12).

Ora occorre confrontare l'anzidetta differenza

$$\mu = p - p'$$

con la differenza

$$\varepsilon = n - n' = r_1 + r_2 + r_3 - n$$

fra gli ordini dei due gruppi (§ 8).

La ε è sempre maggiore di 0, epperò se il gruppo G_n è di modulo $\mu = 0$, è $\varepsilon > \mu$.

Se il gruppo G_n è di modulo $\mu = 1$, esso non è nè isologico nè simmetrico, epperò anche in tale caso è sempre $\varepsilon > \mu$.

Se il gruppo G_n è di modulo $\mu = 2$, sarà $r_2 = r_3 = n - r_1$ ed $\varepsilon = n - r_1$, onde sarà $\varepsilon > \mu$ se si esclude che la differenza $n - r_1$ sia 1 o 2, se si esclude cioè

[20]) Ad esempio, i gruppi semisimmetrici $G_{10} \equiv 1/6 \;\; 7/3$, $G_{17} \equiv 1/12 \;\; 9/4$, $G_{13} \equiv 2/6 \;\; 6/4$, $G_{29} \equiv 2/14 \;\; 7/8$ sono del tipo indicato.

che il gruppo G_n sia isologico (per $n > 2$), o sia il gruppo $G_n > 1/n-2 \;\; n-2/2 \;\; 3/1$ (per $n > 4$).

Infine se il gruppo G_n è di modulo $\mu = 3$, sarà $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{n}{2}$, ed $\varepsilon = \frac{n}{2} = n'$, epperò sarà $\varepsilon > \mu$, se si esclude che n' sia 1, 2, 3, se si esclude cioè che il gruppo G_n sia uno dei tre gruppi $G_2 \equiv 3/1$, $G_4 \equiv 3/2 \;\; 3/1$, $G_6 \equiv 3/3 \;\; 1/2 \;\; 4/1$ di modulo 3, che hanno per origine i gruppi di 1°, 2° e 3° ordine.

Essendo

$$\varepsilon - \mu = (n - p) - (n' - p')$$

sarà $n - p > n' - p'$, se è $\varepsilon > \mu$, e viceversa. Perciò dal confronto ora fatto risulta che:

In un gruppo cremoniano geometrico la differenza fra l'ordine ed il numero dei termini è maggiore della differenza analoga che si ha pel gruppo di origine, esclusi soltanto i gruppi isologici, i gruppi $G_n \equiv 1/n-2 \;\; n-2/2 \;\; 3/1$ *ed il gruppo* $G_6 \equiv 3/3 \;\; 1/2 \;\; 4/1$.

17. Due o più gruppi geometrici pensati in un determinato ordine si dirà che costituiscono una *serie discendente*, se ciascuno di essi, a partire dal secondo, ha per origine il precedente. La serie si dirà *completa* se ha principio con i gruppi G_1, G_2.

Per ogni gruppo G_x resta determinata una serie completa che comprende G_x e si arresta a tale gruppo. Essa è costituita dai gruppi che formano la serie di origine di G_x presi in ordine inverso.

I gruppi comuni a due serie discendenti complete costituiscono a loro volta una serie discendente completa. Se questa termina col gruppo G_x, e ciascuna delle serie date presenta almeno un altro gruppo susseguente a G_x, si dirà che una delle serie date *si stacca* dall'altra nel gruppo G_x.

Fra le serie complete hanno speciale importanza la serie *isologica* costituita dal gruppo G_1 e dai gruppi isologici di ordine $2, 3, 4, \ldots$, e le serie Σ_2, Σ'_2 formate l'una dal gruppo G_1 e dai gruppi $G_n \equiv 1/n-2 \;\; n-2/2 \;\; 3/1$ degli ordini $2, 4, 6, \ldots$, l'altra dai gruppi G_1, G_2 e dai gruppi $G_n \equiv 1/n-2 \;\; n-2/2 \;\; 3/1$ degli ordini $3, 5, 7, \ldots$

Queste serie possono dirsi di *indice* 2 al pari dei gruppi che le costituiscono, a partire da quello di 6° (o di 5°) ordine.

Ora si assuma ad arbitrio una serie discendente completa che non coincida con alcuna delle tre precedenti, e dei tre gruppi in cui tale serie Σ si distacca dalle Σ_1, Σ_2, Σ'_2, si consideri quello che sussegue agli altri due.

Se tale gruppo $G^{(0)}$ appartiene alla Σ_1, il gruppo G_n che gli sussegue nella Σ, per n pari sarà del tipo $G_n \equiv 3\Big/\frac{n}{2} \;\; 1\Big/\frac{n-2}{2} \;\; n-2/1$ (§ 15, 2°), nè apparterrà alla Σ_2, cioè sarà $n > 4$; per n dispari sarà del tipo $G_n \equiv 1\Big/\frac{n+1}{2} \;\; 3\Big/\frac{n-1}{2} \;\; n-2/1$, nè apparterrà alla Σ'_2, cioè sarà $n > 5$.

In entrambi i casi pel gruppo G_n è

$$\delta = n - p = -2 \,. \qquad 1)$$

Inoltre per tutti i gruppi $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots G^{(r)}, \ldots$ della Σ che susseguono a G_n, vale

il teorema del § precedente, cioè se si designa con δ_i la differenza $n_i - p_i$ fra l'odine ed il numero dei termini di un siffatto gruppo $G^{(i)}$, è

$$\delta_1 > \delta \;,\; \delta_2 > \delta_1 \;,\; \ldots \;,\; \delta_i > \delta_{i-1} \;,\; \ldots \qquad 2)$$

Invece nel caso che il gruppo G^0 appartenga alla serie Σ_2 o alla Σ'_2, cioè risulti del tipo $G_n \equiv 1/n-2 \;\; n-2/2 \;\; 3/1$ per $n > 3$, vale per esso la 1), mentre le relazioni 2) valgono pei gruppi $G^1, G^{(2)}, \ldots, G^{(i)}, \ldots$ che susseguono a G_n nella Σ.

In ogni caso dalle 1), 2) segue che i valori minimi delle $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_i, \ldots$ sono $-1, 0, 1, \ldots i-2, \ldots$, sicchè la δ_1 può essere eguale a -1 o a 0 o essere maggiore di 0; la δ_2 può essere 0, quando la δ_1 sia eguale a -1, o risultare maggiore di 0; mentre le $\delta_3, \delta_4, \ldots \delta_i, \ldots$ sono tutte maggiori di 0.

Se si suppone che μ dei tre termini della terna di derivazione del gruppo G^1 siano nulli e che la somma dei tre termini sia il numero s, sarà

$$n_1 = 2n - s \quad , \quad p_1 = (n+2) + \mu \;;$$

epperò δ_1 sarà eguale a -1 o a 0, se $s + \mu + 1 = n$ o se $s + \mu + 2 = n$.

Analogamente se μ' termini della terna di derivazione del gruppo $G^{(2)}$ sono nulli e se la somma dei tre termini della terna è s', sarà $\delta_2 = 0$, se $\delta_1 = -1$ ed $s' + \mu' + 1 = n_1$.

D'altra parte i gruppi G^1 discendenti da $G_n \equiv 1/n-2 \;\; n-2/2 \;\; 3/1$ (per $n > 3$) sono dovuti alle terne di derivazione

$$111 \;,\; 200 \;,\; 110 \;,\; 100 \;,\; 000 \;; \text{[21]}$$

---

[21]) Essi sono i gruppi:

1.° $G_m \equiv 4\Big/\frac{m-1}{2} \;\; \frac{m-1}{2}\Big/2$ per $m = 2n-3$ (m dispari $\geqq 5$)

2.° $G_m \equiv 1\Big/\frac{m+2}{2} \;\; 3\Big/\frac{m-2}{1} \;\; \frac{m-4}{2}\Big/2 \;\; 3/1$ » $m = 2n-2$ (m pari $\geqq 8$)

3.° $G_m \equiv 2\Big/\frac{m}{2} \;\; 2\Big/\frac{m-2}{2} \;\; \frac{m-2}{2}\Big/2 \;\; 1/1$ » $m = 2n-2$ (m pari $\geqq 6$)

4.° $G_m \equiv 1\Big/\frac{m+1}{2} \;\; 2\Big/\frac{m-1}{2} \;\; 1\Big/\frac{m-3}{2} \;\; \frac{m-3}{2}\Big/2 \;\; 2/1$ » $m = 2n-1$ (m dispari $\geqq 7$)

5.° $G_m \equiv 3\Big/\frac{m}{2} \;\; 1\Big/\frac{m-4}{2} \;\; \frac{m-4}{2}\Big/2 \;\; 3/1$ » $m = 2n$ (m pari $\geqq 8$).

Il 1.° ed il 3.° di questi gruppi sono stati esaminati sommariamente in una breve Nota dalla sig.ra Larice che li ritiene nuovi. (*Due nuove soluzioni generali, soddisfacenti al problema geometrico, delle equazioni di condizione delle trasformazioni Cremoniane.* Periodico di Matematica, Serie II, Vol. VI, Anno XXIV: 1908-1909. Fasc. 4-6; p. 234-237). Invece i due gruppi furono ottenuti sin dal 1877 da Ruffini assieme agli altri tre gruppi G_m ora indicati. Mem. cit., pag. 499 e 501.

E le jacobiane delle corrispondenti reti omaloidiche, che la Larice indica nella sua Nota, erano già state determinate da Ruffini.

Speciale importanza ha il gruppo $G_m \equiv 4\Big/\frac{m-1}{2} \;\; \frac{m-1}{2}\Big/2$, gruppo semisimmetrico di ordine dispari > 5. Esso ben può chiamarsi *gruppo di Ruffini.* (Vegg. la Memoria su le reti omaloidiche § 16 in nota).

quelli discendenti da $G_n \equiv 3\Big/\frac{n}{2}\;\; 1\Big/\frac{n-2}{2}\;\; n-2/1$ (per n pari >4) sono dovuti alle terne

$$\frac{n-2}{2}11\;,\;\frac{n}{2}00\;,\;\frac{n-2}{2}10\;,\;\frac{n-2}{2}00\;,\;111\;,\;110\;,\;100\;,\;000\;;$$ [22])

quelli discendenti da $G_n \equiv 1\Big/\frac{n+1}{2}\;\; 3\Big/\frac{n-1}{2}\;\; n-2/1$ (per n dispari >5) sono dovuti alle terne

$$\frac{n+1}{2}00\;,\;\frac{n-1}{2}00\;,\;111\;,\;110\;,\;100\;,\;000\;.$$ [23])

Ora fra tutte le terne indicate, quelle nelle quali la somma $s+\mu+1$ è eguale

---

[22]) Essi sono i gruppi:

1.° $G_m \equiv 1\Big/\frac{2m-4}{3}\;\; 5\Big/\frac{m+1}{3}\;\; \frac{2m-10}{3}\Big/1$ per $m=\frac{3n-2}{2}$ $(m=8\,,11\,,\ldots,8+3k)$.

2.° $G_m \equiv 1\Big/\frac{2m}{3}\;\; 4\Big/\frac{m}{3}\;\; 1\Big/\frac{m-3}{3}\;\; \frac{2m-6}{3}\Big/1$ » $m=\frac{3n}{2}$ $(m=9\,,12\,,\ldots,9+3k)$.

3.° $G_m \equiv 1\Big/\frac{2m-3}{3}\;\; 1\Big/\frac{m+3}{3}\;\; 4\Big/\frac{m}{3}\;\; \frac{2m-9}{3}\Big/1$ » $m=\frac{3n}{2}$ $(m=9\,,12\,,\ldots,9+3k)$.

4.° $G_m \equiv 1\Big/\frac{2m-2}{3}\;\; 2\Big/\frac{m+2}{3}\;\; 3\Big/\frac{m-1}{3}\;\; \frac{2m-8}{3}\Big/1$ » $m=\frac{3n+2}{2}$ $(m=10,13,\ldots,10+3k)$.

5.° $G_m \equiv 3\Big/\frac{m-1}{2}\;\; 3\Big/\frac{m+3}{4}\;\; 1\Big/\frac{m-1}{4}\;\; \frac{m-7}{2}\Big/1$ » $m=2n-3$ $(m=9\,,13\,,\ldots,9+4k)$.

6.° $G_m \equiv 2\Big/\frac{m}{2}\;\; 1\Big/\frac{m-2}{2}\;\; 3\Big/\frac{m+2}{4}\;\; 1\Big/\frac{m-2}{4}\;\; \frac{m-6}{2}\Big/1$ » $m=2n-2$ $(m=10,14,\ldots,10+4k)$.

7.° $G_m \equiv 1\Big/\frac{m+1}{2}\;\; 2\Big/\frac{m-1}{2}\;\; 3\Big/\frac{m+1}{4}\;\; 1\Big/\frac{m-3}{4}\;\; \frac{m-5}{2}\Big/1$ » $m=2n-1$ $(m=11,15,\ldots,11+4k)$.

8.° $G_m \equiv 3\Big/\frac{m}{2}\;\; 3\Big/\frac{m}{4}\;\; 1\Big/\frac{m-4}{4}\;\; \frac{m-4}{2}\Big/1$ » $m=2n$ $(m=12\,,16\,,\ldots,12+4k)$.

[23]) Essi sono i gruppi:

1.° $G_m \equiv 1\Big/\frac{2m+1}{3}\;\; 5\Big/\frac{m-1}{3}\;\; \frac{2m-5}{3}\Big/1$ per $m=\frac{3n-1}{2}$ $(m=10,13,\ldots,10+3k)$.

2.° $G_m \equiv 1\Big/\frac{2m-1}{3}\;\; 3\Big/\frac{m+1}{3}\;\; 2\Big/\frac{m-2}{3}\;\; \frac{2m-7}{3}\Big/1$ » $m=\frac{3n+1}{2}$ $(m=11,14,\ldots,11+3k)$.

3.° $G_m \equiv 3\Big/\frac{m-1}{2}\;\; 1\Big/\frac{m+5}{4}\;\; 3\Big/\frac{m+1}{4}\;\; \frac{m-7}{2}\Big/1$ » $m=2n-3$ $(m=11,15,\ldots,11+4k)$.

4.° $G_m \equiv 2\Big/\frac{m}{2}\;\; 1\Big/\frac{m-2}{2}\;\; 1\Big/\frac{m+4}{4}\;\; 3\Big/\frac{m}{4}\;\; \frac{m-6}{2}\Big/1$ » $m=2n-2$ $(m=12,16,\ldots,12+4k)$.

5.° $G_m \equiv 1\Big/\frac{m+1}{2}\;\; 2\Big/\frac{m-1}{2}\;\; 1\Big/\frac{m+3}{4}\;\; 3\Big/\frac{m-1}{4}\;\; \frac{m-5}{2}\Big/1$ » $m=2n-1$ $(m=13,17,\ldots,13+4k)$.

6.° $G_m \equiv 3\Big/\frac{m}{2}\;\; 1\Big/\frac{m+2}{4}\;\; 3\Big/\frac{m-2}{4}\;\; \frac{m-4}{2}\Big/1$ » $m=2n$ $(m=14\,,18\,,\ldots,14+4k)$.

all'ordine n del gruppo di origine, sono le **111, 110, 100, 000** per $n=4$, la **200** per $n=5$, la $\frac{n}{2}$00 per $n=6$, la $\frac{n+1}{2}$00 per $n=7$.

Corrispondentemente *si hanno i gruppi* $G^{(1)}$

$\Gamma_5 \equiv 6/2$, $\Gamma_6 \equiv 2/3\ \ 4/2\ \ 1/1$, $\Gamma_7 \equiv 1/4\ \ 2/3\ \ 3/2\ \ 2/1$,
$\Gamma_8 \equiv 3/4\ \ 3/2\ \ 3/1$, $\Gamma_8 \equiv 1/5\ \ 3/3\ \ 2/2\ \ 3/1$, $\Gamma_9 \equiv 1/6\ \ 4/3\ \ 1/2\ \ 4/1$,
$\Gamma_{10} \equiv 1/7\ \ 5/3\ \ 5/1$,

in ciascuno dei quali l'ordine è inferiore di una unità al numero dei termini.

Analogamente, fra le terne innanzi indicate, quelle nelle quali la somma $s+\mu+2$ è eguale all'ordine n del gruppo di origine, sono le **111, 110, 100, 000** per $n=5$, la **200** per $n=6$, la $\frac{n-1}{2}$00 per $n=7$, la $\frac{n}{2}$00 per $n=8$, la $\frac{n+1}{2}$00 per $n=9$.

Corrispondentemente *si hanno i gruppi* $G^{(1)}$

$\Gamma'_7 \equiv 4/3\ \ 3/2$, $\Gamma'_8 \equiv 2/4\ \ 2/3\ \ 3/2\ \ 1/1$, $\Gamma'_9 \equiv 1/5\ \ 2/4\ \ 1/3\ \ 3/2\ \ 2/1$,
$\Gamma'_{10} \equiv 3/5\ \ 1/3\ \ 3/2\ \ 3/1$, $\Gamma'_{10} \equiv 1/6\ \ 3/4\ \ 3/2\ \ 3/1$, $\Gamma'_8 \equiv 1/4\ \ 5/3\ \ 2/1$,
$\Gamma'_9 \equiv 1/5\ \ 1/4\ \ 4/3\ \ 3/1$, $\Gamma'_{10} \equiv 1/6\ \ 2/4\ \ 3/3\ \ 4/1$, $\Gamma'_{11} \equiv 1/7\ \ 3/4\ \ 2/3\ \ 5/1$,
$\Gamma'_{12} \equiv 1/8\ \ 4/4\ \ 1/3\ \ 6/1$, $\Gamma'_{13} \equiv 1/9\ \ 5/4\ \ 7/1$,

in ciascuno dei quali l'ordine è eguale al numero dei termini.

Infine, se si determinano le terne di derivazione dei singoli gruppi Γ_ν già ottenuti, pei quali è $\delta_1 = -1$, si riconosce agevolmente che fra le dette terne quelle nelle quali la somma $s' + \mu' + 1$ è eguale all'ordine ν del gruppo di origine, è la $(\nu - 3\ 00)$ per ciascuno dei gruppi Γ, escluso soltanto il gruppo $\Gamma_8 \equiv 3/4\ \ 3/2\ \ 3/1$.

Corrispondentemente *si hanno i gruppi* $G^{(2)}$

$\Gamma'_8 \equiv 1/5\ \ 2/3\ \ 5/2$, $\Gamma'_9 \equiv 1/6\ \ 3/3\ \ 4/2\ \ 1/1$, $\Gamma'_{10} \equiv 1/7\ \ 4/3\ \ 3/2\ \ 2/1$,
$\Gamma'_{11} \equiv 1/8\ \ 5/3\ \ 2/2\ \ 3/1$, $\Gamma'_{12} \equiv 1/9\ \ 6/3\ \ 1/2\ \ 4/1$, $\Gamma'_{13} \equiv 1/10\ \ 7/3\ \ 5/1$,

nei quali l'ordine è eguale al numero dei termini.

Ora se si escludono i gruppi Γ, Γ' e quelli della serie isologica e delle serie Σ_2, Σ'_2 o delle loro *associate* formate rispettivamente dai gruppi

$$G_n \equiv 3\Big/\frac{n}{2}\ \ 1\Big/\frac{n-2}{2}\ \ n-2/1 \ , \quad G_n \equiv 1\Big/\frac{n+1}{2}\ \ 3\Big/\frac{n-1}{2}\ \ n-2/1 \ ,$$

si ha che in qualsiasi altro gruppo G_x l'ordine è maggiore del numero dei termini. Perciò :

In un gruppo cremoniano geometrico l'ordine $\mathfrak{n}$ *è sempre superiore al numero* $\mathfrak{p}$ *dei termini, esclusi soltanto:*

i gruppi isologici, nei quali è $\mathfrak{p} - \mathfrak{n} = \mathfrak{n} - 1$,
i gruppi delle due serie di indice 2 *e delle loro associate, pei quali è* $\mathfrak{p} - \mathfrak{n} = 2$,
i gruppi Γ, *pei quali è* $\mathfrak{p} - \mathfrak{n} = 1$,
i gruppi Γ', *pei quali è* $\mathfrak{p} = \mathfrak{n}$.

Ne segue che: *Un gruppo cremoniano geometrico di ordine* n *con* p *termini è necessariamente isologico, se la differenza* p — n *è maggiore di* 2; *o appartiene necessariamente ad una serie di indice* 2 *o alla serie associata, se la differenza* p — n *è eguale a* 2.

Inoltre si ha che: *Fra i gruppi geometrici che presentano un dato numero* p *di termini, quelli di ordine minimo sono:*

se p *è dispari e* >1, *il gruppo isologico di ordine* $n = \frac{p+1}{2}$;

se p *è pari e* >4, *i gruppi*

$$G_n \equiv 1/n-2 \quad n-2/2 \quad 3/1 \quad , \quad G_n \equiv 3\Big/\frac{n}{2} \quad 1\Big/\frac{n-2}{2} \quad n-2/1$$

di ordine $n = p - 2$.

Se p *è dispari e* >3, *i gruppi non isologici con* p *termini di ordine minimo sono i gruppi*

$$G_n \equiv 1/n-2 \quad n-2/2 \quad 3/1 \quad , \quad G_n \equiv 1\Big/\frac{n+1}{2} \quad 3\Big/\frac{n-1}{2} \quad n-2/1 ,$$

per $n = p - 2$.

18. I gruppi cremoniani geometrici di ordine n si presentano, ciascuno una sola volta, fra i gruppi discendenti da quelli degli ordini $\left[\frac{n+1}{2}\right], \left[\frac{n+1}{2}\right]+1, \ldots, n-1$, epperò risultano completamente determinati quando siano state costruite le terne di derivazione in tutti i gruppi $G_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}, \ldots, G_{n-1}$. Anzi questa costruzione può essere arrestata ai gruppi di ordine $n-2$, perchè i soli gruppi di ordine n che discendono da quelli di ordine $n-1$, sono il gruppo isologico ed eventualmente il simmetrico, i cui tipi sono noti.

Sia proposto, ad esempio, di determinare i gruppi geometrici di 6° ordine.

Basterà tener presente il quadro che qui appresso è trascritto, nel quale sono segnate le terne di derivazione dei gruppi discendenti da quelli degli ordini 1, 2, 3, 4; e di fianco al simbolo di ogni terna è scritto come indice l'ordine del corrispondente gruppo.

1.° $G_1 \equiv p/0$

$$(000)_2 .$$

2.° $G_2 \equiv 3/1$ *discendente dal* 1°.

$$(100)_3 \quad , \quad (000)_4 .$$

3.° $G_3 \equiv 1/2 \quad 4/1$ *discendente dal* 2°.

$$(200)_4 \quad , \quad (100)_5 \quad , \quad (000)_6 .$$

4.° $G_4 \equiv 1/3 \quad 6/1$ *discendente dal* 3°.

$$(300)_5 \quad , \quad (100)_7 \quad , \quad (000)_8 .$$

5.° $G_5 \equiv 3/2\ \ 3/1$ *discendente dal* 2°.

$$(111)_5\ ,\ (200)_6\ ,\ (110)_6\ ,\ (100)_7\ ,\ (000)_8\ .$$

Le terne che in questo quadro hanno per indice il numero 6, sono la 000 del 3° gruppo e le 200, 110 del 5°.

Corrispondentemente i gruppi geometrici di 6° ordine sono l'isologico ed i gruppi

$$G_6 \equiv 3/3\ \ 1/2\ \ 4/1\ ,\ G_6 \equiv 1/4\ \ 4/2\ \ 3/1\ ,\ G_6 \equiv 2/3\ \ 4/2\ \ 1/1$$

che discendono l'uno dal 3° e gli altri due dal 5°, dovuti rispettivamente alle terne indicate 000 , 200 , 100.

Così per determinare i gruppi geometrici di 7° ordine, basta estendere il *quadro di derivazione* ai gruppi di 5° ordine (§ 11) con la seguente aggiunzione:

6.° $G_5 \equiv 1/4\ \ 8/1$ *discendente dal* 4°.

$$(400)_6\ ,\ (100)_9\ ,\ (000)_{10}\ .$$

7.° $G_5 \equiv 1/3\ \ 3/2\ \ 3/1$ *discendente dal* 3°.

$$(300)_7\ ,\ (111)_7\ ,\ (200)_8\ ,\ (110)_8\ ,\ (100)_9\ ,\ (000)_{10}\ .$$

8.° $G_5 \equiv 6/2$ *discendente dal* 5°.

$$(200)_8\ ,\ (000)_{10}\ .$$

E così di seguito.

Per uniformità di procedimento i gruppi di un medesimo ordine si disporranno sempre con una medesima legge di successione, e propriamente fra due gruppi $G_n \equiv r_1 \dots r_\mu$, $G'_n \equiv r'_1 \dots r'_{\mu'}$ si darà sempre la preferenza al primo se è $r_1 > r'_1$ o se, essendo $r_1 = r'_1 , r_2 = r'_2 , \dots r_i = r'_i$ è $r_{i+1} > r'_{i+1}$ (per $i \geqq 1$).

Con ciò se si segnano successivamente i gruppi di ordine $1 , 2 , \dots , n-1 , n , \dots$, nella serie che ne risulta, ad ogni gruppo G_n spetterà un posto ben determinato ed un corrispondente numero di ordine.

La costruzione effettiva col metodo ora indicato di tutti i gruppi geometrici di un dato ordine n è stata fatta per $n = 14$ e 15 dal Dott. A. Tummarello [24]) (anno 1908), per $n = 16 , 17 , 18 , \dots 23$ dal Dott. Marrazzo [25]).

---

[24]) I gruppi non ottenuti dalla sig.ra Larice sono

i gruppi di 14.° ordine

23.° 1/8 1/6 1/5 3/4 2/3 1/2 35.° 2/7 1/6 3/4 3/2 1/1 46.° 4/6 2/4 2/3 1/1 ,

ed i gruppi di 15.° ordine

25.° 1/9 9/6 1/5 5/4 2/1 41.° 1/8 1/7 4/5 2/2 3/1 42.° 1/8 1/7 3/5 1/4 2/3 2/1
43.° 1/8 1/7 3/5 4/3 44.° 1/8 1/7 2/5 3/4 1/3 1/2 51.° 3/7 1/5 3/4 4/1
52.° 3/7 1/5 1/4 4/3 57.° 2/7 4/5 1/4 1/3 1/1 60.° 6/6 1/2 4/1 ,

nei quali i numeri progressivi si riferiscono all'ordinamento indicato nel testo.

[25]) Tesi di laurea (anno scolastico 1909-1910).

Speciale importanza hanno i gruppi geometrici che presentano meno di 9 termini. Di tali gruppi ve ne è uno solo di 17° ordine ed è il simmetrico: tutti gli altri sono di ordine minore (§ 4).

I gruppi in quistione formano un *sistema chiuso*, nel senso che ogni gruppo del sistema ha per origine un gruppo del sistema stesso. Ciò permette di costruirli con grande facilità.

Basta partire dal gruppo di 2° ordine e dai suoi discendenti. Per ciascuno di questi ultimi gruppi che abbia p termini, si assumeranno tutte le terne di derivazione nelle quali il numero degli zeri non è superiore ad $8-p$, e si costruiranno i relativi gruppi discendenti. Per ognuno di questi gruppi si terrà lo stesso procemento, e così di seguito sino a che sarà possibile.

I gruppi che ne risultano sono i seguenti: [26])

$p \leqq 6$	$G_2 \equiv 3/1$,	$G_3 \equiv 1/2\ 4/1$,	$G_4 \equiv 3/2\ 3/1$,
		$G_8 \equiv 6/2$,	
$p=7$	$G_4 \equiv 1/3\ 6/1$,	$G_5 \equiv 1/3\ 3/2\ 3/1$,	$G_6 \equiv 2/3\ 4/2\ 1/1$,
	$G_7 \equiv 4/3\ 3/2$,	$G_8 \equiv 7/3$,	
$p=8$	$G_6 \equiv 1/4\ 4/2\ 3/1$,	$G_6 \equiv 3/3\ 1/2\ 4/1$,	$G_7 \equiv 1/4\ 2/3\ 3/2\ 2/1$,
	$G_8 \equiv 2/4\ 2/3\ 3/2\ 1/1$,	$G_8 \equiv 1/5\ 2/3\ 5/2$,	$G_8 \equiv 1/4\ 5/3\ 2/1$,
	$G_9 \equiv 4/4\ 4/2$;	$G_9 \equiv 1/5\ 1/4\ 3/3\ 3/2$,	$G_9 \equiv 3/4\ 3/3\ 1/2\ 1/1$,
	$G_{10} \equiv 1/5\ 3/4\ 2/3\ 2/2$,	$G_{10} \equiv 1/6\ 7/3$,	$G_{10} \equiv 2/5\ 5/3\ 1/2$,
	$G_{10} \equiv 5/4\ 2/3\ 1/1$,	$G_{11} \equiv 1/6\ 3/4\ 4/3$,	$G_{11} \equiv 2/5\ 3/4\ 2/3\ 1/2$,
	$G_{12} \equiv 4/5\ 1/4\ 3/3$,	$G_{12} \equiv 3/5\ 4/4\ 1/2$,	$G_{12} \equiv 1/6\ 1/5\ 4/4\ 2/3$,
	$G_{13} \equiv 2/6\ 6/4$,	$G_{13} \equiv 1/6\ 3/5\ 3/4\ 1/3$,	$G_{14} \equiv 2/6\ 3/5\ 3/4$,
	$G_{14} \equiv 1/6\ 6/5\ 1/3$,	$G_{15} \equiv 3/6\ 4/5\ 1/4$,	$G_{16} \equiv 5/6\ 3/5$,
		$G_{17} \equiv 8/6$.	

Sino ad $n=23$ si presenta un solo gruppo asimmetrico, ed è il gruppo

$$G_{23} \equiv 12\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2$$

già ottenuto nell'ultimo § della Memoria su le reti omaloidiche.

Questo è dunque il *gruppo asimmetrico di ordine minimo* [27]).

19. In qualche caso per designare un gruppo G_n^x che abbia per origine il

---

[26]) Cfr. Kantor, Mem. cit., pag. 19.

[27]) Fra i gruppi di ordine 23 vi è il seguente:

$$G_{23} \equiv 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4 .$$

Una sua terna di derivazione è la 654, ed il gruppo discendente dovuto a tale terna è *il gruppo*

$$G_{31} \equiv 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6$$

costituito da 9 numeri susseguenti.

Vari altri gruppi asimmetrici si trovano nei quadri di Kantor nella Memoria già citata.

gruppo $G_{n'}^{(x-1)}$ e sia dovuto alla terna $(\alpha_{x-1}\beta_{x-1}\gamma_{x-1})$, può riuscire utile il simbolo

$$G_n^{(x)} = G_{n'}^{(x-1)}(\alpha_{x-1}\beta_{x-1}\gamma_{x-1}) ,$$

analogo a quello di Clifford usato da Cayley (Not. cit., § 69 e seguenti).

Con ciò, se

$$G_{n'}^{(x-1)} = G_{n''}^{(x-2)}(\alpha_{x-2}\beta_{x-2}\gamma_{x-2}) ,$$

si potrà anche scrivere

$$G_n = G_{n''}^{(x-2)}(\alpha_{x-2}\beta_{x-2}\gamma_{x-2})(\alpha_{x-1}\beta_{x-1}\gamma_{x-1}) .$$

Così procedendo, si avrà

$$G_n = G_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\ldots(\alpha_{x-1}\beta_{x-1}\gamma_{x-1}) ,$$

nel quale è $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$, e in forma più compendiosa si potrà scrivere

$$G_n^{(x)} = G_1(000)\prod_2^{x-1}(\alpha_i\beta_i\gamma_i) . \qquad 1)$$

Questo simbolo indica chiaramente quali siano i gruppi $G_1, G_2, G^{(3)}, \ldots G^{(x-1)}$ che nella serie di origine di G_n, computata da G_1, precedono G_n [28]).

Il numero $x-1$ si dirà *grado di discendenza* di G_n.

Evidentemente è

$$n = 2^{x-1} - \sum_{i=2}^{i=x-1} 2^{x-1-i}(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) ,$$

ed il numero dei termini del gruppo G_n *è eguale al numero degli zeri che si presentano nel simbolo* 1).

20. In un gruppo geometrico G_n si fissi ad arbitrio un termine $r \geqq 0$, e si indichino con r' i rimanenti termini del gruppo. Si ponga $\varepsilon = n - r$ e si considerino i gruppi

$$\begin{aligned}
G_n(r\,00) &= G_{n+\varepsilon} \equiv r+\varepsilon\ , 2/\varepsilon\ , r' ;\\
G_{n+\varepsilon}(r+\varepsilon\,00) &= G_{n+2\varepsilon} \equiv r+2\varepsilon\ , 4/\varepsilon\ , r' ;\\
G_{n+2\varepsilon}(r+2\varepsilon\,00) &= G_{n+3\varepsilon} \equiv r+3\varepsilon\ , 6/\varepsilon\ , r' ;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

tutti d'indice ε.

La serie discendente che ne risulta, sarà detta *uniforme di indice* ε; e si dirà che la serie è *dovuta* al gruppo G_n ed al termine r di tale gruppo.

---

[28]) Ad esempio, i simboli dei gruppi asimmetrici G_{23}, G_{31} sono i seguenti:

$$G_{23} = G_1(000)(100)(100)(100)(210)(421) ,$$

$$G_{31} = G_1(000)(000)(100)(210)(321)(432)(654) .$$

Il suo gruppo generico è espresso dal simbolo

$$G_{n+k\varepsilon} = G_n \prod_{h=0}^{h=k-1} (r + h\varepsilon\, 00) \equiv r + k\varepsilon \,,\, 2k/\varepsilon \,,\, r' \,.$$

Ogni gruppo geometrico $G_\nu \equiv \nu - \varepsilon \,,\, h\,\varepsilon \,,\, r'$ di modulo 2 o 3 appartiene ad *una* siffatta serie Σ dovuta al gruppo $G_n \equiv n - \varepsilon \,,\, r'$ di ordine $n = \nu - \frac{h}{2}\varepsilon$, se h è pari, o al gruppo $G_n \equiv n - \varepsilon \,,\, \varepsilon \,,\, r'$ di ordine $n = \nu - \frac{h-1}{2}\varepsilon$, se h è dispari.

Le serie uniformi di indice 1 o 2 sono rispettivamente la serie isologica Σ_1 e le serie $\Sigma_2 \,,\, \Sigma'_2$ del § 17. Esse sono dovute rispettivamente ai gruppi $G_1 \,,\, G_2 \,,\, G_3$ ed ai termini $0 \,,\, 0 \,,\, 1$ di tali gruppi, sicchè i gruppi generici delle tre serie sono espressi rispettivamente dai simboli

$$G_1 \prod_{h=0}^{h=k-1} (h\, 00) \,, \qquad G_2 \prod_{h=0}^{h=k-1} (2h + 2\, 00) \,, \qquad G_3 \prod_{h=0}^{h=k-1} (2h + 1\, 00).$$

Nel gruppo $G_{n+k\varepsilon} \equiv r + k\varepsilon \,,\, 2k/\varepsilon \,,\, r'$ di una qualunque serie uniforme i primi due termini $r + k\varepsilon \,,\, \varepsilon$ dànno somma eguale all'ordine. Perciò nel gruppo non esiste alcuna terna di derivazione speciale che comprenda l'uno o l'altro dei detti due termini, epperò ogni terna di derivazione speciale, se esiste nel gruppo, è formata da tre numeri r' di cui i primi due dànno somma minore o eguale ad ε.

Ciò vale qualunque sia il numero k, epperò si ha che:

Tutti i gruppi di una serie uniforme hanno le stesse terne di derivazione speciali.

Lo stesso può dirsi delle terne di derivazioni ordinarie, se per ogni gruppo $G_{n+k\varepsilon}$ si esclude la terna $(r + k\varepsilon\, 00)$ che è quella relativa al gruppo susseguente della serie.

Ora occorre notare che fra i gruppi discendenti da un gruppo dato $G_n \equiv r_1 \ldots r_p$, ha *ordine minimo* quello dovuto alla terna di derivazione $r_1 00$, se il gruppo G_n non presenta terne di derivazione speciali, o se ciascuna di queste terne è costituita da numeri che dànno somma minore di r_1.

In base a questa osservazione, è agevole riconoscere che se i gruppi della serie Σ non hanno terne di derivazione speciali, ciascuno di essi a partire dal secondo è il gruppo di ordine minimo fra quelli che discendono dal precedente, cioè la Σ è una *serie minima* dovuta al gruppo $G_{n+\varepsilon}$; mentre nel caso che i gruppi della serie hanno terne di derivazione speciali, la Σ sarà una *serie minima* a partire dal primo gruppo $G_{n+k\varepsilon}$ nel quale il primo termine $r + k\varepsilon$ supera la somma dei numeri di ogni terna di derivazione speciale.

Di fianco a queste *serie minime* si ha la *serie massima* dovuta ad un qualsiasi gruppo geometrico G_n, costituita dai gruppi

$$G_n \equiv r \;;\; G_n(000) = G_{2n} \equiv 3/n \,,\, r \;;\; G_{2n}(000) = G_{4n} \equiv 3/2n \,,\, 3/n \,,\, r \;;\; \ldots$$

di cui ciascuno, a partire dal secondo, è il gruppo di ordine massimo fra quelli che discendono dal precedente.

Il gruppo generico della serie è espresso dal simbolo

$$G_n(000)^k = G_{2^k n} \equiv 3/2^{k-1}n\,,\; 3/2^{k-2}n\,,\; \ldots\; 3/n\,,\; r\,.$$ [29]

Maggiore importanza hanno alcune serie discendenti costituite ognuna da gruppi di cui ciascuno a partire dal secondo ha per terna di derivazione la terna degli ultimi tre numeri >0 del gruppo precedente.

Tali sono, ad esempio, la serie formata dai gruppi

$$G_8 \equiv 3/4\;\; 3/2\;\; 3/1\,, \qquad G_{13} \equiv 3/6\;\; 3/4\;\; 3/2\,, \qquad G_{20} \equiv 3/9\;\; 3/6\;\; 3/4\,,$$
$$G_{28} \equiv 3/12\;\; 3/9\;\; 3/6\,, \qquad G_{38} \equiv 3/16\;\; 3/12\;\; 3/9\,, \qquad G_{49} \equiv 3/20\;\; 3/16\;\; 3/12\,, \ldots$$ [30]

e la serie costituita dai gruppi

$$\begin{array}{l} G_{31} \equiv 14\;\, 13\;\, 12\;\, 11\;\, 10\;\, 9\;\, 8\;\, 7\;\, 6 \\ G_{41} \equiv 18\;\, 17\;\, 16\;\, 14\;\, 13\;\, 12\;\, 11\;\, 10\;\, 9 \\ G_{52} \equiv 22\;\, 21\;\, 20\;\, 18\;\, 17\;\, 16\;\, 14\;\, 13\;\, 12 \\ G_{65} \equiv 27\;\, 26\;\, 25\;\, 22\;\, 21\;\, 20\;\, 18\;\, 17\;\, 16 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Quest'ultima, che ha per *origine* il gruppo asimmetrico G_{31} del § 18, è specialmente notevole pel fatto che tutti i suoi gruppi sono asimmetrici. [31]

Una qualunque delle serie ultimamente indicate è costituita da gruppi che hanno tutti lo stesso numero di termini; ed i due esempi addotti mostrano che *esistono gruppi geometrici con 9 termini, di ordine maggiore di un qualunque numero dato.*

21. La proprietà dimostrata nel § precedente che i gruppi discendenti da un qualsiasi gruppo $G^{(x)}$ di una serie uniforme — diversi dal gruppo $G^{(x+1)}$ che nella serie sussegue a $G^{(x)}$ — sono dovuti alle stesse terne di derivazione, rende più semplice il procedimento indicato nel § 18 per determinare i gruppi geometrici di un dato ordine n, perchè riduce notevolmente la ricerca preliminare delle varie terne di derivazione dei gruppi di ordine $\left[\frac{n+1}{2}\right], \ldots n-2$.

Senza scendere in ulteriori dettagli, segneremo qui appresso il *quadro della discendenza* dei gruppi cremoniani geometrici di ordine $1, 2, \ldots 11$.

Ogni gruppo è indicato dal numero che gli compete nell'ordinamento esposto nel § 18, giusta l'elenco che sussegue; e graficamente di ogni gruppo sono indicati i discendenti. [32]

---

[29]) Per $n=1$, la serie è costituita dai gruppi

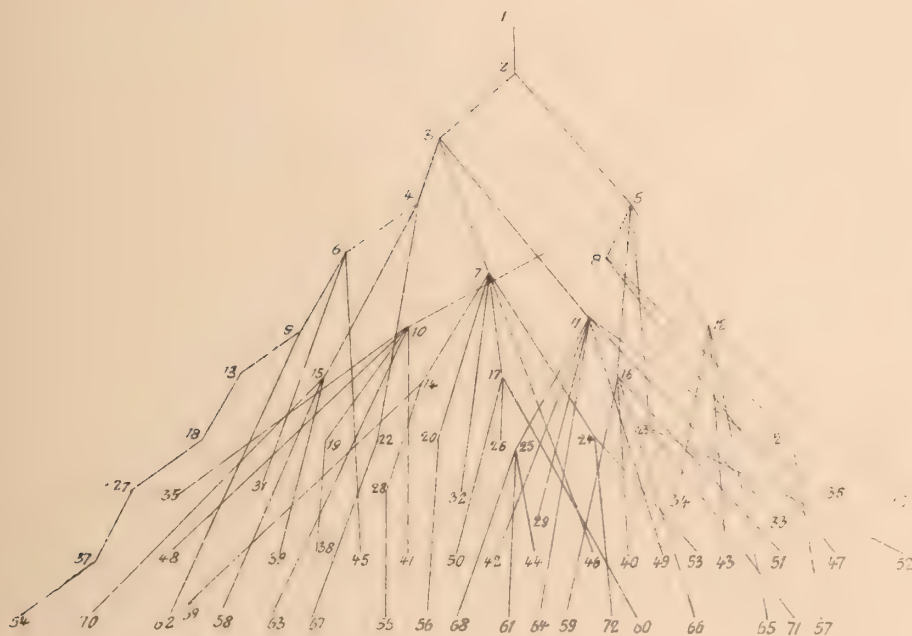
$$G_{2^k} \equiv 3/2^{k-1}\;\; 3/2^{k-2} \ldots 3/1$$

ottenuti per la prima volta da Cayley, Not. cit., § 64 e 65.

[30]) Cfr. Kantor, 2ª Memoria cit., pag. 30, quadro II.

[31]) Altre serie analoghe alla precedente si ottengono partendo da un qualsiasi gruppo $G_{2^k} \equiv 3/2^{k-1}\;\; 3/2^{k-2} \ldots 3/2\;\; 3/1$, o da uno qualunque dei gruppi $G_{10} \equiv 3/5\;\; 6/2$, $G_{16} \equiv 3/8\;\; 7/3$, $G_{34} \equiv 3/17\;\; 8/6$ di modulo 3 che discendono dai gruppi simmetrici di ordine >2, ecc.

[32]) Cfr. col diagramma della deducibilità che è nella Memoria su le reti omaloidiche. In tale diagramma sono state omesse le linee P_4P_{15}, P_5P_{16}.

Quadro della discendenza
dei gruppi cremoniani geometrici degli ordini $1, 2, \ldots 11$.

Elenco dei gruppi cremoniani geometrici degli ordini 1, 2, ... 11.

1. $G_1 \equiv p/0$
2. $G_2 \equiv 3/1$
3. $G_3 \equiv 1/2\ 4/1$
4. $G_4 \equiv 1/3\ 6/1$
5. $G_4 \equiv 3/2\ 3/1$
6. $G_5 \equiv 1/4\ 8/1$
7. $G_5 \equiv 1/3\ 3/2\ 3/1$
8. $G_5 \equiv 6/2$
9. $G_6 \equiv 1/5\ 10/1$
10. $G_6 \equiv 1/4\ 4/2\ 3/1$
11. $G_6 \equiv 3/3\ 1/2\ 4/1$
12. $G_6 \equiv 2/3\ 4/2\ 1/1$
13. $G_7 \equiv 1/6\ 12/1$
14. $G_7 \equiv 1/5\ 5/2\ 3/1$
15. $G_7 \equiv 1/4\ 3/3\ 5/1$
16. $G_7 \equiv 1/4\ 2/3\ 3/2\ 2/1$
17. $G_7 \equiv 4/3\ 3/2$
18. $G_8 \equiv 1/7\ 14/1$
19. $G_8 \equiv 1/6\ 6/2\ 3/1$
20. $G_8 \equiv 1/5\ 3/3\ 2/2\ 3/1$
21. $G_8 \equiv 1/5\ 2/3\ 5/2$
22. $G_8 \equiv 3/4\ 1/3\ 6/1$
23. $G_8 \equiv 3/4\ 3/2\ 3/1$
24. $G_8 \equiv 2/4\ 2/3\ 3/2\ 1/1$
25. $G_8 \equiv 1/4\ 5/3\ 2/1$
26. $G_8 \equiv 7/3$
27. $G_9 \equiv 1/8\ 16/1$
28. $G_9 \equiv 1/7\ 7/2\ 3/1$
29. $G_9 \equiv 1/6\ 4/3\ 1/2\ 4/1$
30. $G_9 \equiv 1/6\ 3/3\ 4/2\ 1/1$
31. $G_9 \equiv 1/5\ 3/4\ 7/1$
32. $G_9 \equiv 1/5\ 2/4\ 1/3\ 3/2\ 2/1$
33. $G_9 \equiv 1/5\ 1/4\ 4/3\ 3/1$
34. $G_9 \equiv 1/5\ 1/4\ 3/3\ 3/2$
35. $G_9 \equiv 4/4\ 4/2$
36. $G_9 \equiv 3/4\ 3/3\ 1/2\ 1/1$
37. $G_{10} \equiv 1/9\ 18/1$
38. $G_{10} \equiv 1/8\ 8/2\ 3/1$
39. $G_{10} \equiv 1/7\ 5/3\ 5/1$
40. $G_{10} \equiv 1/7\ 4/3\ 3/2\ 2/1$
41. $G_{10} \equiv 1/6\ 3/4\ 3/2\ 3/1$
42. $G_{10} \equiv 1/6\ 2/4\ 3/3\ 4/1$
43. $G_{10} \equiv 1/6\ 2/4\ 2/3\ 3/2\ 1/1$
44. $G_{10} \equiv 1/6\ 7/3$
45. $G_{10} \equiv 3/5\ 1/4\ 8/1$
46. $G_{10} \equiv 3/5\ 1/3\ 3/2\ 3/1$
47. $G_{10} \equiv 3/5\ 6/2$
48. $G_{10} \equiv 2/5\ 2/4\ 4/2\ 1/1$
49. $G_{10} \equiv 2/5\ 1/4\ 3/3\ 1/2\ 2/1$
50. $G_{10} \equiv 2/5\ 5/3\ 1/2$
51. $G_{10} \equiv 1/5\ 3/4\ 2/3\ 2/2$
52. $G_{10} \equiv 6/4\ 3/1$
53. $G_{10} \equiv 5/4\ 2/3\ 1/1$
54. $G_{11} \equiv 1/10\ 20/1$
55. $G_{11} \equiv 1/9\ 9/2\ 3/1$
56. $G_{11} \equiv 1/8\ 5/3\ 2/2\ 3/1$
57. $G_{11} \equiv 1/8\ 4/3\ 5/2$
58. $G_{11} \equiv 1/7\ 3/4\ 2/3\ 5/1$
59. $G_{11} \equiv 1/7\ 3/4\ 1/3\ 3/2\ 2/1$
60. $G_{11} \equiv 1/7\ 2/4\ 3/3\ 3/2$
61. $G_{11} \equiv 1/7\ 1/4\ 6/3\ 1/1$
62. $G_{11} \equiv 1/6\ 3/5\ 9/1$
63. $G_{11} \equiv 1/6\ 2/5\ 1/4\ 4/2\ 2/1$
64. $G_{11} \equiv 1/6\ 2/5\ 3/3\ 1/2\ 3/1$
65. $G_{11} \equiv 1/6\ 2/5\ 2/3\ 4/2$
66. $G_{11} \equiv 1/6\ 1/5\ 2/4\ 2/3\ 2/2\ 1/1$
67. $G_{11} \equiv 1/6\ 5/4\ 4/1$
68. $G_{11} \equiv 1/6\ 3/4\ 4/3$
69. $G_{11} \equiv 4/5\ 5/2$
70. $G_{11} \equiv 3/5\ 1/4\ 3/3\ 2/1$
71. $G_{11} \equiv 2/5\ 4/4\ 1/2\ 2/1$
72. $G_{11} \equiv 2/5\ 3/4\ 2/3\ 1/2$

Vico Equense, Ottobre 1910.

ERRATA-CORRIGE

		Errata	Corrige
pag. 26	rig. 19, 20	è la $\nu - 300$ per ciascuno dei	sono le terne $\nu - 300$ per i singoli
» 28	» 5 in nota	25.° 1/9 9/6 1/5 5/4 2/1	25.° 1/9 1/6 1/5 5/4 2/1

Vol. XV, Serie 2.ª **N.º 8.**

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

I COMPLESSI BILINEARI DI CONICHE NELLO SPAZIO

MEMORIA

del s. o. **DOMENICO MONTESANO**

presentata nell'adunanza del dì 4 Novembre 1911

Les doctrines de la pure Géométrie offrent souvent, et dans une foule de questions, cette voie simple et naturelle qui, pénétrant jusqu'à l'origine des vérités, met à nu la chaîne mystérieuse qui les unit entre elles, et les fait connaître individuellement, de la manière la plus lumineuse et la plus complète.

CHASLES, Aperçu historique, p. 3.

In una Nota letta nel Congresso internazionale dei Matematici in Roma nell'aprile 1908 *) indicai sommariamente i risultati ottenuti nelle mie ricerche su i complessi bilineari di coniche.

Queste ricerche sono svolte completamente nella presente Memoria. Esse si fondano quasi esclusivamente sulla teoria delle superficie di 3° ordine, al pari delle precedenti mie investigazioni sulle congruenze bilineari di coniche **), di cui queste su i complessi sono un naturale proseguimento.

La presente Memoria è divisa in quattro parti: nella prima studio la genesi del complesso, i suoi enti singolari, la configurazione e le corrispondenze determinate da questi enti, le superficie e le congruenze contenute nel complesso; nella seconda parte mi occupo dei sistemi generatori del complesso ed indico i modi più semplici per determinarlo; nella terza parte esamino il gruppo costituito dai complessi bilineari aventi la stessa superficie fondamentale e studio la notevole configurazione di 120 punti tripli di questa superficie; infine nella quarta parte esamino i vari tipi particolari del complesso dovuti all'acquisto di linee direttrici o di punti singolari.

*) Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici. Volume II, p. 231-233. Roma, 1909.

**) *Su di un sistema lineare di coniche nello spazio.* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXVII, 1892.

Come pei complessi di rette, così in generale per qualsiasi complesso di curve di ordine arbitrario, hanno speciale importanza quelle corrispondenze biunivoche fra le curve del complesso ed i punti dello spazio, nelle quali ogni curva passi pel punto corrispondente.

Nella presente Memoria dimostro che il complesso bilineare di coniche nel caso più generale non è capace dell'anzidetto riferimento.

Invece ho costruito speciali corrispondenze birazionali involutorie nello spazio ligate al complesso in modo che in ciascuna di esse le coppie di punti coniugati si distribuiscono una ad una sulle singole coniche del complesso.

Ho ottenuto con ciò notevoli tipi di corrispondenze birazionali involutorie nello spazio, già da me indicati in precedenti ricerche *).

I procedimenti tenuti in questa Memoria possono estendersi in generale, ai complessi bilineari di curve piane di ordine arbitrario.

Ogni complesso Γ di questo tipo nel caso più generale è collegato ad un complesso di rette K e ad una rappresentazione birazionale e prospettiva del complesso K sullo spazio di punti, nel senso che agli inviluppi di rette del complesso K situati nei singoli piani dello spazio corrispondono nell'anzidetta rappresentazione le curve del complesso Γ situate in quei piani; sicchè la teoria dei complessi bilineari di curve piane non è sostanzialmente diversa dalla teoria delle rappresentazioni biunivoche e prospettive sullo spazio di punti dei complessi di rette capaci di tali rappresentazioni.

Ho già fatto cenno altrove di ciò che è stato scritto da altri su lo stesso argomento della presente Memoria **), e qui come in seguito non ripeterò le osservazioni fatte in proposito.

---

*) Vegg. la mia Nota: *Su la trasformazione involutoria dello spazio che determina un complesso tetraedrale.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. V, aprile 1889.

**) Vegg. la mia Nota: *La théorie des complexes bilinéaires de coniques de l'espace.* Proceedings of Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. 1911.

CAPITOLO PRIMO

§ I.

I complessi Γ, Γ', K.

1. Fissato nello spazio un sistema lineare Σ triplamente infinito di quadriche affatto arbitrario, e data un'omografia Ω fra i piani dello spazio e le quadriche del sistema, resta determinato un complesso di coniche Γ costituito dalle intersezioni degli elementi omologhi nella omografia Ω.

Le coniche del complesso sono una ad una nei singoli piani dello spazio, e quelle che si trovano nei piani di un fascio arbitrario (r) *costituiscono una superficie di 3° ordine* $\varphi_3 \equiv r$ *generata dal fascio* (r) *e dal suo omologo nella* Ω.

Si dirà che la φ_3 è la *superficie del complesso* Γ dovuta alla retta r.

La Ω sarà detta *omografia generatrice del complesso* e si supporrà del tutto arbitraria.

Se in essa ad una stella (O) e ad un fascio (r) di piani corrispondono rispettivamente nel sistema Σ una rete avente per base i punti $O_1, \ldots O_8$ ed un fascio avente per base la curva r_4, si dirà anche che nella Ω al punto O corrispondono i punti $O_1, \ldots O_8$ ed alla retta r la *curva* r_4 *del sistema* Σ.

Con ciò ad ogni punto O_i corrisponde nella inversa della Ω un punto ben determinato O, centro della stella di piani omologa alla rete del sistema Σ formata dalle quadriche che passano pel punto O_i.

Se il punto O descrive una retta r od un piano π, il corrispondente gruppo di punti $O_1, \ldots O_8$ descrive la curva r_4 o la superficie π_2 di Σ che nella Ω corrispondono ad r, π. E viceversa.

Fissato nello spazio un punto generico O, se a questo nella Ω^{-1} corrisponde il punto O_{-1}, la retta $o \equiv O_{-1}O$ ha per corrispondente nella Ω una linea o_4 del sistema Σ che passa per O, sicchè le coniche del complesso situate nei singoli piani del fascio (o) contengono tutte il punto O.

Viceversa se una conica del complesso Γ passa per O, la quadrica π_2 a cui è dovuta, appartiene alla rete del sistema Σ che ha uno dei punti base in O, onde il piano π della c_2, omologo della π_2 nella Ω^{-1}, passa pel punto O_{-1} già indicato epperò contiene la retta $o \equiv OO_{-1}$. Perciò:

Le coniche del complesso Γ *che passano per un punto generico* O *dello spazio, sono nei piani di un fascio* (o).

La superficie $\varphi_3 \equiv o$ luogo di tali coniche si dirà che è *la superficie del complesso* dovuta al punto O. Essa ha in O un punto doppio.

Dalle cose dette segue che il *complesso* Γ *è bilineare*, nel senso che i due *numeri caratteristici* del complesso: numero delle coniche che sono in un piano generico dello spazio, classe del cono inviluppo dei piani delle coniche del complesso che passano per un punto generico dello spazio, sono entrambi eguali ad 1.

La retta o comune ai piani delle coniche del complesso che passano per un

punto O, col variare di questo punto nello spazio descrive un complesso K, che può essere definito come *l'insieme delle rette o che si appoggiano alle corrispondenti curve* o_4 *del sistema* Σ.

E come ad un punto generico O si coordina nel modo ora indicato un solo raggio o del complesso K, così viceversa ad un raggio generico o del complesso K si coordina un solo punto O che è quello in cui la o si appoggia alla curva omologa o_4 del sistema Σ.

Due elementi corrispondenti O, o si appartengono, e però la corrispondenza biunivoca che ne risulta fra lo spazio di punti ed il complesso K, è *prospettiva.*

Due elementi omologhi O, o si diranno anche *coordinati* fra di loro, e così ogni linea od ogni superficie luogo di punti O e la rigata o la congruenza dei corrispondenti raggi o del complesso K si diranno *coordinate* fra di loro.

Con ciò si può riconoscere innanzi tutto che: *In un piano generico* ω *dello spazio la conica* c_2 *del complesso* Γ *e l'inviluppo dei raggi del complesso* K *sono coordinati fra di loro.*

Infatti ad un punto O della c_2 si coordina un raggio o del complesso K che appartiene a tutti i piani sostegni delle coniche del complesso Γ uscenti dal punto O ed in particolare al piano ω.

E viceversa ad un raggio o del complesso K che sia nel piano ω, si coordina un punto O che appartiene a tutte le coniche del complesso Γ situate nei piani del fascio (o) ed in particolare alla c_2, donde il teorema.

2. Due superficie φ_3, φ'_3 del complesso Γ dovute a due rette incidenti r, r' hanno in comune la conica c_2 del complesso situata nel piano $\pi \equiv rr'$ ed una curva gobba o_7 di genere 5, che passa pel punto $O \equiv rr'$ e si appoggia in 6 punti alla c_2.

Un punto P della o_7 si trova su due coniche del complesso situate rispettivamente nei piani $\rho \equiv Pr, \rho' \equiv Pr'$; onde il raggio p del complesso K coordinato al punto P è la retta $PO \equiv \rho\rho'$.

Ne segue che se si assume un'altra retta r'' della stella (O), la conica del complesso situata nel piano Pr'', passa per P, il che equivale a dire che la superficie φ''_3 del complesso Γ dovuta alla r'' passa anche essa per la linea o_7.

Perciò la superficie del complesso Γ dovuta ad una retta arbitraria r'' del fascio $(O - \omega)$ coincide con la superficie del fascio $\varphi_3\varphi'_3$ che passa per la r'', e si ha il teorema che:

Le superficie del complesso Γ *dovute alle rette di un fascio* $(O - \omega)$ *costituiscono un fascio* $(c_2 o_7)$.

Se poi la retta r varia nella stella (O), la corrispondente superficie φ_3 varia in una rete che ha per base la linea o_7, in modo che ogni fascio di tale rete ha per base variabile una conica $c_2 \equiv o^6_7$ del complesso situata in un piano π della stella (O), e viceversa.

Si presenta in tale modo la congruenza delle coniche del complesso situate nei piani della stella (O). Questa congruenza *bilineare*, che ha per direttrice la o_7, è generata dalla stella di piani (O) e dalla rete omologa del sistema Σ *).

---

*) In generale date due reti omografiche di superficie degli ordini n_1, n_2 rispettivamente, le superficie generate dai fasci omologhi delle due reti costituiscono anche esse una rete, la quale

Ad ogni punto P della o_7 è coordinato il raggio $p \equiv OP$ del complesso K. Viceversa se p è un raggio del complesso K uscente dal punto O ed è P il punto coordinato a tale raggio, per questo punto passano ∞^1 coniche della congruenza formata dalle coniche del complesso Γ situate nei piani della stella (O), perciò il punto P appartiene alla linea direttrice della congruenza.

Dunque *il cono del complesso* K *che ha per vertice un punto generico* O *dello spazio, è coordinato alla curva direttrice* o_7 *della congruenza bilineare formata dalle coniche del complesso* Γ *situate nei piani uscenti dal punto* O.

Questo cono si ottiene perciò proiettando la o_7 dal punto O, epperò risulta di 6° ordine. Dunque *il complesso* K *è di 6° grado.*

Ogni punto O determina nel modo indicato una curva o_7 tale che un qualunque piano che passi pel punto O sega la curva oltre che in O, in 6 punti della conica del complesso Γ situata in quel piano.

Si dirà che la o_7 è dovuta al punto O, *polo* della curva.

Ogni punto P della o_7 è proiettato dal polo O secondo il raggio coordinato al punto P. Perciò *la tangente in* O *alla* o_7 *è il raggio del complesso* K *coordinato al punto* O.

Variando il punto O nello spazio, la curva o_7 descrive un complesso Γ'.

Le relazioni che intercedono fra il complesso K ed i complessi Γ, Γ', sono espresse dalle proposizioni già stabilite che:

all'inviluppo dei raggi del complesso K *situati in un piano arbitrario* ω, *si coordina la conica* c_2 *del complesso* Γ *che è nel piano* ω.

al cono di raggi del complesso K *che ha per vertice un punto arbitrario* O, *si coordina la linea* o_7 *del complesso* Γ' *che ha per polo il punto* O.

Da queste proposizioni si deducono le altre che: *La superficie coordinata alla congruenza dei raggi del complesso* K *appoggiati ad una retta generica* r *dello spazio*

è il luogo delle coniche c_2 *del complesso* Γ *situate nei piani del fascio* (r).

è il luogo delle curve o_7 *del complesso* Γ' *che hanno per poli i punti della* r.

Essa per la proposizione a sinistra è la superficie φ_3 dovuta alla r, sicchè a tale superficie compete anche la definizione espressa dalla proposizione a destra.

Se la retta r coincide con un raggio o del complesso K coordinato al punto O, la corrispondente superficie $\varphi_3 \equiv O^2$ risulta essere il luogo delle linee dell'uno o dell'altro complesso uscenti dal punto O.

Ne segue che *due punti* O, O' *situati su di una medesima conica del complesso* Γ *sono del pari su di una medesima curva del complesso* Γ', *e viceversa.*

Ciò in sostanza dipende dal fatto che *due punti situati su una medesima linea di uno qualunque dei complessi* Γ, Γ' *sono coordinati a due raggi incidenti del complesso* K, *e viceversa.*

E si può senz'altro affermare che: *Se una conica* c_2 *del complesso* Γ *ed una curva* o_7 *del complesso* Γ' *hanno più di un punto in comune, il piano* ω *della prima linea passa per il polo* O *della seconda, sicchè le due linee si segano in tutto in 6 punti.*

---

ammette una curva base di ordine $n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2$. (Cfr. Cremona, *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre.* Giornale di Crelle, tom. 68, 1868, n.° 22).

La congruenza lineare costituita dalle curve sezioni delle superficie omologhe delle reti date coincide con la congruenza formata dalle linee basi variabili dei fasci della terza rete.

La congruenza ha per linea direttrice la curva di ordine $n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2$ innanzi detta.

§ II

La congruenza Δ.

3. *Il complesso Γ presenta un sistema doppiamente infinito di coniche degeneri, situate nei piani dello spazio che nell'omografia Ω generatrice del complesso risultano tangenti alle corrispondenti quadriche del sistema Σ.*

Una retta c che faccia parte della conica degenere cc' del complesso Γ, è asse di un fascio di piani, a cui nell'omografia Ω corrisponde un fascio di quadriche (c_4) che fra le altre comprende la superficie $\pi_2 \equiv cc'$ omologa del piano $\pi \equiv cc'$, onde la linea c_4 base del fascio si appoggia alla c in due punti O_1, O_2, a ciascuno dei quali si coordina la retta c (n.° 1), sicchè questa è *raggio doppio* del complesso K.

Viceversa un raggio doppio c del complesso K deve incontrare la linea c_4, che gli corrisponde nella Ω, in due punti O_1, O_2, onde nel fascio (c_4) esiste una quadrica π_2 che contiene la c; e nel piano π omologo della π_2 nella Ω^{-1} la conica del complesso Γ si spezza in due rette di cui una è la c.

Ciò in sostanza equivale a dire che la superficie del complesso Γ dovuta alla c ha i punti doppi O_1, O_2, onde *una* delle sue coniche si scinde nella retta $c \equiv O_1O_2$ e nella retta c' ulteriore sezione della superficie col piano tangente lungo la retta c.

Tanto le coniche del complesso Γ che sono nei piano del fascio (c), come le linee del complesso Γ' che hanno i poli sulla c, passano tutte per i punti O_1, O_2, onde la coppia O_1O_2 è *singolare* per ciascuno dei complessi Γ, Γ', se si stabilisce di chiamare *singolare* per un complesso di curve nello spazio ogni coppia di punti che appartenga ad ∞^1 linee del sistema.

I complessi Γ, Γ' non hanno altre coppie singolari oltre quelle dovute ai raggi doppi del complesso K. Perciò:

La congruenza delle rette che formano coniche degeneri del complesso Γ, coincide con la congruenza dei raggi doppi del complesso K, ed è costituita dalle congiungenti le coppie di punti singolari dei complessi Γ, Γ'.

Questa congruenza sarà designata costantemente col simbolo Δ.

Per un punto generico O dello spazio passano 5 raggi della Δ.

Ed in vero la superficie $\varphi_3 \equiv O^2$ dovuta al punto O contiene 6 rette uscenti da O. Una di esse è il raggio o coordinato al punto O; le altre 5 sono le rette indicate nel teorema.

Esse sono i raggi della stella (O) che incontrano in altri due punti la curva o_7 dovuta al punto O.

In un piano generico dello spazio vi sono 10 raggi della congruenza Δ.

Infatti l'inviluppo dei raggi del complesso K situati in un piano ω è razionale al pari della linea coordinata c_2, e però ammette 10 raggi doppi. Essi sono i raggi indicati nel teorema.

Dunque *la congruenza Δ è di 5° ordine e di 10ª classe.*

La congruenza Δ contiene la rigata $\vartheta_{15} \equiv o_7^5$ formata dalle trisecanti di una qualsiasi linea o_7 del complesso Γ'.

Ed in vero nel piano ω che dal polo O della o_7 proietta una generatrice arbitraria t della ϑ_{15}, la conica del complesso Γ si spezza nella t ed in una seconda generatrice t' della ϑ_{15}, e però ne segue il teorema.

Col variare della generatrice t sulla ϑ_{15}, il piano $\omega \equiv tt'$ inviluppa un cono χ_5 di 5ª classe e di genere 6 — che è la sviluppabile bitangente della ϑ_{15} — ed il punto $D \equiv tt'$ descrive una curva di 10° ordine e di genere 6, che è la linea doppia della ϑ_{15} *).

Tutto ciò che si è detto, vale per un punto generico O dello spazio.

§ III.

I punti fondamentali dei complessi Γ, Γ', K.

4. Dalla proprietà già dimostrata che le superficie φ_3 del complesso Γ dovute alle rette di un fascio $(O - \omega)$ costituiscono un fascio Φ_O segue che le superficie del complesso dovute alle rette r di un piano ω costituiscono una rete R_ω omografica al sistema delle rette r.

La conica c_2 del complesso Γ situata nel piano ω è linea base della R_ω, ed in questa ogni fascio Φ_O ha per base variabile la curva $o_7 \equiv c^6_7$ dovuta al punto O.

Una siffatta curva o_7 sega una superficie arbitraria φ_3 della rete, che non appartenga al fascio Φ_O, oltre che nei 6 punti di appoggio alla c_2, nei punti base *isolati* della rete R_ω.

Si hanno con ciò 15 punti $U_1, \ldots U_{15}$, di cui uno qualsiasi U_i trovandosi su ogni superficie φ_3 dovuta ad una qualunque retta r del piano ω, appartiene ad ogni conica c_2 del complesso Γ situata in un piano $\rho \equiv U_i r$ della stella (U_i).

Viceversa se un punto X appartiene a tutte le coniche del complesso Γ che sono nei piani della stella (X), esso si troverà su tutte le superficie φ_3 del complesso Γ e però anche su tutte le curve c_7 del complesso Γ', sicchè sarà un punto base isolato di ogni rete R_ω.

Dunque: *Esistono 15 punti eccezionali* $U_1, \ldots U_{15}$ *comuni a tutte le superficie* φ_3 *del complesso* Γ *ed a tutte le curve* c_7 *del complesso* Γ'. *Nei piani che escono da un punto eccezionale* U_i, *le coniche del complesso* Γ *passano tutte per tale punto.*

Tutto ciò che si è detto, vale sempre nell'ipotesi che il sistema Σ e l'omografia generatrice del complesso Γ siano affatto arbitrari.

In questa ipotesi si ha pure che i punti $U_1, \ldots U_{15}$ risultano a due a due distinti fra di loro.

Al punto U_i riguardato appartenente ad una qualunque linea c_7 del complesso Γ' è coordinato nel complesso K il raggio che l'unisce al polo O della c_7.

Per l'arbitrarietà di questo punto si ha che:

Il complesso K *contiene le 15 stelle di raggi* $(U_1), \ldots (U_{15})$. *Ciascuna di queste stelle è coordinata al proprio centro.*

I punti $U_1, \ldots U_{15}$ si diranno *fondamentali* per ognuno dei tre complessi Γ, Γ', K.

---

*) *Su di un sistema lineare di coniche,* § 2, 3.

Essi sono i punti uniti nella corrispondenza $\left|\begin{matrix} O \\ O_1 \dots O_8 \end{matrix}\right|$ del n.° 1 *), sicchè le superficie del complesso Γ dovute alle rette della stella (U_i) sono monoidi col vertice in U_i aventi in comune una curva $o_7^{(i)}$ che in U_i ha un punto triplo **) e passa semplicemente per gli altri 14 punti fondamentali.

Questa è la curva del complesso Γ' che ha per polo il punto U_i, diguisachè in un piano ω uscente da U_i la conica c_2 del complesso Γ passa per U_i e per gli altri quattro punti di sezione con la curva $o_7^{(i)}$.

Se il piano ω contiene una trisecante t della $o_7^{(i)}$, la conica c_2 degenera in tale trisecante e nella retta g che da U_i proietta l'ultimo punto di sezione del piano con la curva, e viceversa; vale a dire che la rigata ϑ_{15} del caso generale si spezza nella superficie $\vartheta_{11} \equiv U_i^6 o_7^{(i)4}$ luogo delle trisecanti della $o_7^{(i)}$ e nel cono ϑ_4 che proietta la $o_7^{(i)}$ dal punto U_i. Le $\vartheta_{11}, \vartheta_4$ sono riferite fra di loro con corrispondenza biunivoca in modo che due generatrici omologhe g, g' costituiscono una conica degenere del complesso Γ in un piano ω della stella (U_i).

I piani $\omega \equiv gg'$ inviluppano il cono χ_5 di genere 3 che proietta da U_i la ϑ_{11}.

Il cono ϑ_4, al pari della rigata ϑ_{11}, appartiene alla congruenza Δ. Esso contiene le 14 rette che da U_i proiettano i restanti punti fondamentali.

Ad ogni generatrice del cono ϑ_4 si coordinano il punto U_i ed il punto di appoggio alla curva $o_7^{(i)}$.

In particolare alla retta che unisce i punti fondamentali U_i, U_l, si coordinano questi due punti, mentre ad una qualunque delle tre rette t_1, t_2, t_3 tangenti in U_i alla $o_7^{(i)}$ si coordinano il punto U_i ed il suo infinitamente prossimo sulla retta.

Quest'ultima proprietà equivale all'altra che nei piani dei tre fasci $(t_1), (t_2), (t_3)$ le coniche del complesso Γ risultano tangenti rispettivamente alle t_1, t_2, t_3 nel punto U_i.

Perciò la conica del complesso Γ che è nel piano di due qualunque dei tre raggi t_1, t_2, t_3, dovendo essere tangente in U_i a questi raggi, si spezza in due rette concorrenti in U_i.

In sostanza i raggi t_1, t_2, t_3 ed i piani che essi determinano a due a due, sono uniti nell'omografia che intercede fra i piani π della stella (U_i) ed i piani π' tangenti in U_i alle quadriche π_2 del sistema Σ omologhi ai piani π nella omografia generatrice del complesso, sicchè ognuno dei tre piani t_2t_3, t_3t_1, t_1t_2 risulta tangente in U_i alla quadrica omologa del sistema Σ, e però è sostegno di una conica degenere xx' del complesso Γ formata da rette concorrenti in U_i.

Le x, x' appartengono tanto al cono ϑ_4 come alla rigata ϑ_{11}, ed ognuna di esse corrisponde all'altra nella corrispondenza già indicata che intercede fra le due superficie. Perciò il piano xx' è doppio pel cono inviluppo χ_5 generato da tale corrispondenza; questo cono cioè presenta tre piani doppi nelle facce del trispigolo $t_1t_2t_3$.

Le superficie $\vartheta_4, \vartheta_{11}$, oltre alla $o_7^{(i)}$ ed alle tre coppie di rette xx', hanno in comune una curva $c_{10} \equiv U_i^6$, luogo dei punti doppi delle coniche degeneri gg' innanzi dette.

---

*) In generale dati due sistemi lineari triplamente infiniti di superficie rispettivamente degli ordini n_1, n_2, esistono $(n_1 + n_2)(n_1^2 + n_2^2)$ punti di cui ciascuno fa parte dei gruppi base di due reti omologhe dei due sistemi. (Cremona, Mem. cit., n.° 34).

**) *Su di un sistema lineare di coniche*, § 15.

CAPITOLO SECONDO

§ IV.

La superficie fondamentale dei complessi Γ, Γ', K.

5. La superficie σ inviluppata dai piani sostegni delle coniche degeneri del complesso Γ, sarà detta *superficie fondamentale del complesso.*

I piani tangenti alla σ che passano per una retta r dello spazio, sono i piani del fascio (r) tritangenti alla superficie φ_3 del complesso Γ dovuta alla retta r, se questa non appartiene al complesso K, o sono i piani che la r determina con le altre 5 rette della superficie $\varphi_3 \equiv O^2$ che escono dal punto O coordinato alla r, se questa è un raggio del complesso K. In entrambi i casi il numero dei piani in quistione è 5: epperò:

La superficie fondamentale σ è di classe 5.

Il cono circoscritto alla σ, che ha per vertice un punto generico O dello spazio, è il cono χ_5 indicato nel n.° 3.

Questo cono inviluppo non presenta alcun piano doppio, epperò *la superficie σ può avere soltanto un numero finito di piani tangenti doppi.*

Se il punto O coincide con un punto fondamentale U_i, il cono inviluppo χ_5 acquista i tre piani doppi t_2t_3, t_3t_1, t_1t_2, sicchè questi piani risultano tangenti alla σ nel punto U_i, il quale perciò è *triplo* per la superficie.

Ciò in sostanza dipende dal fatto che la superficie $\varphi_3 \equiv U_i^2$ del complesso Γ dovuta ad una retta uscente da U_i e situata in una faccia τ dell'angolo trispigolo $t_1t_2t_3$, contiene la conica xx' di tale piano (n.° 4); e però dei 5 piani che la r determina con le altre rette della φ_3 che escono dal punto U_i, due coincidono nel piano τ, vale a dire che dei 5 piani tangenti alla σ che passano per una qualunque retta del fascio $(U_i - \tau)$, due coincidono sempre col piano τ, epperò questo piano è tangente in U_i alla σ.

6. I cinque piani tritangenti di una superficie di 3° ordine che passano per una retta *ordinaria* r della superficie, sono fra loro distinti, se la superficie non presenta alcun punto doppio fuori della retta r; mentre nel caso che un siffatto punto D esista, due o tre dei cinque piani indicati coincidono nel piano $\delta \equiv r$D, secondochè il punto doppio D è conico o biplanare *).

---

*) Rappresentando la superficie su di un piano in modo che le immagini delle sezioni piane siano curve $c_3 \equiv P_1 \ldots P_6$ e l'immagine della retta r sia la $c_1 \equiv P_1P_2$, le cinque coppie di rette cc' della superficie situate in piani del fascio (r) sono rappresentate rispettivamente dalle coppie di lati opposti del quadrangolo completo $P_3P_4P_5P_6$, dal punto P_1 e dalla $c_2 \equiv P_1P_3P_4P_5P_6$, dal punto P_2 e dalla $c_2 \equiv P_2P_3P_4P_5P_6$.

Se la superficie presenta un punto doppio conico avente per immagine la $c_2 \equiv P_1 \ldots P_6$, le ultime due coppie cc' coincidono in un'unica rappresentata dai punti P_1, P_2; e così se la superficie presenta un punto doppio biplanare avente per immagine le $c_1 \equiv P_1P_3P_4$, $c_1 \equiv P_2P_5P_6$ la

Ciò posto, si assuma ad arbitrio un piano tangente della superficie fondamentale, e sia il piano ω sostegno della conica degenere cc' del complesso Γ.

Le superficie $\varphi_3 \equiv cc'$ del complesso dovute alle singole rette del piano ω risultano tangenti a questo piano nel punto $D \equiv cc'$, e però nella rete R_ω costituita da siffatte superficie esiste un fascio Φ_O di monoidi aventi il vertice nel punto D.

La curva o_7 base di questo fascio passa con due rami pel punto D, incontra ancora in due punti ciascuna delle rette c, c', e sega ulteriormente il piano ω nel proprio polo O.

Le superficie $\varphi_3 \equiv D^2$ del fascio Φ_O sono dovute alle singole rette del fascio $(O - \omega)$; e siccome per ciascuna di queste rette due dei 5 piani tritangenti alla corrispondente superficie $\varphi_3 \equiv D^2$, o, ciò che è lo stesso, due dei 5 piani tangenti alla superficie σ coincidono in ω, così il piano ω è tangente alle σ nel punto O.

Viceversa se un punto O è polo di una curva o_7 dotata di un punto doppio D, le superficie $\varphi_3 \equiv o_7$ del complesso Γ dovute alle rette della stella (O) hanno lo stesso piano tangente nel punto D, sicchè nella rete costituita da siffatte superficie vi è un fascio Φ_ω di monoidi aventi per vertice il punto D.

Essi hanno ulteriormente in comune le due rette c, c' che escono dal punto D e si appoggiano in altri due punti alla o_7; sicchè queste rette formano la conica del complesso Γ nel piano ω della stella (O), sostegno delle rette della stella a cui sono dovuti i monoidi in esame.

E giacchè per ciascuna di tali rette due dei 5 piani tritangenti al corrispondente monoide coincidono nel piano ω, perciò il punto O è il punto di contatto della superficie σ col piano ω.

Dunque: *La superficie fondamentale del complesso Γ è il luogo dei poli delle curve del complesso Γ' dotate di punto doppio.*

---

coppia rappresentata dai punti P_1, P_2 conta per tre fra le cinque coppie cc' del caso generale. Ciò giustifica quanto si è detto sopra. Cfr. anche Cayley, *A Memoir on cubic surfaces* (Philosophical Transactions of the R. Society of London, vol. CLIX) diagrammi II = 12 — C_2 (pag. 256) e III = 12 — B_3 (pag. 263).

Se la φ_3 presenta due punti doppi distinti rappresentati rispettivamente dalle rette $c_1 \equiv P_1P_3P_4$, $c_1 \equiv P_1P_5P_6$, il piano δ tangente alla superficie lungo la retta $d \equiv D_1D_2$ conta sempre per due fra i piani tritangenti che passano per la retta r ulteriore sezione della superficie col piano.

Questa retta r è rappresentata dalla $c_1 \equiv P_1P_2$, e le tre coppie di rette cc' della superficie che sono nei piani tritangenti del fascio (r) diversi da δ, hanno per immagini le $c_1 \equiv P_3P_5$, $c_1 \equiv P_4P_6$; $c_1 \equiv P_3P_6$, $c_1 \equiv P_4P_5$; il punto P_2 e la $c_2 \equiv P_2P_3P_4P_5P_6$. Cfr. Cayley, Mem. cit., diagramma IV = 12 — $2C_2$ (pag. 269).

Invece se i punti doppi D, D' della superficie coincidono sulla retta d in unico punto O rappresentato dalla retta $c_1 \equiv P_1P_3P_4$, nel qual caso i punti P_5, P_6 risultano infinitamente prossimi ai punti P_3, P_4 su rette ben determinate t, t' rispettivamente, il piano δ tangente alla φ_3 lungo la d conta per *tre* fra i piani tritangenti che passano per la retta r ulteriore sezione della superficie col piano.

Questa retta r è sempre rappresentata dalla $c_1 \equiv P_1P_2$, e le due coppie di rette cc' che sono negli altri due piani tritangenti del fascio (r) sono rappresentate rispettivamente dalle $t \equiv P_3P_5$, $t' \equiv P_4P_6$, dal punto P_2 e dalla $c_2 \equiv P_2P_3P_4P_5P_6$. Cfr. Cayley, Mem. cit., diagramma V=12—B_4 (pag. 275).

È bene inteso che per ragion di brevità un piano che contenga tre rette r, c, c' di una superficie di 3° ordine si dirà *tritangente* anche nel caso che il punto $D \equiv cc'$ sia doppio per la superficie.

Perciò questa superficie si dirà *fondamentale* anche pel complesso Γ'.

Inoltre dal ragionamento fatto segue anche che:

Un punto arbitrario O *della superficie fondamentale ed il piano* ω *tangente nel punto* O *alla superficie godono la proprietà che la conica* cc' *del complesso* Γ *situata nel piano* ω *e la curva* o_7 *del complesso* Γ' *che ha il polo nel punto* O, *hanno lo stesso punto doppio* D.

Le due curve si diranno fra loro *associate*.

Se la o_7 è tangente nel punto D alle rette u, u', i monoidi del fascio Φ_ω che nel punto D hanno un punto doppio biplanare e che non contengono la retta $d \equiv DO$, sono quelli che nel punto D risultano tangenti l'uno ai piani $cu, c'u'$, l'altro ai piani $cu', c'u$.

Essi sono dovuti alle due rette t, t' del fascio $(O - \omega)$ per ciascuna delle quali tre piani tangenti alla superficie fondamentale coincidono nel piano ω.

Le rette t, t' coincidono soltanto nel caso che le u, u' o le c, c' coincidono fra di loro.

7. I raggi del complesso K che giacciono nel piano $\omega \equiv cc'$, costituiscono due inviluppi j, j' coordinati rispettivamente alle rette c, c'. Per un punto generico P del piano ω passano tre raggi di ciascuno dei due inviluppi, e sono quelli che proiettano le terne dei punti di appoggio delle c, c' alla curva o_7 del complesso Γ' che ha il polo nel punto P; perciò i due inviluppi j, j' sono entrambi di 3ª classe.

Essi hanno rispettivamente per raggi doppi le c, c' ed, oltre al raggio $d \equiv DO$ coordinato al punto D, hanno in comune altri 8 raggi che con le c, c' formano il gruppo dei 10 raggi della congruenza Δ situati nel piano ω

Il raggio d è doppio tanto per l'inviluppo $(j_3 j'_3)$ del complesso K situato in ω, come pel cono del complesso di vertice O, che è il cono proiettante da O la $o_7 \equiv D^2$, e però il punto O ed il piano ω sono rispettivamente punto e piano tangente della superficie singolare del complesso K, e la retta d è il raggio singolare del complesso K dovuto agli elementi O, ω.

Le proprietà inverse sono senz'altro evidenti, sicchè può affermarsi che:

La superficie singolare del complesso K *coincide con la superficie fondamentale dei complessi* Γ, Γ'.

§ V.

Le coniche del complesso Γ formate da rette coincidenti.

8. I piani dello spazio che nell'omografia generatrice del complesso Γ hanno per omologhi i coni del sistema Σ, inviluppano una superficie di 4ª classe χ_4.

I piani tangenti comuni a questa superficie χ_4 ed alla superficie fondamentale σ_5 godono la proprietà che ciascuno di essi contiene il vertice del cono del sistema Σ che gli corrisponde nella omografia anzidetta, epperò fra tali piani ve ne sono alcuni, in numero finito, che segano i coni omologhi secondo coppie di generatrici coincidenti.

Perciò: *Il complesso* Γ *presenta un numero finito di coniche formate ciascuna da rette coincidenti.*

Ora, se in un piano δ la conica del complesso Γ è costituita dalla retta d con-

tata due volte, ogni superficie φ_3 del complesso dovuta ad una qualunque retta r di δ risulta tangente al piano δ lungo la d, e però presenta due punti doppi D_1, D_2 sulla d; sicchè nel fascio (r) due piani tritangenti alla superficie φ_3 coincidono in δ.

Facendo variare la retta r nel piano δ, non può accadere che uno qualunque dei punti doppi D_1, D_2 della φ_3 resti fisso, non può accadere cioè che la rete R_δ descritta dalla φ_3 abbia un punto base *doppio* D sulla *d*. Perchè, se così fosse, due punti fondamentali U del complesso Γ coinciderebbero in D, il che non è.

Perciò, assunto ad arbitrio un punto D sulla d, si ha che le superficie della rete R_δ che hanno in D un punto doppio, costituiscono un fascio Φ^*_D, che può supporsi abbia per base la conica degenere *formata da rette uscenti da* D, sicchè questa conica pensata nel modo ora detto si associa alla curva $c_7 \equiv D^2$ del complesso Γ', ulteriore base del fascio Φ^*_D.

Il polo O di questa curva c_7 col variare del punto D sulla d, descrive nel piano δ una conica o_2. Ed in vero ogni retta r del piano contiene due punti O, poli delle curve basi $o_7 \equiv D_1^2$, $o_7 \equiv D_2^2$ dei due fasci Φ^*_1, Φ^*_2 che contengono la superficie $\varphi_3 \equiv (D_1 D_2)^2$ dovuta alla r.

Se la r è tangente alla conica o_2, i punti doppi D_1, D_2 della φ_3 coincidono, e però nel fascio (r) tre piani tritangenti alla φ_3 coincidono in δ *).

Perciò il piano δ è un piano tangente doppio della superficie fondamentale, e la conica o_2 ne è la linea di contatto.

Inversamente in un piano tangente doppio δ della superficie fondamentale la conica dd' del complesso Γ è costituita da rette coincidenti. Infatti per ogni retta r del piano δ due piani tritangenti della corrispondente superficie φ_3 del complesso Γ debbono coincidere in δ; e però se le d, d' fossero distinte, la superficie φ_3 avrebbe un punto doppio nel punto $D \equiv dd'$, sicchè la rete R_δ avrebbe un punto base doppio in D, e due punti fondamentali U coinciderebbero in D il che non è. Dunque:

Le coniche del complesso Γ *formate da rette coincidenti sono nei piani tangenti doppi della superficie fondamentale.*

Per calcolare il numero di queste coniche occorre determinare l'ordine della superficie fondamentale. A ciò valgono i ragionamenti che seguono.

9. Le curve o_7 del complesso Γ' che hanno i poli su di una retta arbitraria r dello spazio, costituiscono un fascio sulla superficie φ_3 dovuta alla r (n.° 2).

Ogni curva o_7 forma la base di un fascio di 3° ordine che comprende la φ_3, con ogni conica di questa superficie situata in un piano del fascio (r).

Perciò la o_7 si appoggia alla r soltanto nel polo, ha per trisecante ogni retta della φ_3 appoggiata alla r e per corda ogni retta della superficie sghemba con la r.

Ed in una rappresentazione piana della superficie φ_3, nella quale le sezioni piane abbiano per immagini curve $c_3 \equiv P_1 \dots P_6$ e la retta r sia rappresentata dal punto P_6, le immagini delle curve o_7 sono linee

$$c'_6 \equiv (P_1 \dots P_5)^2 P_6 U'_1 \dots U'_{15} ,$$

di un fascio Φ', nel quale i punti base U' sono immagini dei punti fondamentali U.

---

*) Veggasi la nota a pag. 10.

In ognuno dei punti $P_1, \ldots P_5$ le tangenti alle c'_6 variano da curva a curva, e però il numero delle linee del fascio Φ' che presentano un punto doppio fuori del gruppo base, è

$$3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 7 = 40 \text{ *)} .$$

Corrispondentemente si ha che *sulla retta* r *esistono 40 punti poli di linee* c_7 *dotate di punto doppio.*

Questi sono i punti di sezione della r con la superficie σ (n.° 6); e però:

La superficie fondamentale σ *è di ordine 40.*

Siccome la σ è di classe 5 e presenta soltanto un numero finito di piani tangenti doppi ordinari, perciò il numero di tali piani è

$$\frac{5 \cdot 4^2 - 40}{2} = 20 .$$

Dunque: *Nel complesso* Γ *esistono 20 coniche costituite ciascuna da due rette coincidenti.*

Un cono circoscritto alla superficie fondamentale nel caso più generale è di ordine 20. Ne segue che una sezione piana generica della superficie è di ordine 40 e di classe 20, e però presenta $\frac{40 \cdot 39 - 20}{2} = 770$ punti doppi.

Questo numero è l'ordine della curva doppia della superficie, della curva cioè *luogo dei poli delle curve* o_7 *del complesso* Γ' *dotate di due punti doppi.*

La curva passa con tre rami per ogni punto triplo della superficie.

§ VI.

I punti tripli U_{ii} della superficie fondamentale.

10. Data nello spazio una linea x di ordine n, la quale passi pei punti fondamentali U_i con r_i rami, per $r_i \geqq 0$ ed $i = 1, \ldots 15$, la rigata ξ del complesso K che oltre alle stelle (U_i) è coordinata alla linea x, risulta di grado $3n - \Sigma r_i$.

Infatti i raggi della ξ che si appoggiano ad una retta generica r dello spazio, sono quelli coordinati ai punti di sezione, diversi da $U_1, \ldots U_{15}$, della linea x con la superficie φ_3 del complesso Γ dovuta alla retta r (n.° 2), onde il loro numero è $3n - \Sigma r_i$.

Il genere della ξ è eguale a quello della linea x.

In un piano ω che contenga una generatrice arbitraria p della ξ, la conica c_2 del complesso Γ si appoggia alla x nel punto $P \equiv px$ coordinato alla p, e viceversa; cioè *la superficie* ξ *è l'inviluppo dei piani sostegni delle coniche del complesso* Γ *appoggiate alla linea* x.

Un punto O di una generatrice arbitraria p della ξ è polo di una curva o_7 del complesso Γ', che si appoggia alla linea x nel punto $P \equiv px$ coordinato alla p, e viceversa; cioè *la superficie* ξ *è il luogo dei poli delle curve* o_7 *del complesso* Γ' *appoggiate alla linea* x.

*) Cremona, *Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane.* Annali di Matematica, tomo VI, 1864, p. 156.

Ogni piano che contenga due (o tre) generatrici della rigata ξ, è sostegno di una conica del complesso Γ che si appoggia in due (o in tre) punti alla linea x, e viceversa.

E così ogni piano che contenga due generatrici infinitamente prossime della ξ, è sostegno di una conica del complesso Γ tangente alla linea x, e viceversa.

La rigata ξ riducesi ad un inviluppo piano soltanto se la x è una conica del complesso Γ o se fa parte di una siffatta conica, se cioè è un raggio della Δ.

Ogni punto comune a due (o a tre) generatrici della rigata ξ è polo di una curva del complesso Γ' che si appoggia in due (o in tre) punti alla linea x, e viceversa.

E così ogni punto dal quale escono due generatrici infinitamente prossime della ξ, è polo di una curva del complesso Γ' tangente alla linea x, e viceversa.

La rigata ξ riducesi ad un cono soltanto nel caso che la x sia una curva del complesso Γ' o faccia parte di una siffatta curva.

11. Dai ragionamenti fatti si deduce innanzi tutto che: *Ad una retta* x *che contenga* ν *punti fondamentali, per* $\nu = 0, 1, 2$, *è coordinata nel complesso* K *una rigata* ξ *di grado* $3 - \nu$, *la quale riducesi ad un inviluppo piano di raggi soltanto nel caso che la retta* x *appartenga alla congruenza* Δ, *nel qual caso la* ξ *appartiene al piano della conica degenere del complesso* Γ *che comprende la* x.

Perciò al raggio u_{il} della congruenza Δ che unisce i punti fondamentali U_i, U_l, si coordina un fascio di raggi del complesso K situato nel piano della conica degenere $u_{il} u'_{il}$ di Γ.

Il centro U_{il} di questo fascio è polo di una curva del complesso Γ' che comprende la retta u_{il}, e però si spezza in tale retta ed in una curva gobba c_6 di 6° ordine e di genere 3, che si appoggia alla u_{il} in tre punti *). Questi sono doppi per la curva completa, e però il punto U_{il} è triplo per la superficie fondamentale.

Nella rete di 3° ordine che ha per base le u_{il}, c_6, i monoidi che hanno il vertice in un punto $D \equiv u_{il} c_6$, hanno ulteriormente in comune i due raggi della stella (D) che si appoggiano in altri due punti alla c_6. Si hanno con ciò tre coppie di siffatti raggi. Essi costituiscono le coniche del complesso Γ associate alla $(u_{il} c_6)$ e però appartengono ai piani tangenti in U_{il} alla superficie σ.

Nel complesso Γ' non esistono altre curve degeneri oltre le $(u_{il} c_6)$, perchè ogni altro caso di spezzamento è incompatibile con le ipotesi fatte sull'arbitrarietà del sistema Σ e dell'omografia generatrice del complesso Γ.

E può affermarsi che: *La superficie fondamentale presenta 105 punti tripli* U_{il} *associati alle rette* $U_i U_l$ *che uniscono a due a due i punti fondamentali, in modo che alla punteggiata* $(U_i U_l)$ *è coordinato nel complesso* K *il fascio che la proietta dal corrispondente punto* U_{il}.

*) Vegg. la mia Memoria: *Su i vari tipi di congruenze lineari di coniche nello spazio* (Rendiconti di questa Accademia. Serie 3ª, vol. 1°, 1895, pag. 156).

È noto che i punti U_{il} e le trisecanti u_{il} di una curva gobba c_6 di 6° ordine e di genere 3 si corrispondono biunivocamente in modo che ogni conica c_2 che contenga 5 punti della curva, incontra la trisecante u_{il} coordinata all'ultimo punto di sezione della curva col piano ω della c_2, sicchè tenendo fisso questo punto U_{il} e facendo variare attorno ad esso il piano ω, la conica c_2 descrive una congruenza bilineare, che oltre alla c_6 ha per direttrice la trisecante u_{il} coordinata al punto U_{il}.

Questa notevole corrispondenza fu indicata per la prima volta da Sturm (*Synthetische Untersuchungen ueber Flächen dritter Ordnung*. Leipzig, 1867, pag. 232).

CAPITOLO TERZO

§ VII.

Le rigate del complesso K coordinate alle rette dello spazio.

12. Ad una retta x che non appartenga ad alcuna stella fondamentale (U_i), è coordinata nel complesso K una rigata ξ_3 di 3° grado (n.° 11).

Se la x non fa parte della congruenza Δ, ogni piano ω del fascio (x) contiene due generatrici g_1, g_2 della ξ_3, coordinate ai punti P_1, P_2 della x situati sulla conica c_2 del complesso Γ che è in ω.

Col variare del piano ω nel fascio (x), la conica c_2 descrive la superficie φ_3 dovuta alla retta x, e però la coppia P_1P_2 descrive un'involuzione I_x ordinaria o degenere secondochè la x è fuori del complesso K o appartiene al complesso.

Corrispondentemente la seconda direttrice rettilinea y della ξ_3 nel primo caso è distinta dalla x, mentre nel secondo caso è infinitamente prossima a tale retta. In entrambi i casi le due superficie ξ_3, φ_3 in ogni punto P_1 della x risultano tangenti allo stesso piano $\omega \equiv xg_1 \equiv xc_2$, e però nel secondo caso le rette x, y coincidono sulla φ_3, la quale perciò può anche riguardarsi come dovuta alla seconda delle due rette.

Ora anche nel primo caso la superficie $\varphi_3{}^*$ del complesso Γ dovuta alla retta y passa per la x, giacchè in generale *una linea* x *giace sulla superficie* $\varphi_3{}^*$ *del complesso* Γ *dovuta ad una retta* y, *se la rigata del complesso* K *coordinata alla* x *ha per direttrice la* y *), *e viceversa* (n.° 2).

Perciò: *per una retta generica* x *dello spazio passano soltanto due superficie* φ_3 *del complesso* Γ, *dovute rispettivamente alla* x *ed alla seconda direttrice* y *della rigata coordinata alla* x.

Con ciò viene ad aversi una corrispondenza Θ fra le rette dello spazio, nella quale due rette omologhe x, y, in generale, sono in queste condizioni: la retta y è direttrice, diversa dalla x, della rigata ξ_3 del complesso K coordinata alla x; e viceversa la x è una retta, sghemba con la y, della superficie $\varphi_3{}^*$ del complesso Γ dovuta alla y.

Perciò nella Θ^{-1} ad una retta generica y corrispondono 16 rette x.

E se alla retta generica y si sostituisce un raggio y del complesso K coordinato al punto O, al posto del gruppo $(x_1 \dots x_{16})$ formato da rette sghembe con la y, si presenta sulla $\varphi_3{}^* \equiv O^2$ il gruppo formato dalla retta x infinitamente prossima alla y, dalle 5 rette $x_1, \dots x_5$ che incontrano la y nel punto doppio O della superficie, e dalle rette $x_{1.2}, \dots x_{4.5}$ sghembe con la y; cioè nel caso in esame 5 raggi omologhi della y nella Θ^{-1} risultano incidenti alla y.

Essi appartengono alla congruenza Δ, nè hanno altro legame con la retta y

---

*) È bene inteso che per *direttrice* di una rigata si intende una retta che incontri tutti i raggi della rigata.

fuorchè l'incontro nel punto O coordinato a tale retta, il che prova che ad un raggio qualunque x_i della Δ sono omologhi nella Θ i raggi y coordinati ai singoli punti O della x_i. Questi raggi y formano un inviluppo piano $j_3 \equiv x_i^2$ (n.° 7).

Ad un raggio generico x di una stella fondamentale (U_i) è coordinata una schiera rigata ξ, e però al raggio x corrisponde nella Θ tutta la schiera rigata ξ' opposta alla ξ.

Se la x è una generatrice arbitraria del cono $\mathfrak{I}_4$ di vertice U_i della congruenza Δ, la ξ si riduce ad un inviluppo piano di 2ª classe, e la schiera opposta ξ', omologa della x nella Θ, coincide con la ξ.

Infine, se la retta x unisce due punti fondamentali U_i, U_l — nel qual caso il corrispondente inviluppo ξ si spezza nei fasci (U_l), (U_{il}) del piano $U_iU_lU_{il}$ — oltre ai raggi di questi due fasci la x ha per omologhe nella Θ tutte le rette della stella (U_{il}), giacchè la superficie φ^*_3 del complesso Γ dovuta ad una qualunque di tali rette passa per la x (n.° 11).

La corrispondenza Θ non presenta altre rette eccezionali oltre quelle della congruenza Δ e delle stelle fondamentali.

E dai ragionamenti fatti si conclude che: *Il sistema delle rette* x *che incontrano le omologhe nella corrispondenza* Θ, *è la congruenza* Δ. *Il sistema delle rette* y *che incontrano le omologhe nella* Θ^{-1}, *è il complesso* K. *Il sistema delle rette unite della corrispondenza è il complesso* K.

§ VIII.

Relazioni di tangenza fra le curve dei complessi Γ, Γ' e le rette dello spazio.

13. Data ad arbitrio nello spazio una retta x che non appartenga al complesso K, la retta y omologa della x nella corrispondenza Θ è il luogo dei poli delle curve o_7 del complesso Γ' che hanno per corda la x (n.° 10). E propriamente se una curva o_7 incontra la x nei punti P_1, P_2, questi si trovano su di una medesima conica c_2 del complesso Γ; e la o_7 ha il polo nel punto di sezione del piano della c_2 con la y, nel qual punto concorrono le generatrici coordinate ai punti P_1, P_2 della rigata ξ_3 coordinata alla x. E viceversa.

Dal fatto che le coppie P_1P_2 costituiscono un'involuzione I_x non degenere, segue che:

Una retta x *dello spazio che non appartenga al complesso* K, *risulta tangente a due coniche distinte del complesso* Γ *e a due curve distinte del complesso* Γ'. *I punti di contatto delle prime due linee coincidono con i punti di contatto delle ultime due.*

Essi sono i punti doppi E, F dell'involuzione I_x; e propriamente se a questi punti si coordinano le generatrici e, f della ξ_3, le coniche del complesso Γ tangenti alla x sono nei piani xe, xf che toccano la ξ_3 lungo le rette e, f rispettivamente; e le curve del complesso Γ' tangenti alla x hanno i poli nei punti ye, yf che sono i punti doppi cuspidali della ξ_3.

Se la retta x è un raggio generico del complesso K coordinato al punto O, le curve del complesso Γ' che hanno per corda la x, sono tutte e sole quelle che hanno i poli sulla x. Una di esse sega la x nel proprio polo e nel punto O, e

però l'unica curva del complesso Γ' tangente alla x è la curva o_7 che ha il polo nel punto O. Essa tocca la x in questo punto.

Analogamente una conica c_2 del complesso Γ che abbia per corda la x, sega questa retta nel punto fisso O ed in un punto variabile O'. E la rigata ξ_3 coordinata alla x sega il piano π della c_2 nella retta fissa x ed in una generatrice variabile x' coordinata al punto O'.

Perciò esiste una sola conica o_2 del complesso Γ tangente alla x, ed è quella situata nel piano ω, tangente alla superficie ξ_3 lungo la x, che è l'unico piano nel quale le generatrici x, x' della ξ_3 sono infinitamente prossime fra di loro. La conica o_2 tocca la x nel punto O.

Il piano ω che contiene i due raggi infinitamente prossimi x, x' del complesso K concorrenti nel punto O, è tangente lungo la x al cono del complesso di vertice O, e però oscula la curva o_7 nel punto O (n.° 2).

E la x', infinitamente prossima alla x, che nel piano ω sega la x nel punto di contatto con la o_2, è anche essa tangente a questa conica, sicchè può dirsi che: Una conica o_2 del complesso Γ se è tangente ad un raggio x del complesso K, è anche tangente ad un raggio x' dello stesso complesso infinitamente prossimo ad x.

Fissata ad arbitrio la conica o_2, il numero delle coppie xx' è 6, vale a dire che: *Ogni conica non degenere del complesso Γ è tangente a 6 coppie di raggi del complesso* K *costituite ciascuna da raggi infinitamente vicini.*

Un raggio x della congruenza Δ, coordinato a due punti distinti O_1, O_2, è tangente soltanto alla conica degenere xx' del complesso Γ di cui fa parte; ed il punto di contatto è un qualunque suo punto.

Invece per ogni punto Q che si assuma sulla x, resta determinata *una* curva c_7 del complesso Γ', tangente alla x nel punto Q; e la c_7 varia col variare del punto.

Infatti le curve del complesso Γ' che si appoggiano alla retta x, hanno i poli nei singoli punti del piano $\omega \equiv xx'$; e propriamente una qualunque di tali linee che abbia il polo nel punto P del piano ω, incontra la x nei tre punti coordinati ai raggi uscenti da P dell'inviluppo ξ_3 coordinato alla x (n.° 7).

Se si vuole che due di questi punti d'incontro siano due punti dati Q, Q' infinitamente prossimi sulla x, basta assumere per polo il punto di sezione dei raggi q, q' del complesso K coordinati ai due punti, basta cioè assumere per polo il punto di contatto della q con la curva aderente all'inviluppo ξ_3.

Perciò la curva richiesta è unica, e varia col variare del punto Q sulla x.

In particolare le curve del complesso Γ' tangenti alla x nei punti O_1, O_2 rispettivamente, sono le linee del complesso che hanno i poli in questi due punti.

Infine se i due punti O_1, O_2, coordinati al raggio x, sono infinitamente prossimi fra di loro, — e ciò accade per i raggi di una rigata della congruenza Δ — tutte le coniche del complesso Γ situate nei piani del fascio (x), e tutte le curve del complesso Γ' che hanno i poli sulla x, risultano tangenti a questa retta nel punto $O_1 \equiv O_2$.

Inoltre il cono del complesso K che ha per vertice un punto arbitrario P della x, essendo il cono proiettante da P la curva $c_7 \equiv O_1O_2$ che ha il polo in tale punto, ha il raggio doppio stazionario x; e così l'inviluppo dei raggi del complesso K si-

tuati in un piano arbitrario del fascio (x), essendo aderente ad una curva che tocca la x nei punti O_1, O_2, ha il raggio doppio stazionario x.

Le proposizioni inverse sono senz'altro evidenti, e si conclude che i raggi in esame formano la *rigata dei raggi doppi stazionari* del complesso K.

14. Le coniche del complesso Γ e le curve del complesso Γ' che passano per un punto generico O dello spazio, formano rispettivamente due fasci sulla superficie $\varphi_3 \equiv O^2 or_1 \ldots r_5$ dovuta al punto O (n.° 1), e però in questo punto risultano tangenti alle singole generatrici del cono χ_2 tangente in O alla φ_3, che è del tutto determinato dal raggio o coordinato al punto O e dai raggi $r_1, \ldots r_5$ della congruenza Δ uscenti dal punto O.

Più propriamente la conica del complesso Γ che è in un piano arbitrario ν del fascio (o), è tangente nel punto O alla retta t sezione variabile del cono χ_2 col piano ν; come la curva del complesso Γ' che ha il polo in un punto arbitrario N della o, è tangente nel punto O alla generatrice variabile t del cono χ_2 situata nel piano tangente lungo la o al cono del complesso K di vertice N. In questo piano $\nu \equiv ot$ due raggi del complesso K uscenti dal punto N, coincidono in o, sicchè questa retta tocca nel punto N la curva inviluppata dai raggi del complesso K situati nel piano ν.

Con ciò si ha il modo di determinare la conica c_2 del complesso Γ e la curva c_7 del complesso Γ' che nel punto O risultano tangenti ad una generatrice t del cono χ_2 fissata ad arbitrio.

Col variare della t sul cono χ_2, il piano ν della c_2 ed il polo N della c_7 variano corrispondendosi nella proiettività caratteristica dovuta al raggio o del complesso K *).

Se il punto O è doppio per una conica degenere $r_1 r_2$ del complesso Γ, il raggio o giace nel piano $\pi \equiv r_1 r_2$; ed il cono che in O è tangente alla superficie $\varphi_3 \equiv O^2 or_1 \ldots r_5$, si spezza nel piano $\pi \equiv or_1 r_2$ ed in un secondo piano $\pi' \equiv r_3 r_4 r_5$. Questo piano passa anche esso pel raggio o soltanto nel caso che vi sia una seconda conica degenere $r_3 r_4$ del complesso Γ formata da rette segantisi nel punto O, nel qual caso il raggio o conta per due nel gruppo delle 6 rette della φ_3 uscenti da O.

Viceversa se la superficie $\varphi_3 \equiv O^2 or_1 \ldots r_5$, dovuta ad un punto O, ha in O un punto doppio biplanare, uno almeno dei due piani tangenti π, π' conterrà il raggio o e segherà ulteriormente la φ_3 in una conica degenere del complesso Γ avente in O un punto doppio.

Se ciò accade soltanto pel piano $\pi \equiv or_1 r_2$, questo piano π ed il punto P, polo della curva $o_7 \equiv O^2$ associata alla conica $r_1 r_2$ (n.° 6), presenteranno rispetto al complesso K la particolarità che in un qualunque piano ν del fascio (o), diverso da π, la curva inviluppata dai raggi del complesso K tocca la o nel punto P; mentre ogni punto N della o, diverso da P, è vertice di un cono del complesso K tangente lungo la o al piano π (n.° 7).

Per la prima proprietà la curva del complesso Γ' tangente nel punto O ad una

---

*) È la proiettività intercedente fra i punti ed i piani che i raggi del complesso K infinitamente prossimi ed incidenti alla o determinano con questa retta. Vegg. fra gli altri: Sturm, *Liniengeometrie*, II Th. n. 290.

qualsiasi retta t' del fascio $(O - \pi')$ risulta essere la $o_7 \equiv O^2$; mentre per la seconda proprietà la tangente nel punto O ad ogni altra curva del complesso Γ' uscente da O, giace nel piano π.

Inversamente ogni retta t del fascio $(O - \pi)$ risulta tangente nel punto O alla conica degenere $r_1 r_2$ del complesso Γ, che è nel piano $ot \equiv \pi$, mentre le altre coniche del complesso Γ uscenti da O risultano tangenti in questo punto ai singoli raggi del fascio $(O - \pi')$.

Invece nel caso che i piani π, π' passino entrambi pel raggio o, ciascuno di essi contenendo una conica degenere del complesso Γ formata da rette concorrenti nel punto O, risulta tangente in questo punto alla quadrica che gli corrisponde nella omografia generatrice del complesso, e però anche il raggio o, sezione dei due piani, sarà tangente nel punto O alla curva omologa o_4, sezione delle due quadriche; sicchè la o sarà un raggio doppio stazionario del complesso K e risulterà tangente nel punto O ad ogni curva generica dei complessi Γ, Γ' che passi pel punto O; mentre una retta qualsiasi del fascio $(O - \pi)$ (o del fascio $(O - \pi')$) risulta tangente nel punto O alla conica degenere $r_1 r_2$ (o alla $r_3 r_4$) del complesso Γ ed alla curva del complesso Γ' associata alla $r_3 r_4$ (o alla $r_1 r_2$).

Inversamente ogni raggio doppio stazionario o del complesso K risulta tangente nel punto coordinato O alla curva o_4 che gli corrisponde nell'omografia generatrice del complesso Γ; e nella proiettività che questa determina fra i fasci (o), (o_4) vi saranno due piani del primo fascio tangenti alle quadriche omologhe del secondo, sicchè il punto O sarà doppio per due coniche degeneri $r_1 r_2$, $r_3 r_4$ del complesso Γ e per due curve o_7, o'_7 del complesso Γ' situate sulla superficie φ_3 generata dai due fasci, la quale avrà due punti doppi O, O' infinitamente vicini sulla o.

La superficie luogo dei punti doppi delle linee dei complessi Γ, Γ' sarà detta *superficie nodale* dei due complessi. Con ciò potrà affermarsi che:

Alla rigata dei raggi doppi stazionari del complesso K *è coordinata la curva doppia della superficie nodale dei complessi* Γ, Γ'. *Le coniche del complesso* Γ *(o le curve del complesso* Γ'*) che passano per un punto semplice della superficie nodale, sono tangenti in questo punto ad un medesimo piano* π' *(o* π*); mentre le linee dei due complessi che passano per un punto della curva doppia della superficie, sono tangenti in questo punto ad una medesima retta.*

Inoltre è evidente che: *La superficie nodale è il luogo di un punto dal quale escono tre raggi complanari della congruenza* Δ.

Restano ora a determinarsi le relazioni intercedenti fra le curve dei complessi Γ, Γ' che escono da un medesimo punto fondamentale U_i, e le rette tangenti a queste curve nel punto U_i.

Come per un raggio generico del complesso K, così per un raggio arbitrario o della stella (U_i) esiste una sola conica del complesso Γ tangente alla o. Essa trovasi sulla superficie $\varphi_3 \equiv U_i^2$ dovuta alla o, ed è tangente a questa retta nel punto U_i.

Nel § seguente saranno prese in esame le curve del complesso Γ' tangenti alla retta o nel punto U_i. Per ora i risultati ottenuti in questo § possono riassumersi nel seguente teorema:

La corrispondenza che intercede fra le tangenti ed i punti di contatto delle singole coniche del complesso Γ, *coincide con la corrispondenza analoga dovuta al complesso* Γ'. *In siffatta corrispondenza prospettiva*

ad una retta generica dello spazio sono omologhi due punti.

Le rette eccezionali sono i raggi della congruenza Δ, *di cui ciascuno corrisponde a tutti i suoi punti.*

Le rette sulle quali i punti omologhi risultano infinitamente vicini, sono i raggi del complesso K.

ad un punto generico dello spazio sono omologhi i raggi di un cono di 2° ordine.

I punti eccezionali sono i punti fondamentali U_i, *di cui ciascuno corrisponde a tutti i raggi della stella di cui è centro.*

I punti pei quali i coni omologhi risultano degeneri, costituiscono la superficie nodale dei complessi Γ, Γ'.

Un punto ed un raggio tali che ciascuno di essi conti per due fra gli elementi omologhi dell'altro, appartengono rispettivamente alla curva doppia della superficie nodale ed alla rigata dei raggi doppi stazionari del complesso K.

§ IX.

Le omografie caratteristiche nelle stelle fondamentali.

15. Le schiere rigate del complesso K coordinate ai singoli raggi di una stella fondamentale (U_i) formano un sistema doppiamente infinito X_i.

Un raggio generico o del complesso K che sia coordinato al punto O, trovasi sull'unica schiera ξ del sistema dovuta alla retta $x \equiv U_iO$.

Se il punto O varia sul raggio x della (U_i) tendendo ad approssimarsi indefinitamente al punto U_i, il corrispondente raggio o varia sulla schiera ξ approssimandosi indefinitamente alla generatrice o' che esce dal punto U_i.

Perciò questa retta o' si può dire che sia il raggio del complesso K coordinato al punto O' infinitamente prossimo al punto U_i sulla x.

In generale la proprietà caratteristica del punto P coordinato ad un raggio arbitrario x del complesso K, si è che tutte le superficie φ_3 del complesso Γ dovute alle rette appoggiate alla x, hanno in comune il punto P oltre ai punti fondamentali $U_1, \dots U_{15}$.

Perciò, a conferma di quanto si è detto per la o', occorrerà mostrare che tutte le superficie φ_3 del complesso Γ dovute alle rette appoggiate alla o', risultano tangenti nel punto U_i alla x.

A ciò basta osservare che una retta generica r dello spazio si appoggia alle generatrici g_1, g_2 della ξ coordinate ai punti P_1, P_2 in cui la superficie φ_3 dovuta alla r sega, oltre che in U_i, la retta x.

Perciò se la retta r si appoggia alla o', questa viene ad essere una delle generatrici g_1, g_2, e corrispondentemente uno dei punti P_1, P_2 viene a cadere in U_i, cioè la superficie φ_3 risulta tangente in U_i alla retta x, come si voleva dimostrare.

Le superficie φ_3 dovute a tutte le rette r che escono da uno stesso punto generico O della o', hanno in comune soltanto la curva o_7 che ha il polo nel punto O. Questa curva passa con un solo ramo pel punto U_i; e però le anzidette superficie φ_3 hanno una sola tangente comune nel punto U_i, ed è la tangente t in U_i alla curva o_7, sicchè la t coincide con la x; questa cioè è tangente in U_i a tutte le curve o_7 del complesso Γ' che hanno i poli nei singoli punti della o' diversi da U_i.

La corrispondenza che si ha fra i raggi x, o' della stella (U_i), sarà designata col simbolo H_i.

Per determinare completamente questa corrispondenza basta la seguente osservazione:

Le superficie φ_3 del complesso Γ dovute alle rette r di un piano generico σ dello spazio, formano una rete omografica tanto al sistema delle rette r, come al sistema dei piani tangenti nel punto base U_i alle superficie medesime.

Perciò fra il sistema piano (σ) e la stella (U_i) viene ad aversi una omografia H_σ, nella quale ad una retta r e ad un punto O di σ corrispondono rispettivamente il piano τ tangente in U_i alla superficie φ_3 del complesso Γ dovuta alla retta r e la retta x tangente in U_i alla curva o_7 del complesso Γ' che ha il polo nel punto O.

Proiettando questo punto O da U_i si ottiene il raggio o' omologo del raggio x nella H_i, perciò la $H_i \equiv \frac{x}{o'}$, al pari della $H_\sigma^{-1} \equiv \frac{x}{O}$, è una omografia.

Se in essa sono omologhi i piani τ, τ', i singoli punti O di una retta generica r di τ' sono poli di curve o_7 tangenti in U_i alle singole rette x del fascio $(U_i - \tau)$. Queste curve o_7 si trovano sulla superficie φ_3 dovuta alla r, e però la φ_3 è tangente nel punto U_i al piano τ.

Dunque: *Le superficie φ_3 del complesso Γ dovute alle rette di un piano τ' della stella (U_i) sono tangenti nel punto U_i ad un medesimo piano τ. I piani τ, τ' si corrispondono nella omografia* H_i.

Questa sarà detta *omografia caratteristica* della stella fondamentale (U_i).

Se la retta x si trova sul cono $\vartheta_4^{(i)} \equiv o_7^{(i)}$ della congruenza Δ di vertice U_i, il corrispondente raggio o' sarà la seconda retta uscente da U_i dell'inviluppo ξ_2 coordinato alla x.

In particolare *al raggio U_iU_l è omologo nella omografia H_i il raggio U_iU_{il}* (n.° 11).

Così è agevole riconoscere che *nella omografia H_i sono uniti i piani tangenti alla superficie fondamentale nel punto U_i.*

Infatti uno qualunque τ' di questi tre piani è sostegno di una conica degenere xx' del complesso Γ formata da rette concorrenti nel punto U_i, sicchè ogni superficie φ_3 dovuta ad una retta del piano τ' contiene le x, x' e però risulta tangente nel punto U_i allo stesso piano τ'. E viceversa.

Ne segue che: *Nell'omografia H_i sono unite le tre tangenti in U_i alla curva $o_7^{(i)}$ del complesso Γ', che ha il polo nel punto U_i.*

Una generatrice arbitraria g del cono $\vartheta_4^{(i)}$ essendo coordinata al punto U_i ed al secondo punto d'appoggio P alla curva $o_7^{(i)}$, è un raggio doppio stazionario del complesso K se coincide con una delle tre tangenti in U_i alla $o_7^{(i)}$.

Invece per un punto qualunque P della $o_7^{(i)}$, che non sia fondamentale nè infinitamente prossimo al punto U_i, il raggio doppio $g \equiv U_iP$ del complesso K non è stazionario, e però il punto P non si trova sulla curva doppia della superficie nodale.

16. Data nello spazio una curva x di ordine n che passi con r_i rami per i punti fondamentali U_i e che incontri ulteriormente la curva $o_7^{(i)}$ in s_i punti Q (per $i = 1, \ldots 15$), la rigata ξ del complesso K coordinata alla curva x contiene in tutto $r_i + s_i$ rette della stella (U_i), e sono le r_i rette omologhe nella omografia H_i alle tangenti in U_i alla curva x e gli s_i raggi U_iQ coordinati ai punti Q.

Fissata ad arbitrio una retta o nella stella (U_i), le generatrici della ξ che si appoggiano a questa retta in punti diversi da U_i, sono coordinate ai punti in cui la superficie $\varphi_3 \equiv U_i^2 o_7^{(i)}$ dovuta alla o, sega la linea x al di fuori della $o_7^{(i)}$, e però il loro numero è

$$x'_i = 3n - 2r_i - \Sigma' r - s_i \ ,$$

ove la somma Σ' è estesa a tutti i numeri r diversi da r_i.

E siccome l'ordine della ξ è (n.° 10)

$$x = 3n - \Sigma r \ ,$$

ove la somma Σ è estesa a tutti i numeri r, perciò: *L'ordine di multiplicità $x - x'$ del punto U_i per la rigata ξ è $r_i + s_i$.*

La rigata ρ dei raggi doppi stazionari del complesso K contiene le tre tangenti in U_i alla $o_7^{(i)}$. Queste sono unite nella omografia H_i, e però la curva doppia x della superficie nodale, che è coordinata alla ρ, è tangente in U_i alle stesse tre rette, sicchè si appoggia alla curva $o_7^{(i)}$, oltrechè nei punti fondamentali, nei tre punti Q_i infinitamente prossimi ad U_i, cioè per la x è $r_i = 3$, $s_i = 3$; e però:

L'ordine di multiplicità del punto U_i per la rigata dei raggi doppi stazionari del complesso K è 6.

Le generatrici della rigata che escono dal punto U_i, sono le tre tangenti in U_i alla curva $o_7^{(i)}$ e le rette infinitamente prossime alle precedenti nei tre piani osculatori in U_i alla curva.

CAPITOLO QUARTO

§ X.

La superficie nodale dei complessi Γ, Γ'.

17. Per individuare due coniche c_2, c'_2 del complesso Γ infinitamente prossime fra di loro, basta dare la prima di tali linee e la retta r secondo cui il suo piano è segata dal piano dell'altra.

Con ciò resta determinata la superficie φ_3 che contiene le due coniche, che è quella dovuta alla r; e però restano del pari determinate la congruenza delle rette appoggiate alle due coniche, che è formata dalle tangenti alla supercie φ_3 nei punti della c_2, e l'inviluppo dei piani tangenti ad entrambe le coniche, che è formato dai piani tangenti alla φ_3 nei punti della c_2.

Come nel caso generale, così nel caso in esame le due coniche c_2, c'_2 non hanno punti in comune, o ne hanno uno solo o due, secondo che la retta r comune ai loro piani non appartiene al complesso K, o ne è raggio semplice o doppio.

Se la conica c_2 si spezza nelle rette c, c' concorrenti nel punto D, e se la retta r passa pel punto di contatto O del piano $\omega \equiv cc'$ con la superficie fondamentale, il piano ω' della c'_2 risulta anche esso tangente a questa superficie, sicchè la conica c'_2 si spezza anche essa in due rette c_1, c'_1 infinitamente prossime alle c, c' rispettivamente; e le due congruenze di raggi che hanno per direttrici l'una le c, c_1, l'altra le c', c'_1, risultano essere le congruenze lineari formate dalle tangenti nei punti delle c, c' alla superficie $\varphi_3 \equiv D^2$ dovuta alla r.

I fasci di raggi delle due congruenze che hanno per centro il punto D, sono nei piani τ, τ' tangenti lungo le rette c, c' al cono χ_2 che nel punto D è tangente alla superficie φ_3. Perciò i piani τ, τ' coincidono con i piani che dal punto D proiettano le rette c_1, c'_1, e però hanno in comune la congiungente i punti infinitamente prossimi $D \equiv cc'$, $D_1 \equiv c_1c'_1$ della superficie nodale, cioè la retta $t \equiv \tau\tau'$ è tangente nel punto D all'anzidetta superficie.

Se si tiene fissa la conica cc' e si fa variare la retta r nel fascio $(O - \omega)$, la superficie φ_3 descrive il fascio che ha per base la conica cc' e la curva $o_7 \equiv D^2$ che ha il polo nel punto O; il cono χ_2 descrive il fascio che ha per base i raggi c, c' e le tangenti u, u' nel punto D alla curva o_7; e la retta t — che è il raggio polare del piano $\omega \equiv cc'$ rispetto al cono χ_2 — descrive il piano τ determinato dai raggi $t' \equiv cu - c'u'$, $t'' \equiv cu' - c'u$.

Dunque: *Il piano* τ *tangente in un punto generico* D *alla superficie nodale è completamente determinato dalle due linee dei complessi* Γ, Γ' *che hanno il punto doppio* D, *e propriamente se la prima linea si scinde nelle rette* c, c', *e la seconda ha per tangenti in* D *le rette* u, u', *il piano* τ *passa per le rette* $t' \equiv cu - c'u'$, $t'' \equiv cu' - c'u$.

Queste rette sono le posizioni che assume la tangente t quando il cono χ_2 si scinde nei piani cu, $c'u'$ o nei piani cu', $c'u$.

Anche nel caso che le u, u' (o le c, c') coincidano fra di loro, il piano τ, che

è reciproco al piano cc' rispetto a tutti i coni χ_2, risulta determinato, e contiene la retta u_0 (o la c_0) in cui coincidono le u, u' (o le c, c').

A conferma dei risultati ottenuti può farsi la seguente osservazione.

Se rispetto ad una data superficie di 3° ordine φ_3 affatto arbitraria si assumono le prime polari dei punti di una retta r della superficie, si ottiene un fascio di quadriche che ha per base la r ed una cubica gobba c_3, appoggiata in due punti alla r, luogo dei poli di questa retta rispetto alle coniche della superficie situate nei singoli piani del fascio (r). Perciò la cubica gobba c_3 passa per i punti doppi $D_1, \ldots D_5$ delle coniche degeneri della φ_3 situate nei piani del fascio (r), ed è tangente alla superficie nei punti di appoggio alla r.

Se la superficie φ_3 presenta un punto doppio D, e se in questo punto è tangente ad un cono ordinario χ_2, la quadrica polare di un qualunque punto P della r passa per D ed in esso è tangente al piano τ polare del punto rispetto al cono χ_2, sicchè col variare del punto P sulla r, nell'ipotesi che questa non passi pel punto D, il piano τ descrive il fascio che ha per asse il raggio polare t del piano Dr rispetto al cono χ_2. Perciò la cubica gobba c_3 passa pel punto D ed è tangente in questo punto al raggio t; e dei 5 punti $D_1, \ldots D_5$ del caso generale due coincidono nel punto D sulla curva c_3 e però anche sulla retta t.

Questo conferma ciò che per altra via si era ottenuto.

Sempre nell'ipotesi che la retta r non passi pel punto D, può accadere che il cono χ_2 si spezzi in due piani χ, χ'. In tale caso la tangente t nel punto D alla cubica c_3 viene a coincidere con la retta $\chi\chi'$, e dei 5 punti $D_1, \ldots D_5$ tre coincidono nel punto D sulla cubica c_3 e due sulla retta t.

Infine se la retta r passa pel punto D, e se il cono χ_2 si scinde in due piani χ, χ', il primo dei quali contenga la retta r e seghi ulteriormente la superficie φ_3 secondo le rette a, a', la cubica gobba c_3 si scinde nella retta r', coniugata armonica della r rispetto alle a, a', ed in una conica c_2. E siccome il fascio di quadriche che ha per base le r, r', c_2, comprende la quadrica degenere $\chi\chi'$, polare del punto D, perciò la c_2 giace nel piano χ' e nel punto D è tangente alla retta $t \equiv \chi\chi'$, sicchè dei 5 punti $D_1, \ldots D_5$ tre coincidono nel punto D sulla c_2 e due sulla t.

Da quest'ultima proprietà riesce agevole dedurre che *la superficie nodale dei complessi* Γ, Γ' *è tangente in un punto fondamentale* U_i *ai piani uniti della omografia caratteristica* H_i.

Infatti in un piano unito χ la conica del complesso Γ si spezza in due rette a, a' uscenti da U_i, e però la superficie $\varphi_3 \equiv U_i^2 raa'o_7^{(i)}$, dovuta ad una retta arbitraria r del fascio $(U_i - \chi)$, ha un punto doppio biplanare in U_i.

Dei due piani tangenti uno è il piano χ; mentre l'altro passa per la tangente in U_i alla curva $o_7^{(i)}$ situata fuori del piano χ, e col variare della retta r nel fascio $(U_i - \chi)$ descrive il fascio che ha per asse l'anzidetta tangente.

Perciò la retta t sezione dei due piani, col variare della retta r, descrive anche essa tutto il fascio $(U_i - \chi)$; e siccome in ogni sua posizione contiene, per quanto si è detto, due punti della superficie nodale coincidenti in U_i, perciò il piano χ è tangente in U_i alla superficie.

18. Resta ora a determinare l'ordine della superficie nodale. A ciò occorrono i ragionamenti che seguono.

Nel complesso Γ' vi sono due curve c_7 tangenti in un punto dato O ad un piano dato π che passi pel punto. I poli P_1, P_2 delle due curve sono sul raggio o coordinato al punto O; e secondochè questo punto è o no sulla conica c_2 del complesso Γ situata nel piano π, il raggio o giace o no su tale piano, e la curva o_7 che ha il polo nel punto O, la quale in questo punto è tangente al raggio o, è o no tangente in O al piano π.

Corrispondentemente il punto O nel primo caso coincide con uno dei punti P_1, P_2, mentre nel secondo caso è diverso da questi due punti.

Tenendo fisso il piano π e facendo variare il punto O su di una retta x di tale piano, resta determinata una curva c luogo dei poli delle linee del complesso Γ' tangenti al piano π nei punti della x.

Questa curva c si trova sulla superficie rigata ξ coordinata alla retta x, e propriamente incontra in due punti P_1, P_2 ciascuna generatrice o della ξ. Inoltre essa incontra la direttrice semplice x della rigata nei due punti di sezione con la conica del complesso Γ che è nel piano π, onde risulta di 6° ordine e si appoggia in quattro punti alla direttrice doppia della superficie.

Due di questi punti sono i punti doppi cuspidali D, E della superficie, poli delle due curve c_7 tangenti alla retta x; mentre ciascuno degli altri due punti è polo di una linea c_7 bisegante della retta x e tangente al piano π in uno dei punti di sezione.

Tenendo fissa la retta x e facendo variare il piano π attorno a questa retta, la curva c_6 varia descrivendo un fascio sulla superficie ξ_3 coordinata alla x.

Infatti per un punto generico P della ξ_3, che sia polo di una curva c_7 appoggiata alla retta x nel punto O, passa soltanto la curva c_6 del sistema che si ottiene assumendo nel fascio (x) come piano π quello che contiene la tangente in O alla c_7.

Fanno eccezione soltanto i punti doppi cuspidali D, E innanzi detti e i poli delle curve c_7 che hanno un punto doppio sulla x. Tutte le curve c_6 passano semplicemente per questi punti.

Ora in una rappresentazione piana della superficie ξ_3, nella quale il sistema rappresentativo sia costituito da coniche aventi in comune un punto Q, ogni curva c_6 ha per immagine una curva $c_4 \equiv Q^2$, sicchè il numero dei punti base del fascio delle c_6 è 12, e però il numero delle curve del complesso Γ che hanno un punto doppio sulla retta x è 10. Dunque:

La superficie nodale dei complessi Γ, Γ' *è di ordine 10.*

Se la retta x passa per un punto fondamentale U_i, per ogni piano π del fascio (x) resta sempre determinata una curva c, luogo dei poli delle curve c_7 che si appoggiano alla x, oltre che in U_i, in un secondo punto O e che in questo punto risultano tangenti al piano π.

Come nel caso generale la curva c si appoggia in due punti ad ogni generatrice o della schiera ξ coordinata alla x. Di più nel caso in esame ogni generatrice x' della schiera opposta alla ξ si appoggia del pari alla curva in due punti. Infatti la superficie φ_3 dovuta alla x' passa per la x, e però risulta tangente al piano π in due punti. I raggi coordinati a questi punti segano la x' nei punti di appoggio della x' alla curva.

Uno di questi punti coincide col punto U_i, quando la x' coincide con la x, sicchè la c è una curva di 4° ordine e di 1ª specie che passa semplicemente per U_i.

Col variare del piano π attorno alla retta x, la curva c_4 varia sulla quadrica sostegno della schiera ξ, descrivendo un fascio che oltre al punto U_i ha per base i poli delle curve del complesso Γ' che hanno un punto doppio sulla retta x diverso da U_i. Ciò prova che:

Ogni punto fondamentale U_i *è triplo per la superficie nodale.*

La retta u_{il} che unisce i punti fondamentali U_i, U_l, sega ulteriormente la superficie nodale nel punto d'appoggio alla retta u'_{il} che con la u_{il} forma una conica del complesso Γ, e nei tre punti d'incontro con la curva $c_6^{(il)}$ che con la u_{il} forma una curva c_7 del complesso Γ'.

Infine è evidente che la superficie nodale contiene le 20 rette c che contate due volte formano coniche del complesso Γ.

19. L'ordine della curva doppia della superficie nodale si determina facilmente nel seguente modo.

Si assuma un punto generico O dello spazio e si consideri il complesso di rette H formato dalle tangenti alle coniche del complesso Γ che sono nei piani della stella (O).

Il cono del complesso che ha per vertice un punto generico P dello spazio, è circoscritto alla superficie φ_3 dovuta alla retta $r \equiv OP$, e però risulta di 4° ordine ed ha la generatrice doppia r.

Se il punto P si trova su una conica degenere cc' del complesso Γ situata in un piano della stella (O), la superficie φ_3 dovuta alla retta $r \equiv OP$ contiene l'anzidetta conica; sicchè il cono circoscritto alla superficie che ha il vertice nel punto P, oltre alla r ha per generatrice doppia quella delle due rette c, c', che passa pel punto P. Perciò *il complesso* H *è di 4° grado ed ha per raggi doppi le rette della stella* (O) *e le generatrici della superficie* $\mathfrak{I}_{15}$ *formata dalle coniche degeneri del complesso* Γ *che sono nei piani dell'anzidetta stella* *).

Le generatrici della $\mathfrak{I}_{15}$ sono raggi semplici della congruenza Δ, e però la rigata comune al complesso H ed alla congruenza Δ comprende la $\mathfrak{I}_{15}$, contata due volte, ed una rigata ρ di ordine $4(10+5)-15 \,.\, 2=30$.

Ora è agevole riconoscere che questa rigata ρ è costituita dai raggi doppi stazionari del complesso K.

Infatti una generatrice arbitraria x della ρ non fa parte della conica c_2 del complesso Γ situata nel piano Ox, ma risulta tangente a tale conica; e però i suoi punti coordinati coincidono nel punto di contatto.

Viceversa un raggio x della congruenza Δ che sia stazionario pel complesso K, risulta tangente alla conica del complesso Γ situata nel piano $\omega \equiv Ox$, e però fa parte del complesso H senza appartenere alla $\mathfrak{I}_{15}$. Dunque:

I raggi doppi stazionari del complesso K *costituiscono una rigata* ρ *di grado 30.*

Alla ρ è coordinata la curva doppia k della superficie nodale. Questa curva ha un punto triplo in ogni punto fondamentale (n.° 16); e però se è di ordine n, sarà (n.° 10):

$$30=3n-3\,.\,15\;.$$

---

*) Cfr. Not. cit. *Su di un sistema lineare di coniche nello spazio*, n.° 4.

Perciò: *La curva doppia della superficie nodale è di ordine 25.*

Un piano ω che sia sostegno di una conica degenere del complesso Γ formata da rette coincidenti c, c', contiene altri 8 raggi doppi r_i del complesso K coordinati rispettivamente alle coppie di punti $r_i(cc')$. Perciò gli 8 raggi risultano stazionari; ed i punti in cui segano la c, appartengono alla curva k.

Dunque: *Una retta* c *che contata due volte formi una conica del complesso* Γ, *incontra la curva doppia della superficie nodale in 8 punti.*

Un piano τ che passi per la retta c, sega ulteriormente la superficie secondo una curva di 9° ordine che incontra la c negli 8 punti di appoggio alla curva doppia, ed in un ultimo punto, nel quale il piano τ risulta tangente alla superficie. Perciò: *La corrispondenza che intercede fra i punti di una retta* c *ed i piani tangenti in questi punti alla superficie nodale, è proiettiva.*

§ XI.

Le congruenze del complesso K. La superficie singolare dei complessi Γ, Γ'.

20. *Data nello spazio una superficie arbitraria* χ *di ordine* n, *la quale nei punti fondamentali* U_i *abbia punti multipli di ordine* r_i, *per* $r_i \geqq 0$, *la congruenza* Ξ *del complesso* K *che, oltre alle stelle* (U_i), *è coordinata alla superficie* χ, *risulta di classe* $n' = 2n$ *e di ordine* $m' = 7n - \Sigma r_i$.

Infatti i raggi della congruenza situati in un piano generico dello spazio sono coordinati uno ad uno ai $2n$ punti di sezione della superficie χ con la conica del complesso Γ situata in quel piano; e così i raggi della congruenza che escono da un punto generico dello spazio, sono coordinati uno ad uno ai punti non fondamentali sezioni della superficie χ con la curva del complesso Γ' che ha il polo in quel punto.

In generale sulla superficie χ esiste un numero finito di coppie singolari dei complessi Γ, Γ' (n.° 3). Corrispondentemente vi è un numero finito di raggi doppi del complesso K, che risultano doppi per la congruenza Ξ.

Dal punto fondamentale U_i escono $m' - 2r_i$ raggi della congruenza, coordinati ai punti non fondamentali sezioni della superficie χ con la curva $o_7^{(i)}$. Inoltre, se $r_i > 0$, esiste nella congruenza un cono di ordine r_i avente il vertice nel punto U_i, omologo nella omografia caratteristica H_i al cono tangente in U_i alla superficie χ (n.° 15).

Infine dalla costruzione data pei raggi della congruenza che escono da un punto o giacciono in un piano, segue che:

La superficie focale della congruenza Ξ *è l'inviluppo dei piani sostegni delle coniche del complesso* Γ *tangenti alla superficie* χ, *ed è il luogo dei poli delle curve del complesso* Γ' *tangenti alla* χ.

I piani focali ed i fuochi di un raggio generico o della Ξ si ottengono considerando il piano tangente alla superficie χ nel punto O coordinato al raggio o, ed il cono tangente nel punto O alla superficie φ_3 dovuta alla o. Le due rette comuni al piano ed al cono determinano con la o i due piani focali τ, τ'; ed i punti T, T' omologhi di questi due piani nella proiettività caratteristica dovuta al raggio o del complesso K (n.° 14), sono i fuochi corrispondenti.

La superficie focale della congruenza è tangente nei punti T, T' ai piani τ', τ rispettivamente *). E per ciascuno dei fasci $(T - \tau')$, $(T' - \tau)$ si ha che la conica del complesso Γ che è nel piano del fascio, e la curva del complesso Γ' che ha il polo nel centro, risultano tangenti nel punto O alla superficie χ senza toccarsi in tale punto, sicchè le superficie φ_3 del complesso Γ dovute alle singole rette del fascio, contenendo le anzidette due linee, risultano tangenti nel punto O alla superficie χ. Viceversa se la superficie φ_3 dovuta ad una retta r risulta tangente alla superficie χ in un punto O, la retta r è tangente alla superficie focale della congruenza Ξ nel punto (e nel piano) che essa determina col raggio o coordinato al punto O. Perciò *la proprietà caratteristica di una tangente della superficie focale della congruenza* Ξ, *si è che la superficie* φ_3 *dovuta a tale retta, risulta tangente alla superficie* χ.

Per determinare la classe della superficie focale basta rappresentare su di un piano la superficie φ_3 dovuta ad una retta generica r dello spazio.

Se le linee piane della φ_3 hanno per immagini curve $c_3 \equiv P_1 \ldots P_6$ e la retta r ha per immagine la conica $c_2 \equiv P_2 \ldots P_6$, la linea k_{3n} sezione della φ_3 con la superficie χ avrà per immagine una curva $c_{3n} \equiv (P_1 \ldots P_6)^n U_i'^{r_i}$, e le coniche della φ_3 tangenti alla superficie χ situate in piani del fascio (r) avranno per immagini le rette uscenti dal punto P_1 che toccano altrove la curva c_{3n}, sicchè il numero di tali coniche è

$$n'' = 3n(3n-1) - n^2 - n - 5n(n-1) - \Sigma r_i(r_i - 1) = n(3n+1) - \Sigma r_i(r-1) .$$

Questa è la classe della superficie focale.

La rigata costituita dai raggi della congruenza Ξ appoggiati alla retta r è coordinata alla curva $k_{3n} \equiv \varphi_3\chi$, e però ha lo stesso genere p della curva $c_{3n} \equiv (P \ldots P)^n U_i'^{r_i}$ immagine della k_{3n}. Ed è

$$p = \frac{(3n-1)(3n-2)}{2} - 6\frac{n(n-1)}{2} - \Sigma \frac{r_i(r_i-1)}{2} = \frac{3n(n-1)}{2} + 1 - \frac{\Sigma r_i(r_i-1)}{2} . \qquad 1)$$

La classe della congruenza è $n' = 2n$; perciò si ha anche

$$n'' = 2(n' + p - 1) . \qquad 2)$$

Questa è la nota relazione che intercede fra la classe di una congruenza di rette, la classe della superficie focale ed il genere della rigata sezione della congruenza con un complesso lineare **).

Dalla formola duale

$$m'' = 2(m' + p - 1) , \qquad 3)$$

---

*) Sturm, *Liniengeometrie.* II Theil, n.° 290, 291.

**) Vegg. ad es. Fano, *Lezioni di Geometria della retta.* Roma 1896, n.i 71 e 66.

sostituendo ad m' ed a p i valori già trovati, si deduce che l'ordine m della superficie focale della Ξ è

$$m'' = n(3n+11) - \Sigma r_i(r_i+1) \,.$$

Con ciò restano determinati tutti i numeri caratteristici della congruenza Ξ.

La classe della Ξ è un numero pari. Ciò si verifica anche per la congruenza Δ dei raggi doppi, e però:

Tutte le congruenze del complesso K *sono di classe pari.*

La congruenza Δ è l'unica che non è riferita con corrispondenza biunivoca alla superficie coordinata σ', e però è l'unica che non soddisfa alle proposizioni generali ora stabilite.

Le coppie di punti coordinate ai suoi raggi sono le coppie singolari dei complessi Γ, Γ' (n.° 5); e però la superficie σ', luogo di queste coppie, si dirà *superficie singolare* dei due complessi.

Essa è segata da una conica del complesso Γ in 10 coppie, e da una linea del complesso Γ', oltre che nei punti fondamentali, in 5 coppie. Inoltre nel punto fondamentale U_i la σ' è tangente al cono di 4° ordine che nell'inversa della omografia caratteristica H_i corrisponde al cono della congruenza Δ di vertice U_i. Perciò:

La superficie singolare dei complessi Γ, Γ' *è di 10° ordine e nei punti fondamentali ha punti quadrupli.*

Nella corrispondenza involutoria determinata sulla σ' dalle coppie singolari, ogni punto U_i ha per corrispondente la curva $o_7^{(i)} \equiv U_i^3$, mentre la linea dei punti uniti è la curva k del § prec.

Ogni superficie φ_3 dovuta ad una qualunque retta r dello spazio sega la σ' secondo una curva unita nell'anzidetta corrispondenza, e propriamente l'involuzione j_1^1 che ne risulta sulla curva, ha le coppie di punti coniugati sui singoli raggi della congruenza Δ appoggiati alla r. Ora la curva, per la 1) è di genere 46; sicchè la rigata ρ_{15} degli anzidetti raggi, pel teorema di Zeuthen, risulta di genere 16. Corrispondentemente dalle 2), 3) si ha che:

La superficie focale della congruenza Δ *è di ordine 40 e di classe 50.*

21. Ad un piano generico χ dello spazio è coordinata una congruenza Ξ di classe 2 e di ordine 7. I raggi $r_1, \ldots r_{10}$ della congruenza Δ situati nel piano χ sono doppi per la congruenza Ξ, nè questa ammette altri raggi multipli.

Gli inviluppi piani della Ξ sono l'inviluppo $j_6 \equiv (r_1 \ldots r_{10})^2$ del complesso K che è nel piano χ; e gli inviluppi $j_3^{(h)} \equiv r_h^2$ coordinati ai raggi $r_1, \ldots r_{10}$.

La superficie focale della congruenza Ξ è di classe 4 e di ordine 10. *Questa superficie* χ' *è l'inviluppo dei piani delle coniche del complesso* Γ *tangenti al piano* χ, *ed è il luogo dei poli delle curve del complesso* Γ' *tangenti allo stesso piano.*

Per ogni retta generica r del piano χ esistono due coniche del complesso Γ tangenti alla r. I piani delle due coniche appartengono alla superficie inviluppo χ', nè questa contiene altri piani del fascio (r), oltre il piano χ. I due piani indicati coincidono fra di loro se la retta r appartiene all'inviluppo j_6, mentre uno di essi coincide col piano χ, se la retta r è tangente alla conica c_2 del complesso Γ che è nel piano χ.

Da quest'ultima proprietà segue che *la superficie χ' è tangente al piano doppio χ nei punti della conica c_2*.

Considerazioni analoghe possono ripetersi pel piano τ_h dell'inviluppo $j_3^{(h)}$. La superficie φ_3 dovuta ad una retta r di questo piano, contiene la conica degenere $r_h r'_h$, e però sega il piano χ oltre che nella r_h secondo una conica r_2. I due piani tangenti a questa conica che passano per la retta r, appartengono alla superficie inviluppo χ'; nè questa presenta altri piani del fascio (r) diversi dal piano τ_h.

Uno dei due piani indicati coincide col piano τ_h se la conica r_2 è tangente alla r_h. Ora col variare della retta r nel piano τ_h, la conica r_2 varia omograficamente in una rete; e però le coniche r_2 tangenti alla r_h hanno per omologhe le rette r di un inviluppo di 2^a classe.

La conica aderente a questo inviluppo è linea di contatto della superficie χ' col piano τ_h.

Tutto ciò che si è detto, vale nel caso che il piano χ non contenga alcun punto fondamentale. Senza difficoltà si determinano le particolarità che acquista la congruenza Ξ quando il piano χ passi per uno, due o tre punti fondamentali.

Così senza difficoltà si determinano i numeri caratteristici del complesso Γ, essendo già stata determinata la classe dell'inviluppo dei piani sostegni delle coniche del complesso Γ soddisfacenti ad una data condizione elementare.

22. La congruenza Ξ sezione del complesso K con un complesso di rette K' di grado ν, è di classe 6ν. Perciò la superficie χ coordinata a siffatta congruenza è di ordine 3ν.

L'ordine di multiplicità per la superficie del punto fondamentale U_i si ottiene notando che una retta generica della stella (U_i), alla quale sia coordinata la schiera rigata ρ, sega la superficie, al di fuori del punto U_i, nei punti d'incontro con i raggi del complesso K' situati sulla ρ, diversi dal raggio della schiera che passa per U_i, e però il numero dei detti punti d'incontro è $2\nu-\alpha_i$, se la stella (U_i) è costituita da raggi multipli di ordine α_i pel complesso K' (per $\alpha_i \geqq 0$). Perciò l'ordine di multiplicità del punto U_i per la superficie χ è $\nu+\alpha_i$.

Con questi numeri restano determinate tutte le caratteristiche della congruenza Ξ.

In particolare le congruenza Ξ_6 sezioni del complesso K con i complessi lineari di rette dello spazio hanno per immagini superficie di 3° ordine formanti un sistema lineare ∞^5, che ha per base i punti $U_1, \dots U_{15}$.

Dunque: *I 15 punti fondamentali di un complesso bilineare di coniche costituiscono il gruppo base di un sistema lineare ∞^5 di superficie di 3° ordine.*

Questo sistema comprende quello ∞^4 e di indice 2 costituito dalle superficie φ_3 dovute alle singole rette dello spazio (n.° 2).

Qualunque sia la congruenza Ξ del complesso K, il suo studio può farsi dipendere da quello della corrispondente superficie χ.

In particolare la Ξ è razionale se la superficie χ è omaloidica, e propriamente una rappresentazione piana della χ fornisce una rappresentazione piana della congruenza, nella quale le rigate sezioni della congruenza con i complessi lineari hanno per immagini le linee immagini delle curve di sezione della χ con le superficie $\varphi_3 \equiv U_1 \dots U_{15}$.

§ XII.

La superficie focale della congruenza Δ.

23. I fuochi ed i piani focali di un raggio arbitrario c della congruenza Δ si determinano nel seguente modo.

Alla conica degenere del complesso Γ che comprenda la c, si associa una linea $c_7 \equiv D^2$ del complesso Γ' che, oltre al punto doppio $D \equiv cc'$, ha in comune con la c due punti Q_1, Q_2 (n.° 7).

Perciò le superficie φ_3 dovute alle rette del fascio che ha per sostegni il piano ω della cc' ed il polo O della c_7, avendo in comune queste due linee, risultano tangenti nei punti Q_1, Q_2 ai piani χ_1, χ_2 che la c determina con le tangenti alla c_7 nei detti due punti.

Di conseguenza nel fascio costituito dalle superficie in discorso, ve ne sono due che, oltre al punto D, hanno un secondo punto doppio, l'una nel punto Q_1, l'altra nel punto Q_2, e che perciò risultano tangenti lungo la c l'una al piano χ_2, l'altra al piano χ_1; sicchè due rette della prima superficie appartenenti al fascio $(Q_1 - \chi_2)$ e due rette della seconda situate nel fascio $(Q_2 - \chi_1)$ coincidono nella c.

Le rette indicate essendo diverse dai raggi Q_1O, Q_2O coordinati ai punti Q_1, Q_2, appartengono alla congruenza Δ, sicchè in questa i punti Q_1, Q_2 e i piani χ_2, χ_1 sono i fuochi e i corrispondenti piani focali del raggio c.

La superficie focale della Δ risultando tangente nei punti Q_1, Q_2 ai piani χ_1, χ_2 rispettivamente, risulta del pari tangente in questi punti alla curva $c_7 \equiv D^2$. Quel che si è detto pel raggio c, può ripetersi pel raggio c', e si conclude che:

Le due congruenze costituite dalle linee dei complessi Γ, Γ' dotate di punto doppio hanno la stessa superficie focale; e propriamente due linee dei due complessi aventi il medesimo punto doppio risultano tangenti a tale superficie negli stessi quattro punti.

Come nel caso generale le superficie φ_3 dovute alle rette dei fasci $(Q_1 - \chi_1)$, $(Q_2 - \chi_2)$ risultano tangenti alla superficie σ' coordinata alla Δ, in uno qualunque dei due punti coordinati al raggio c. In tale modo restano determinati i piani tangenti alla superficie σ' nei singoli suoi punti.

Le cose dette valgono anche nel caso che la c sia un raggio doppio stazionario del complesso K, nel qual caso la c risulta tangente alla superficie σ' nel punto coordinato O.

Essa è del pari bitangente alla superficie fondamentale dei complessi Γ, Γ', e propriamente tocca la superficie nei piani delle due coniche del complesso Γ che hanno un punto doppio nel punto O, e rispettivamente nei poli delle due curve del complesso Γ' associate alle predette linee (n.° 7).

Da tutto ciò si conclude che: *La rigata dei raggi doppi stazionari del complesso K è circoscritta alla superficie singolare ed alla superficie fondamentale dei complessi Γ, Γ'. Delle due linee di contatto la prima è coordinata alla rigata, l'altra ha per corde le singole generatrici della superficie.*

CAPITOLO QUINTO

§ XIII.

I sistemi generatori di un complesso bilineare di coniche.

24. Dato un complesso bilineare di coniche nello spazio, le linee del complesso che sono nei piani di un fascio, costituiscono una superficie di 3° ordine, perchè una sola di esse passa per un punto generico dell'asse del fascio.

Quando questa retta r varia in un piano π, la corrispondente superficie φ_3 varia in una rete R_π, giacchè la superficie del sistema che passa per due punti dati in posizione generica, è quell'unica dovuta alla retta del piano π che si appoggia agli assi dei due fasci formati dai piani delle coniche del complesso che passano rispettivamente per quei due punti.

La rete R_π risulta riferita omograficamente al sistema delle rette a cui è dovuta. Essa ha per linea base la conica c del complesso che è nel piano π.

Ora si assuma ad arbitrio una quadrica non degenere φ_2 che passi per la c, e si considerino le tre curve di 4° ordine e di 1ª specie ulteriori sezioni della φ_2 con tre superficie $\sigma, \sigma', \sigma''$ della rete R_π dovute a tre rette l, l', l'' del piano π non concorrenti in un medesimo punto.

I tre fasci di quadriche $\Lambda, \Lambda', \Lambda''$ che hanno per basi le linee indicate, hanno in comune la quadrica φ_2, nè si trovano in una medesima rete, sicchè appartengono ad un sistema lineare ∞^3 Σ. Inoltre i tre fasci sono riferiti proiettivamente ai fasci di piani $(l), (l'), (l'')$ rispettivamente in modo da generare la superficie $\sigma, \sigma', \sigma''$. In ciascuna delle tre proiettività al piano π corrisponde la quadrica φ_2, e però esiste *una* omografia Ω fra le quadriche del sistema Σ ed i piani dello spazio, nella quale ai fasci $\Lambda, \Lambda', \Lambda''$ corrispondono rispettivamente i fasci $(l), (l'), (l'')$ con le tre proiettività indicate.

Si consideri il complesso di coniche Γ generato da tale omografia.

Le tre superficie φ_3 del complesso Γ dovute alle rette l, l', l'' coincidono rispettivamente con le $\sigma, \sigma', \sigma''$; sicchè la rete delle superficie φ_3 del complesso Γ dovute alle rette del piano π coincide con la rete R_π, e di conseguenza in un qualunque piano π' dello spazio la conica del complesso dato e quella del complesso Γ coincidono nella conica di sezione del piano π' con la superficie φ_3 della rete R_π dovuta alla retta $r_0 \equiv \pi\pi'$.

Perciò i due complessi coincidono in un unico; e si ha il teorema che:

Un complesso bilineare di coniche può sempre riguardarsi generato da una omografia intercedente fra i piani dello spazio e le quadriche di un sistema lineare triplamente infinito.

Inoltre dal ragionamento fatto risulta che:

Una rete di superficie di 3° ordine che abbia una conica base e che nel piano di questa linea non abbia altri elementi base, determina un complesso bilineare di coniche, costituito dai fasci delle singole superficie della rete, che comprendono quella conica.

La genesi del complesso indicata nella precedente proposizione vale anche nei vari casi particolari.

Inoltre pel fatto che una rete di superficie di 3° ordine avente per base una conica data, è determinata quando se ne conoscano ulteriormente 10 punti base, si ha che:

Un complesso bilineare di coniche è univocamente determinato quando ne sono dati 10 punti fondamentali ed una conica, in posizione generica fra di loro.

25. Dato un complesso bilineare di coniche Γ, si è visto che per determinarne un sistema generatore basta assegnare la superficie φ_2 del sistema che passa per una conica c_2 del complesso. Nel sistema Σ che in tale modo risulta determinato, la quadrica φ_2 è l'omologa del piano π della c_2.

Perciò fissate ad arbitrio due coniche c_2, c'_2 del complesso, fra i due sistemi di quadriche che hanno per basi queste due linee, viene ad aversi una corrispondenza biunivoca quando si riguardino omologhe due quadriche φ_2, φ'_2 che appartengano ad un medesimo sistema generatore del complesso Γ, due quadriche cioè che corrispondano rispettivamente ai piani π, π' delle c_2, c'_2 in una medesima omografia Ω generatrice del complesso.

In questa omografia i fasci omologhi $(r) \equiv \pi\pi'$, $(c_4) \equiv \varphi_2\varphi'_2$ generano la superficie φ_3 del complesso dovuta alla retta r, asse del primo fascio; sicchè questa superficie contiene anche la curva c_4 base del secondo fascio, vale a dire che le φ_2, φ'_2 segano la φ_3, oltre che nelle linee fisse c_2, c'_2 rispettivamente, secondo la medesima curva c_4, la quale varia sulla φ_3 col variare delle due superficie.

Perciò la corrispondenza in esame è una omografia.

La superficie generata da due fasci omologhi (c_2e_2), $(c'_2e'_2)$ oltre la φ_3 comprende un piano ω. Questo contiene le linee basi e_2, e'_2 ed appartiene alla coppia di superficie omologhe $\pi\omega$, $\pi'\omega$ dei due fasci.

Infine dal fatto che la superficie φ_3 passa per i punti fondamentali $U_1, \dots U_{15}$ del complesso Γ, segue che nell'omografia in esame ad una quadrica φ_2 che contenga un punto U_i, corrisponde una quadrica φ'_2 che contiene lo stesso punto.

Assumendo 4 punti fondamentali si riconosce che: *Le quadriche che passano per le singole coniche del complesso Γ e per 4 punti fondamentali fissati ad arbitrio costituiscono un sistema lineare generatore del complesso.*

Da questa proposizione segue l'altra che: *Un complesso bilineare di coniche è univocamente determinato quando ne sono dati 5 punti fondamentali e 4 coniche in posizione generica fra di loro.*

Infatti escludendo il punto dato U_5, le 4 quadriche che passano per gli altri punti dati e rispettivamente per le coniche date a_2, b_2, c_2, d_2, determinano un sistema lineare ∞^3. Ora esiste una omografia fra questo sistema e quello dei piani dello spazio che alle quattro quadriche innanzi dette fa corrispondere rispettivamente i piani delle coniche a_2, b_2, c_2, d_2, e che alla rete del sistema che ha un punto base nel punto U_5, fa corrispondere la stella di piani che ha il centro nello stesso punto.

Il complesso generato da questa omografia è quello indicato nel teorema.

Infine occorre far cenno della corrispondenza che viene ad aversi fra due sistemi generatori del complesso Γ quando si riguardino omologhe due superficie dei due sistemi che determinino la medesima conica del complesso.

Questa corrispondenza è una omografia. Due superficie omologhe ψ_2, ψ'_2, oltre ad una conica c del complesso, hanno in comune una seconda conica c'. Quando le ψ_2, ψ'_2 variano rispettivamente in due fasci F, F', la c descrive una superficie φ_3, e però la c' varia in un piano ω. Questo è del tutto determinato da una coppia di superficie omologhe. Perciò se i fasci F, F' variano rispettivamente in due reti R, R', il piano ω non varia; e così se le reti R, R' variano rispettivamente nei due sistemi, il piano ω resta immutato.

Si dirà che il piano ω è il *piano di prospettiva* dei due sistemi.

Fissato ad arbitrio un piano ω nello spazio, i sistemi generatori del complesso Γ si distribuiscono in *fasci* in modo che due sistemi di un medesimo fascio hanno come piano di prospettiva il piano ω.

Le quadriche dei sistemi di un fascio dovute ad una medesima conica c del complesso, formano un fascio che comprende la quadrica degenere $\pi\omega$, essendo π il piano della conica c.

§ XIV.

La determinazione del complesso Γ mediante condizioni elementari.

26. Le condizioni più semplici che possono imporsi ad un complesso bilineare di coniche Γ, consistono nell'assegnarne una linea od un punto fondamentale.

Già sono stati indicati nel § prec. due casi in cui il complesso è univocamente determinato mediante siffatte condizioni elementari.

Ora in questo § saranno esaminati i vari casi in cui il complesso è determinato univocamente da un gruppo di punti fondamentali e di coniche, quando ciascuna di queste linee passi per tre dei punti dati.

Ma innanzi tutto occorre stabilire le seguenti proprietà fondamentali:

1.° *Due complessi bilineari di coniche che abbiano in comune i punti fondamentali, coincidono.*

Supponendo che i punti fondamentali comuni siano i punti $U_1, \dots U_{15}$, si considerino le due congruenze formate dalle coniche dei due complessi situate nei piani della stella (U_i).

Le due congruenze coincidono. Ed in vero se così non fosse, le loro linee direttrici $c_7 \equiv U_i^3 U_l$, $c'_7 \equiv U_i^3 U_l$ risulterebbero distinte (per $i \neq l = 1, 2, \dots 15$); ed una superficie generica $\varphi_3 \equiv U_i^2 U_l$ della rete che ha per base la prima linea, segherebbe la seconda in un solo punto variabile; sicchè la c'_7 potrebbe essere riferita con corrispondenza biunivoca alla superficie di un fascio generico di quella rete, il che è assurdo.

Le superficie φ_3 dei due complessi dovute ad una medesima retta r dello spazio hanno in comune, per quanto si è detto, le coniche situate nei piani $rU_1, \dots rU_{15}$, e però coincidono; sicchè coincidono del pari i due complessi.

2.° *Due congruenze bilineari di coniche formate rispettivamente da linee situate nei piani di due stelle distinte* $(O), (O')$ *appartengono ad un medesimo complesso bilineare, se hanno in comune le coniche situate nei piani comuni alle due stelle.*

Infatti la superficie φ_3 costituita da queste coniche, ed altre due superficie φ'_3, φ''_3, l'una della prima congruenza, l'altra della seconda, dovute rispettivamente

a due rette incidenti delle due stelle, hanno in comune una conica nel piano delle due rette; e però la rete a cui appartengono, determina un complesso bilineare di coniche che contiene le due congruenze.

Questa proposizione equivale all'altra che:

Due curve gobbe di 7° ordine e di genere 5 che siano su di una medesima superficie di 3° ordine ed abbiano la stessa retta unisecante su questa superficie, si segano in 15 punti. Questi costituiscono il gruppo dei punti fondamentali di un complesso bilineare di coniche.

3.° *Due sistemi lineari ∞^3 di quadriche prospettivi rispetto ad un piano ω (riferiti cioè fra di loro omograficamente in modo che due quadriche omologhe φ_2, φ'_2 seghino il piano ω secondo una medesima conica variabile) sono sistemi generatori di un complesso bilineare di coniche.*

Infatti la conica c_2 ulteriore sezione delle φ_2, φ'_2 giace in un piano π, che col variare della φ_2 in un fascio, varia a sua volta in un fascio; sicchè la corrispondenza che ne risulta fra le quadriche φ_2 del primo sistema dato ed i piani π dello spazio, è una omografia.

27. Ciò posto, si hanno i seguenti teoremi:

1.° *Un complesso bilineare di coniche è univocamente determinato quando ne sono dati 11 punti fondamentali e la conica che è nel piano di tre di questi punti.*

Infatti se sono dati i punti $U_1, \ldots U_{11}$ e se è data la conica c_2 che è nel piano dei tre punti U_1, U_2, U_3 e che perciò passa per essi, fra le superficie di 3° ordine che hanno in comune la conica c_2 ed i punti $U_4, \ldots U_{11}$, ve ne sono tre ben determinate che hanno rispettivamente due punti doppi nei punti U_2, U_3; U_3, U_1; U_1, U_2. Esse determinano una rete costituita da superficie di 3° ordine che oltre ad avere in comune la c_2 ed i punti $U_4, \ldots U_{11}$, risultano tangenti fra di loro nei punti U_1, U_2, U_3 della c_2, sicchè il complesso di coniche individuato da tale rete soddisfa alle condizioni indicate nel teorema.

2.° *Un complesso bilineare di coniche è univocamente determinato quando ne sono dati 9 punti fondamentali e le 4 coniche situate nei piani di un tetraedro avente i vertici in 4 punti dati.*

Infatti se sono dati i punti $U_1, \ldots U_9$ e le coniche c_1, c_2, c_3, c_4 circoscritte rispettivamente ai triangoli del tetraedro $U_1U_2U_3U_4$, restano determinate le superficie

$$\varphi_3^{(1)} \equiv U^2_2U^2_3c_1c_4U_5 \ldots U_9 \;, \quad \varphi_3^{(2)} \equiv U^2_3U^2_1c_2c_4U_5 \ldots U_9 \;, \quad \varphi_3^{(3)} \equiv U^2_1U^2_2c_3c_4U_5 \ldots U_9 \;;$$

e ragionando su queste come nel caso precedente si dimostra il teorema.

3.° *Un complesso bilineare di coniche è univocamente determinato quando ne sono dati 7 punti fondamentali e le 7 coniche situate nei piani di due tetraedri aventi i vertici in 5 punti dati, i primi tre comuni, gli ultimi distinti.*

Infatti se sono dati i punti $U_1, \ldots U_7$ e le coniche $c; c_1, c_2, c_3; c'_1, c'_2, c'_3$, la prima circoscritta al triangolo $U_1U_2U_3$ e le altre circoscritte rispettivamente ai restanti triangoli dei due tetraedri $U_1U_2U_3U_4$, $U_1U_2U_3U_5$, basterà ragionare come nei casi precedenti sulle superficie

$$\varphi_3^{(1)} \equiv U^2_2U^2_3cc_1c'_1U_6U_7 \;, \quad \varphi_3^{(2)} \equiv U^2_3U^2_1cc_2c'_2U_6U_7 \;, \quad \varphi_3^{(3)} \equiv U^2_1U^2_2cc_3c'_3U_6U_7 \,.$$

4.° *Un complesso bilineare di coniche è univocamente determinato quando ne sono dati 5 punti fondamentali e le 10 coniche situate nei piani determinati dai punti dati presi a tre a tre.*

Infatti se sono dati i punti $U_1, \ldots U_5$ e le coniche c_{ilm} circoscritte rispettivamente ai triangoli $U_iU_lU_m$, fissati ad arbitrio tre punti dati, ad esempio i punti U_1, U_2, U_3, restano determinate tre reti R_1, R_2, R_3 costituite rispettivamente

$$\begin{array}{llll} \text{la } R_1 & \text{da} & \text{superficie} & \varphi_3^{(1)} \equiv U^2_2 U^2_3 c_{123} c_{423} c_{523}\,, \\ \text{» } R_2 & \text{»} & \text{»} & \varphi_3^{(2)} \equiv U^2_3 U^2_1 c_{123} c_{431} c_{531}\,, \\ \text{» } R_3 & \text{»} & \text{»} & \varphi_3^{(3)} \equiv U^2_1 U^2_2 c_{123} c_{412} c_{512}\,. \end{array}$$

Due qualunque di queste reti: le R_i, R_l, risultano riferite fra di loro con una omografia Ω_m (per $i, l, m = 1, 2, 3$ in qualsiasi ordine) in modo che due superficie omologhe segano la conica data c_{45m} negli stessi punti fissi U_m, U_4, U_5 (il primo contato due volte) e nella medesima coppia di punti variabili. Con ciò nel fascio determinato da due superficie omologhe, vi è una superficie che contiene la conica c_{45m}.

Nella omografia Ω_m si corrispondono i fasci F_i, F_l costituiti rispettivamente dalle superficie degeneri delle due reti che comprendono il piano $U_1U_2U_3$, e propriamente due superficie omologhe dei due fasci sono costituite dal piano $U_1U_2U_3$ e da due quadriche $\varphi_2^{(i)} \equiv c_{4lm} c_{5lm}$, $\varphi_2^{(l)} \equiv c_{4im} c_{5im}$ che segano la conica c_{45m} nei punti fissi U_m, U_4, U_5 e nello stesso punto variabile.

Perciò nelle tre reti R_1, R_2, R_3, fuori dei fasci F_1, F_2, F_3 a due a due omologhi nelle omografie $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, esiste una sola terna di superficie a due a due omologhe nelle anzidette omografie. Esse determinano una rete R, che ha per base la conica c_{123} e che contiene tre superficie, le quali passano rispettivamente per le coniche $c_{145}, c_{245}, c_{345}$. Perciò la rete R determina un complesso di coniche soddisfacenti alle condizioni indicate nel teorema.

In tutti i casi esaminati si è sempre supposto che i punti fondamentali dati siano in posizione generica.

CAPITOLO SESTO

§ XV.

I complessi $\Gamma_1, \ldots \Gamma_{16}$ aventi la medesima superficie fondamentale.

28. Dato un complesso bilineare di coniche Γ affatto arbitrario, si è visto che nel complesso di rette K che risulta determinato col complesso Γ, esistono 15 sistemi $X_1, \ldots X_{15}$ di schiere rigate, costituiti rispettivamente dalle schiere rigate coordinate alle rette che passano per i punti fondamentali $U_1, \ldots U_{15}$ (n.° 15).

Di una qualsiasi schiera ρ del sistema X_1 la direttrice r' e la generatrice r che escono dal punto U_1, sono rispettivamente la retta a cui è coordinata la ρ, e la retta omologa alla precedente nella omografia caratteristica H_1 che si ha nella stella (U_1), sicchè la schiera ρ è univocamente determinata quando ne sia data ad arbitrio nella stella (U_1) la direttrice r' o la generatrice r.

E la corrispondenza biunivoca che intercede fra i raggi del complesso K ed i punti dello spazio, può costruirsi mediante il sistema X_1, pel fatto che un raggio generico o del complesso che appartenga alla schiera ρ del sistema, è coordinato al punto d'incontro con la direttrice r' della ρ che passa pel punto U_1.

La proprietà caratteristica di una direttrice di una schiera ρ si è che la superficie φ_3 del complesso Γ dovuta a tale retta contiene un raggio r' della stella (U_1). Perciò le schiere ρ' incidenti alle schiere ρ costituiscono un complesso di rette K_1 caratterizzato dalla proprietà innanzi detta.

Questo complesso K_1 può essere riferito allo spazio di punti mediante il sistema X'_1 delle schiere ρ', in maniera analoga a quella con la quale il complesso K è riferito allo stesso spazio mediante il sistema X_1 delle schiere ρ. Basta cioè assumere come omologo di un raggio generico o' del complesso K_1 che sia sulla schiera ρ' del sistema X'_1, il suo punto d'incontro con la direttrice r della ρ' che passa pel punto U_1.

La corrispondenza che con ciò viene ad aversi fra i raggi del complesso ed i punti dello spazio, è biunivoca e prospettiva. Essa è ligata alla corrispondenza analoga che si ha pel complesso K, per la proprietà che due raggi o, o' dei due complessi che appartengano a schiere rigate incidenti dei sistemi X_1, X'_1, sono coordinati a due punti situati su due raggi della stella (U_1) omologhi nell'omografia caratteristica H_1.

Ora in un piano generico ω (o in una stella generica O) dello spazio ad ogni raggio o del complesso K si associa un raggio o' del complesso K_1, e viceversa, in modo che due raggi associati appartengono a due schiere incidenti dei sistemi X_1, X'_1. Perciò le curve c, c' coordinate ai due inviluppi di raggi dei complessi K, K_1 situati nel piano ω (o le curve g, g' coordinate ai coni dei complessi K, K_1 che hanno il vertice nel punto O) vengono proiettate dal punto U_1 secondo due coni omologhi nella omografia H_1.

Ne segue che la curva c' è di ordine 2 come la c; e la linea g che al pari della g ha un punto semplice nel punto U_1, è di 7° ordine e di genere 5, come la g.

Col variare del piano ω e del punto O nello spazio, le due linee c', g' descrivono rispettivamente due complessi Γ_1, Γ'_1 che si comportano fra di loro e rispetto al complesso K_1 nello stesso modo col quale i complessi Γ, Γ', descritti dalle linee c, g, si comportano fra di loro e rispetto al complesso K.

In particolare il *complesso* Γ_1 *risulta bilineare*; e propriamente le coniche del complesso che passano per un punto generico P' dello spazio, sono nei piani del fascio che ha per asse il raggio o' del complesso K_1 coordinato al punto P'.

29. Le coniche dei complessi Γ, Γ_1 che sono in un medesimo piano generico dello spazio, trovandosi su due coni omologhi nella omografia H_1, risultano proiettivamente della stessa natura: una di esse cioè è degenere, se è degenere l'altra. Perciò *i complessi* Γ, Γ_1 *hanno la medesima superficie fondamentale.*

Il punto U_1 è fondamentale per entrambi i complessi. Inoltre *i restanti punti fondamentali del complesso* Γ_1 *sono i punti tripli* U_{1l} *della superficie fondamentale, associati nel complesso* Γ *alle rette che da* U_1 *proiettano gli altri punti fondamentali* U_l *di* Γ; *e viceversa questi punti* U_l *sono associati nel complesso* Γ_1 *alle rette che da* U_1 *proiettano gli altri punti fondamentali* U_{1l} *di* Γ_1.

Infatti la relazione che intercede fra la retta che unisce i punti fondamentali U_1, U_l del complesso Γ, e il punto U_{1l} associato in tale complesso all'anzidetta congiungente (per $l = 2, \ldots 15$), consiste in questo che in ogni piano ω della stella (U_{1l}) la conica del complesso Γ si appoggia alla U_1U_{1l} (n.° 11). A questa retta nella omografia H_1 corrisponde il raggio U_1U_{1l} (n.° 15), e però nel piano ω la conica del complesso Γ_1 passa pel punto U_{1l}, sicchè questo punto è fondamentale per Γ_1.

Viceversa in un qualunque piano ω della stella (U_l) la conica del complesso Γ passa pel punto U_l, e però nello stesso piano la conica del complesso Γ_1 si appoggia alla retta U_1U_{1l} omologa nella omografia H_1 alla U_1U_l, sicchè nel complesso Γ_1 alla retta che unisce i punti fondamentali U_1, U_{1l} è associato il punto U_l. E ne segue il teorema.

Infine per ogni altro punto triplo U_{lm} della superficie fondamentale si ha che le curve dei complessi Γ', Γ'_1 che hanno il polo in tale punto, sono proiettate dal punto U_1 secondo due coni omologhi nella omografia H_1; e siccome la prima linea si spezza in una curva di 6° ordine che passa per U_1, e nella retta U_lU_m, così la seconda si spezza del pari in una curva di 6° ordine che passa per U_1, ed in una retta situata nel piano $U_1U_{1l}U_{1m}$ omologo nella H_1 del piano $U_1U_lU_m$. La retta in discorso deve unire due punti fondamentali del complesso Γ_1 diversi da U_1, e però risulta la $U_{1l}U_{1m}$. Perciò *nel complesso* Γ_1 *al punto* U_{lm} (*per* $l \neq m = 2, \ldots 15$) *è associata la retta* $U_{1l}U_{1m}$.

Tutti i risultati ottenuti provano che nel punto U_1 i complessi Γ, Γ_1 si comportano l'uno rispetto all'altro nel medesimo modo. Essi si diranno *coniugati* nel punto U_1.

Ripetendo per gli altri punti fondamentali del complesso Γ quel che si è detto pel punto U_1, *si hanno in tutto 15 complessi bilineari di coniche* Γ_i *che hanno tutti la medesima superficie fondamentale del complesso* Γ.

E ad ogni complesso Γ_i si associano con le note relazioni un complesso di rette K'_i ed un complesso di curve di 7° ordine Γ'_i.

Ora occorre ripetere pel complesso Γ_i quel che si è detto pel complesso Γ.

Il complesso coniugato a Γ_i nel punto fondamentale U_i è il complesso Γ. Invece il complesso coniugato a Γ_i in un altro punto fondamentale U_{il} ha in comune con Γ_i questo punto fondamentale U_{il}; e i restanti suoi punti fondamentali sono i punti associati in Γ_i alle rette $U_{il}U_i$, $U_{il}U_{im}$ che da U_{il} proiettano gli altri punti fondamentali U_i, U_{im} di Γ_i, cioè sono i punti U_l, U_{lm}; sicchè il complesso in discorso coincide col complesso Γ_l, col quale ha in comune i punti fondamentali (n.° 26).

Aggiungendo l'indice 16 ai simboli dei complessi Γ, Γ', K ed ai simboli dei punti fondamentali $U_1, \ldots U_{15}$, i risultati ottenuti potranno riassumersi nel seguente teorema:

Nello spazio i complessi bilineari di coniche del tipo più generale si distribuiscono in gruppi costituiti ciascuno da 16 complessi $\Gamma_1, \ldots \Gamma_{16}$ *aventi la medesima superficie fondamentale.*

Una coppia di complessi Γ_i, Γ_l *di un medesimo gruppo ha in comune un solo punto fondamentale* U_{il}, *il quale varia col variare della coppia. Dal punto* U_{il} *i restanti punti fondamentali* U_{im}, U_{lm} *dei complessi* Γ_i, Γ_l *vengono proiettati secondo due gruppi di raggi omologhi in un'omografia stellare* H_{il}. *I piani uniti di questa omografia sono i piani tangenti nel punto* U_{il} *alla superficie fondamentale.*

Le coniche dei complessi Γ_i, Γ_l *situate in un medesimo piano dello spazio sono su due coni omologhi nell'omografia* H_{il}; *e così nei complessi* Γ'_i, Γ'_l, *collegati ai precedenti, le due curve che hanno il polo in un medesimo punto dello spazio, si trovano su due coni omologhi nell'anzidetta omografia.*

CAPITOLO SETTIMO

§ XVI.

I complessi bilineari di coniche dotati di linee direttrici.

30. Un complesso bilineare di coniche Γ può presentare una *linea direttrice:* può accadere cioè, in casi particolari, che esista una linea c di ordine x, irriducibile o costituita da due o più linee algebriche, che sia incontrata in x punti da ogni conica del complesso Γ.

Se questo fatto si verifica, una qualsiasi curva o_7 del complesso Γ' che abbia il polo in un punto generico O dello spazio, si spezza nella c_x ed in una curva o che passa semplicemente per O; e corrispondentemente il cono del complesso K che ha il vertice nel punto O, si scinde nei due coni che proiettano la c_x e la o.

Perciò, non tenendo conto della linea c_x, il complesso Γ' risulta costituito da linee di ordine $7-x$; e così, non tenendo conto del complesso speciale costituito dalle seganti della c_x, il complesso K risulta di grado $n=6-x$. Ne segue che $x\leqq 5$.

Ora l'esistenza del complesso Γ soddisfacente alla condizione indicata, dipende dalla esistenza di una rete di superficie di 3° ordine che abbia per base la linea c_x ed una conica c_2 appoggiata in x punti alla c_x, e che non presenti altri elementi base nel piano della c_2.

Perciò riesce agevole determinare i vari casi possibili.

Ricorrendo all'uopo alla rappresentazione piana di una superficie φ_3 del complesso, e supponendo che i punti base del sistema rappresentativo siano i punti $P_1, \ldots P_6$ e che la retta a cui è dovuta la superficie, abbia per immagine il punto P_6, le linee c', o', immagini della linea direttrice c_x e di una curva o della superficie, prese assieme costituiscono una linea $c'_6 \equiv (P_1 \ldots P_5)^2 P_6$, il punto P_6 si trova sulla linea o', e queste linee o' costituiscono un fascio.

Sono queste soltanto le condizioni che debbono verificarsi per l'esistenza del complesso, sicchè riesce facile determinare i vari casi possibili.

In ogni caso la rappresentazione della superficie φ_3 fornisce immediatamente il genere delle curve o, il numero dei punti fondamentali del complesso, che sono i punti comuni a due curve o, ed il numero dei punti di appoggio della o alla linea c_x.

Un punto O della linea c_x è punto semplice di tutte le superficie φ_3 dei complessi Γ, Γ', e però è coordinato ai raggi di un fascio $(O-\omega)$ del complesso K. Questo fascio fa parte del cono di raggi del complesso di vertice O; e se il grado n del complesso è maggiore di 1, l'ulteriore parte è il cono proiettante la curva o dovuta al punto O. Questo è doppio per la o, e le tangenti sono nel piano ω.

Ad una retta che si appoggi in un punto o in due punti alla c_x, corrisponde nel complesso K una schiera rigata od un fascio; mentre una trisecante t della c_x appartiene al complesso K ed è coordinata ad ogni suo punto. Quest'ultima proprietà è conseguenza del fatto che in ogni piano ω del fascio (t) la conica del

complesso Γ è degenere e contiene la t, sicchè qualunque sia il punto O sulla t, le coniche del complesso che passano pel punto O, sono le coniche innanzi dette situate nei piani del fascio (t).

Da ciò che si è detto, segue anche che la rigata σ' delle trisecanti della c_x, se esiste, riguardata come superficie inviluppo, fa parte della superficie fondamentale σ del complesso.

La congruenza Δ dei raggi doppi del complesso K esiste se il grado n del complesso è maggiore di 2, e risulta di classe $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ e di ordine $\frac{(n-1)(n-2)}{2}-p$, se p è il genere di una curva o. Ogni punto fondamentale U è vertice di un cono di ordine $n-2$ della congruenza.

Un raggio r della Δ forma una conica del complesso Γ con una retta r' appoggiata alla linea direttrice c_x in x punti.

Infine per la genesi del complesso Γ occorre la seguente osservazione.

Fissate due coniche c_2, c'_2 del complesso, due quadriche $\varphi_2 \equiv c_2$, $\varphi'_2 \equiv c'_2$ che corrispondano ai piani delle due curve in un medesimo sistema generatore, o segano la c_x, fuori delle c_2, c_2, nello stesso gruppo di x punti, o contengono entrambe la c_x. Perciò un sistema generatore del complesso Γ o ha x punti base sulla linea c_x, o ha per base questa linea. Nel primo caso le quadriche del sistema segano la c_x in gruppi di x punti variabili situati su i corrispondenti piani dello spazio.

31. Ciò posto, per un complesso bilineare di coniche dotato di linee direttrici sono possibili i seguenti casi:

1.° *La linea direttrice è una retta c.* ($c \rightarrow c'_2 \equiv P_1 \ldots P_5$, $o \rightarrow c'_4 \equiv P_1 \ldots P_8$, $10U'$) *).

Le curve o sono di 6° ordine e di genere 3, hanno 10 punti comuni $U_1 \ldots U_{10}$ e si appoggiano alla c ciascuna in 3 punti.

Il complesso K è di 5° grado; la congruenza Δ è di classe 6 e di ordine 3; la superficie fondamentale è una superficie unica di 5ª classe.

La direttrice c e tre punti fondamentali U sono base di un sistema generatore del complesso Γ.

2.° *La linea direttrice è una conica c_2.* ($c_2 \rightarrow c'_2 \equiv P_2 \ldots P_5$, $o \rightarrow c'_4 \equiv P_1^2 P_2 \ldots P_6$. $7U'$).

Le curve o sono di 5° ordine e di genere 2, hanno 7 punti comuni $U_1, \ldots U_7$ e si appoggiano alla c_2 ciascuna in 4 punti. Il complesso K è di 4° grado.

La direttrice c_2 ed un punto fondamentale U sono base di un sistema generatore del complesso Γ. Nella corrispondente omografia Ω alle quadriche degeneri del sistema, costituite ciascuna dal piano ω della c_2 e da un piano π della stella (U), corrispondono i piani π' di una stella (O) omografica a quella dei piani π. In un piano π' la conica del complesso Γ si spezza nella retta $r \equiv \omega\pi$, corda della c_2, ed in un raggio $r' \equiv \pi\pi'$ della congruenza Δ. Questa perciò è la congruenza generata dalle due stelle di raggi omografiche (U), (O).

La cubica gobba direttrice della congruenza passa pel punto O e per i punti $U_1, \ldots U_7$.

---

*) Con questa scrittura si indica che nella rappresentazione di una superficie φ_3 del complesso le linee c, o hanno per immagini le curve c'_2, c'_4.

La superficie fondamentale, oltre alla stella di piani (O), comprende una superficie di 4ª classe, inviluppo dei piani sostegni delle coniche degeneri del complesso Γ costituite da rette uniseganti della c_2.

3.° *Le linee direttrici sono due rette sghembe* c, c'. $(c \rightarrow c'_2 \equiv P_1 \ldots P_5$, $c' \rightarrow c'_1 \equiv P_1 P_2$; $o \rightarrow c'_3 \equiv P_3 \ldots P_6, 5U')$.

Le curve o sono di 5° ordine e di genere 1, hanno 5 punti comuni $U_1, \ldots U_5$ e si appoggiano a ciascuna delle rette c, c' in 3 punti.

Il complesso K è di 4° grado: la congruenza Δ è di classe 3 e di ordine 2.

Le rette c, c' sono basi di un sistema generatore del complesso Γ.

Nella corrispondente omografia Ω le quadriche del sistema che degenerano in piani, hanno per omologhi i piani tangenti di una superficie inviluppo di 2ª classe. Questa fa parte della superficie fondamentale. L'ulteriore parte è l'inviluppo dei piani sostegni delle coniche degeneri del complesso, costituite ciascuna da una retta appoggiata alle c, c' e da un raggio della congruenza Δ.

4.° *Le superficie* φ_3 *dei complessi* Γ, Γ' *hanno in comune una retta* c *e si toccano nei singoli punti di questa retta.* $(c \rightarrow c'_2 \equiv P_1 \ldots P_5$, $o \rightarrow c'_3 \equiv P_6, 3U')$.

Le curve o sono di 5° ordine e di genere 0, hanno 3 punti comuni U_1, U_2, U_3 e si appoggiano alla c ciascuna in 4 punti.

Il complesso K è di 4° grado; la congruenza Δ è di ordine e classe 3; la superficie fondamentale è una superficie unica di classe 5.

Una superficie generica φ_3 del complesso ha un punto semplice in ogni punto della c. Invece, una superficie φ_3 dovuta ad una retta r' appoggiata alla c, ha per linea doppia la c.

Infatti il punto $O \equiv r'c$ è doppio per la φ'_3, nè gli altri punti della c possono essere semplici per la φ'_3, perchè se così fosse, le due congruenze delle tangenti alle φ_3, φ'_3 nei punti della c dovrebbero coincidere, mentre esse non risulterebbero del medesimo ordine.

Ne segue che la retta c contata due volte forma conica del complesso in un piano generico del fascio (c), e la superficie φ_3 del complesso dovuta alla c si spezza nei tre piani cU_1, cU_2, cU_3.

5.° *La linea direttrice è una curva gobba* c_4 *di 4° ordine e di 2ª specie.* $(c_4 \rightarrow c'_4 \equiv (P_1 P_2 P_3)^2 P_4 P_5$, $o \rightarrow o'_2 \equiv P_4 P_5 P_6 U')$.

Le curve o sono cubiche gobbe, hanno un punto comune U, e si appoggiano alla curva direttrice c_4 in 6 punti *).

Il complesso K è di 2° grado, contiene la stella di raggi (U), ed ha per superficie fondamentale la superficie $\varphi_4 \equiv U^3 c_4$ inviluppata dai piani sostegni delle coniche degeneri del complesso Γ formate da corde della c_4.

*) Se la curva c_4 si spezza in tre rette r_1, r_2, r_3 a due a due sghembe ed in una retta s appoggiata alle precedenti, una trasformazione birazionale $\} \varphi_3 \equiv s^2, 3r; \psi_2 \equiv s', 3P \{$ dello spazio muta il complesso Γ in un complesso tetraedrale di rette, avente per tetraedro fondamentale quello che ha per vertici i tre punti fondamentali P della trasformazione ed il punto U' omologo del punto fondamentale U del complesso Γ.

Perciò nel caso in esame *le singole coniche* c_2 *del complesso* Γ *determinano fasci di superficie di 3° ordine* $\varphi_3 \equiv s^2, 3r, c_2$, *nei quali i gruppi costituiti ciascuno dalle tre superficie degeneri che comprendono i piani* sr_1, sr_2, sr_3 *e dalla superficie che passa pel punto fondamentale* U, *sono proiettivi fra di loro.*

Le rette doppie della φ_4 sono le corde uscenti dal punto U della linea direttrice c_4. Esse costituiscono la curva o_3 dovuta al punto U.

In un piano generico ω della stella (U) la conica c_2 del complesso Γ è coordinata al fascio di raggi $(O-\omega)$ del complesso K che non appartiene alla stella (U), sicchè la c_2 sega la superficie φ_4, oltre che nel punto U e nei 4 punti di appoggio alla c_4, nel centro O dell'anzidetto fascio.

Viceversa se si parte da una superficie di Steiner $\varphi_4 \equiv U^3, 3o^2$ e su questa si assume una curva gobba c_4, le coniche c_2 che passano pel punto U e si appoggiano alla c_4 in 4 punti costituiscono una congruenza bilineare *). Ogni conica c_2 sega la superficie φ_4, fuori del punto O e della c_4, in un solo punto O, sicchè facendo corrispondere al piano ω della c_2 il raggio UO, ne risulta una reciprocità birazionale nulla nella stella (U).

E siccome in questa corrispondenza sono fondamentali le tre rette doppie o della superficie φ_4, perciò il fascio di raggi $(O-\omega)$, col variare del piano ω nella stella (U), descrive un complesso di 2° grado che contiene la stella di raggi (U) ed ha per superficie fondamentale la φ_4. E se ai singoli raggi del fascio $(O-\omega)$ si fanno corrispondere i loro punti variabili di sezione con la c_2, la corrispondenza che ne risulta fra i raggi del complesso ed i punti dello spazio, è del tipo in esame **).

---

*) Vegg. Mem. cit. *Su i vari tipi di congruenze bilineari di coniche*, pag. 157.

**) Con costruzione affatto analoga alla precedente può determinarsi una notevole corrispondenza biunivoca e prospettiva fra i raggi del complesso K e le coppie di punti di un'involuzione J dello spazio.

Basta partire da una superficie di Steiner $\varphi_4 \equiv U^3, 3o^2$ e costruire su questa una curva c_8 di genere 3, che contenga gli 8 punti di sezione della φ_4 con una conica c_2 assunta ad arbitrio nello spazio.

La c_8 è segata in 4 punti da ciascuna delle tre rette doppie o della superficie, e però essa con le tre rette o e con la conica c_2 costituisce la base di una rete di superficie di 4° ordine aventi in comune il punto doppio U.

Le linee basi variabili dei fasci di questa rete sono cubiche piane c_3 che passano pel punto U e si appoggiano in 8 punti alla c_8 ed in 2 punti alla c_2. Esse costituiscono una congruenza bilineare; e propriamente le linee c_3 che sono nei piani di un fascio generico (r) della stella (U), costituiscono una superficie φ_4 della rete; e questa superficie, col variare della retta r nella stella (U), varia nella rete omograficamente alla retta.

Ogni linea c_3 della congruenza sega la superficie φ_4, fuori del punto U e della c_8, in un solo punto O diguisachè facendo corrispondere al piano ω della c_3 il raggio UO, ne risulta una reciprocità birazionale nulla nella stella (U).

Nella corrispondenza sono fondamentali le rette doppie o della φ_4, e però il fascio di raggi $(O-\omega)$, col variare del piano ω nella stella (U), descrive un complesso di 2° grado che contiene la stella di raggi (U). E se ai singoli raggi del fascio $(O-\omega)$ si fanno corrispondere le coppie di punti in cui essi segano, oltre che in O, la c_3, ne risulta una corrispondenza prospettiva (1, 2) fra i raggi del complesso ed i punti dello spazio, del tipo indicato.

Le due corrispondenze ora stabilite sono da aggiungere a quelle esaminate nella mia Memoria: *Su le trasformazioni univoche dello spazio che determinano complessi quadratici di rette* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Serie II, vol. XXV, Maggio 1892), sopprimendo il ragionamento fatto a pag. 800 e 801 che non vale pel caso più generale, e la conclusione relativa.

Le due corrispondenze in discorso, dopo la pubblicazione dell'anzidetta mia Memoria, furono ottenute con considerazioni iperspaziali da Pieri (*Sulle trasformazioni involutorie dello spazio determinate da un complesso Hirstiano di rette.* Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Serie II, vol. XXV, Luglio 1892).

5.° *La linea direttrice è una curva gobba di 5° ordine e di genere 1.* ($c_5 \rightarrow c'_5 \equiv (P_1 \ldots P_5)^2$, $o \rightarrow c'_1 \equiv P_6$).

Il complesso K è di 1° grado, ed i complessi Γ, Γ' coincidono in un unico completamente determinato dalla linea direttrice c_5.

Tutte le proprietà che si presentano in questo caso per i complessi Γ, K, si trovano svolte ampiamente nella mia Memoria: *Su la curva gobba di 5° ordine e di genere 1* *).

L'unica proposizione che può aggiungersi a quelle ottenute nella predetta Memoria, è questa che riguarda i sistemi generatori del complesso Γ:

Sopra una curva gobba di 5° ordine e di genere 1 vi è un'involuzione fondamentale I^1_5, *nella quale ogni gruppo* $P_1 \ldots P_5$ *è base di un sistema lineare* ∞^3 *di quadriche che ad una ad una passano per le coniche dello spazio appoggiate in 5 punti alla curva, sicchè la corrispondenza che ne risulta fra i piani sostegni di queste coniche e le quadriche del sistema a cui esse appartengono, è una omografia.*

§ XVII.

I complessi bilineari di coniche dotati di piani singolari.

32. Nella omografia generatrice di un complesso bilineare di coniche Γ può accadere che una quadrica degenere del sistema generatore abbia per omologo uno dei due piani da cui essa risulta costituita.

Se ciò si verifica pel piano π, per ogni retta r di questo piano la superficie φ_3 del complesso Γ si spezza nel piano stesso ed in una quadrica φ_2, la quale col variare della retta r nel piano π, descrive evidentemente una rete Σ_0 omografica al sistema delle rette r.

In sostanza, nel caso in esame uno dei sistemi generatori del complesso Γ si riduce alla rete Σ_0 e la corrispondenza Ω relativa a tale sistema si riduce ad una omografia Ω_0 intercedente fra le quadriche della Σ_0 e le rette di un *piano singolare* π, nel senso che ad ogni quadrica φ_2 della Σ_0 corrispondono tutti i piani del fascio che ha per asse la retta r del piano π omologa della φ_2 nella Ω_0.

La proprietà caratteristica del piano π si è che in tale piano esiste una rete di coniche del complesso Γ, sezione della Σ_0.

Inoltre tutte le coniche del complesso che sono nei piani di una retta r del piano π, trovandosi su una quadrica φ_2 della Σ_0, segano la r nella medesima coppia di punti, sicchè la r appartiene alla congruenza Δ. Fra le coniche indicate due soltanto risultano degeneri, onde il piano π è triplo per l'inviluppo fondamentale σ_6.

---

*) *Rendiconti* di questa Accademia, Serie II, vol. II, 1887.

Le superficie φ_3 del complesso Γ dovute a due rette r, r' coniugate rispetto al complesso K, coincidono in un'unica, che contiene le 5 triseganti della curva c_5 appoggiate alle due rette. Delle altre 20 rette della superficie, 10 sono corde e 10 seganti semplici della c_5; e propriamente le prime 10 con le triseganti formano le coniche degeneri del complesso Γ che sono nei piani dei fasci $(r), (r')$. A pag. 182 dell'anzidetta Memoria vi è un semplice errore di stampa sul numero delle rette in discorso, già rettificato negli estratti. Cfr. la Nota di Colpitts: *On twisted quintic curves* (Amer. Journ. of Math., vol. XXIX, 1907), nella quale sono riportate le prime proposizioni da me stabilite sulla curva c_5 di genere 1 (Cap. II, pag. 337, 342).

Infine la curva del complesso Γ' che ha il polo in un punto generico O del piano π, si spezza in una cubica c_3 di questo piano ed in una curva o_4 della rete Σ_0. La c_3 è quella generata dal fascio di rette (O) del piano π e dal fascio di quadriche della rete Σ_0 omologo del precedente nella omografia Ω_0, e la o_4 è la base di questo secondo fascio. Le due curve hanno in comune 4 punti.

Corrispondentemente il cono del complesso K che ha il vertice nel punto O, si scinde nel piano π contato due volte e nel cono che dal punto O proietta la o_4.

Riguardando questa linea come omologa del punto O nella omografia Ω_0, *il complesso* K *risulta costituito dai coni che dai singoli punti* O *del piano* π *proiettano le curve omologhe* o_4 *della rete. Ogni cono è coordinato alla corrispondente curva* o_4.

I punti fondamentali del complesso Γ sono gli 8 punti base della rete Σ_0; ed i 7 punti del piano π che appartengono alle corrispondenti curve della rete.

33. Pei vari casi particolari che si presentano pel complesso Γ, basteranno le seguenti indicazioni sommarie:

1.° La rete Σ_0 può presentare una linea base c_x (per $x=1, 2, 3$).

In tale caso la c_x risulta linea direttrice del complesso Γ; le linee o basi variabili dei fasci della rete Σ_0 risultano di ordine $4-x$; ed il complesso K risulta di ordine $6-x$.

I punti O del piano π che appartengono alle linee omologhe o della rete Σ_0, sono in numero di $7-x$. Essi formano il gruppo dei punti fondamentali del complesso Γ assieme ai punti base isolati della rete Σ_0, il cui numero è $6-2x$.

Per $x=3$, si presenta l'unico tipo di complesso bilineare di coniche avente per direttrice una cubica gobba.

2.° Se il piano π contiene un punto base O della rete Σ_0, può accadere che una retta del piano e la quadrica omologa della rete Σ_0, seghino sempre nel medesimo punto variabile una retta fissa c del fascio $(O-\pi)$ *).

In tale caso la retta c risulta direttrice del complesso Γ.

Nel piano π esistono, fuori della c, 3 punti che appartengono alle corrispondenti curve o_4 della rete Σ_0. Questi punti ed i 7 punti base diversi da O della rete Σ_0 costituiscono il gruppo dei punti fondamentali del complesso Γ.

3.° Se il piano π contiene due punti base O_1, O_2 della rete Σ_0, può accadere che una retta del piano e la quadrica omologa della rete Σ_0 seghino sempre nella medesima coppia di punti variabili una conica fissa c_2 che passi pei punti O_1, O_2 **).

In tale caso la conica c_2 è linea direttrice del complesso Γ.

Le quadriche della rete Σ_0 che contengono la retta $s \equiv O_1O_2$, costituiscono un fascio. La cubica gobba ulteriore base di questo fascio sega il piano π fuori della s in un punto O tale che in un piano generico ω della stella (O) la conica del com-

---

*) A ciò basta assegnare di due fasci F_1, F_2 della rete Σ i corrispondenti fasci $(O_1), (O_2)$ del piano π, soddisfacenti all'unica condizione che il raggio O_1O_2 seghi la c nello stesso punto in cui questa è segata, oltre che in O, dalla quadrica comune ai fasci F_1, F_2. Infatti l'omografia Ω_0 soddisfacente alla condizione voluta è quella nella quale ai fasci F_1, F_2 corrispondono rispettivamente i fasci $(O_1), (O_2)$ con corrispondenza prospettiva rispetto all'asse c.

**) A ciò basta dare *a priori* la c_2 che non sia su alcuna quadrica della rete, e riguardare omologa di ogni retta r del piano la quadrica φ_2 della rete che contiene i punti rc_2.

plesso Γ si scinde nella retta $r \equiv \omega\pi$ ed in una corda dell'anzidetta cubica gobba. Perciò il punto O è fondamentale pel complesso Γ. Gli altri punti fondamentali sono i 6 punti base della rete Σ_0 diversi dai punti O_1, O_2.

4.° Un complesso bilineare di coniche Γ può presentare x piani singolari $\pi_1, \dots \pi_x$ (per $x = 2, 3, 4, 5$); può accadere cioè che in un sistema generatore del complesso vi siano x quadriche degeneri, di cui ciascuna abbia per omologo uno dei due piani che la costituiscono.

In tale caso si presentano x reti Σ_i generatrici del complesso.

Nell'omografia Ω_i che intercede fra una rete Σ_i ed il piano rigato (π_i), la retta $r_{il} \equiv \pi_i \pi_l$ (per $i \neq l = 1, \dots x$) è l'omologa di una quadrica degenere della Σ_i che comprende il piano π_l.

Nè si presentano altre particolarità per la Σ_i; sicchè si ha una costruzione assai semplice del complesso.

5.° Può accadere che un sistema generatore Σ_0 del complesso Γ si riduca ad un fascio di quadriche, nel qual caso l'omografia Ω_0 si riduce ad una proiettività fra il fascio ed una punteggiata (s), nel senso che ogni quadrica del fascio ha per corrispondenti tutti i piani di una stella, avente per centro il punto della (s) omologo della quadrica nell'anzidetta proiettività.

Il complesso Γ, così determinato, ha per linea direttrice la curva base del fascio Σ_0.

Inversamente ogni complesso bilineare di coniche che abbia per direttrice una quartica gobba di 1ª specie, è del tipo in esame.

In ogni piano ω che passi per la *retta singolare* s esiste un fascio di coniche del complesso Γ, sezione del fascio Σ_0; sicchè per ogni retta r incidente alla s la superficie φ_3 del complesso si scinde nel piano $\omega \equiv rs$ e nella quadrica φ_2 del fascio Σ_0 omologa del punto $O \equiv rs$.

I due punti di sezione della r con la φ_2 formano una coppia singolare del complesso Γ; onde il complesso K si riduce al complesso delle seganti della s contato due volte, e le curve o_7 del complesso Γ' si spezzano tutte nella curva base del fascio Σ_0 e nelle cubiche piane c_3 che i singoli fasci di raggi $(O - \omega)$ prospettivi alla punteggiata (s) generano col fascio Σ_0 proiettivo alla punteggiata.

Ogni cubica c_3 sega la retta s nei punti fondamentali U_1, U_2, U_3 del complesso, nei punti, cioè, della s che appartengono alle quadriche omologhe del fascio Σ_0.

I piani sostegni delle coniche degeneri del complesso Γ inviluppano una superficie unica di 5ª classe. I piani del fascio (s) sono tripli per tale inviluppo.

Il complesso Γ è del tutto determinato quando ne sono dati il fascio generatore Σ_0 ed i punti fondamentali U_1, U_2, U_3 sulla retta s.

Ora può accadere che il fascio Σ_0 contenga una quadrica degenere $\pi\pi'$, e che il punto fondamentale U_3 sia su tale quadrica, ad es. sul piano π.

Allora questo piano risulta singolare pel complesso Γ, e propriamente la superficie φ_3 dovuta ad una retta qualsiasi del piano si spezza nel piano stesso ed in una quadrica φ_2 che passa per gli altri due punti fondamentali U_1, U_2 del complesso e per la conica base del fascio Σ_0 che è nel piano π'.

Perciò il complesso nel caso in esame oltre al fascio Σ_0 presenta una rete generatrice di quadriche.

§ XVIII.

I complessi bilineari di coniche dotati di punti singolari.

34. Un punto fondamentale U di un complesso bilineare di coniche è *singolare* se in ogni piano della stella (U) la conica del complesso si spezzi in due rette che si seghino nel punto U.

Questo fatto si verifica quando in un sistema Σ generatore del complesso ogni quadrica della rete R_0 che ha un punto base nel punto U, risulti tangente in questo punto al piano corrispondente della stella (U).

In tale caso la stella di piani (U) fa parte dell'inviluppo fondamentale del complesso Γ.

Inoltre la rete delle superficie φ_3 del complesso dovute alle singole rette della stella (U), è costituita dai coni di 3° ordine che passano pei 7 raggi $r_1, \ldots r_7$ che dal punto U proiettano gli altri 7 punti base della rete R_0, sicchè due raggi della stella che costituiscano una conica del complesso, sono coniugati nella involuzione di classe 1 che ammette per coni uniti i coni dell'anzidetta rete.

I raggi base $r_1, \ldots r_7$ formano la linea c_7 che ha il polo nel punto U, e però gli altri 14 punti fondamentali U_i, U'_i (per $i = 1, \ldots 7$) sono i punti in cui le $r_1, \ldots r_7$ segano, oltre che nel punto U, un'altra qualsiasi superficie φ_3 del complesso.

La curva c_7 del complesso Γ' che ha il polo in un punto generico O dello spazio, si trova sul cono χ_3 dovuto al raggio OU, e però questo raggio è doppio pel cono che proietta la curva dal punto O.

Ne segue che i raggi della stella (U) sono doppi pel complesso K, sicchè l'ordine della restante congruenza Δ si riduce a 4.

Con considerazioni analoghe alle precedenti si determinano i complessi Γ, che presentano 2, 3, 5 o ∞^1 punti singolari.

1.° Partendo da un fascio Φ di coni di 2° ordine che abbiano in comune il vertice O e le generatrici s, s_1, s_2, s_3, si assumano due reti di quadriche R, R' che contengano entrambe il fascio Φ, senza presentare ulteriori particolarità.

Le due reti appartengono ad un medesimo sistema lineare ∞^3 Σ. Ognuna di esse ha due punti base su ciascuna delle rette s, s_1, s_2, s_3.

Assumendo sulla s un punto base U della R ed un punto base U' della R', resta determinata un'omografia Ω fra le quadriche del sistema Σ ed i piani dello spazio, nella quale le reti R, R' hanno per omologhe le stelle (U), (U'), in modo che ogni quadrica dell'una o dell'altra rete risulta tangente al piano omologo.

Il complesso Γ generato dall'anzidetta omografia Ω, ha i punti singolari U, U'.

Viceversa ogni complesso Γ dotato di 2 punti singolari ha la genesi ora indicata.

Le linee del complesso Γ' che hanno i poli nei punti U, U', sono costituite l'una dalle rette s, u_i, v_i, l'altra dalle rette s, u'_i, v'_i (per $i = 1, 2, 3$) che dai punti U, U' proiettano rispettivamente i restanti punti base delle reti R, R'.

Le due coppie $u_i v_i$, $u'_i v'_i$ appartengono al piano $\sigma_i \equiv s s_i$ e però si segano in 4 punti fondamentali U_i.

L'ultimo punto fondamentale U del complesso si trova sulla retta U_1U_2.

Nella omografia Ω ad ogni cono del fascio Φ corrisponde il suo piano tangente lungo la s; perciò in un piano generico del fascio (s) la conica del complesso si riduce alla retta s contata due volte, mentre i tre piani $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ risultano singolari.

La rete generatrice Σ_i dovuta al piano σ_i ha per base gli 8 punti fondamentali U_l, U_m (per $i, l, m = 1, 2, 3$ in qualsiasi ordine), e nella corrispondente omografia Ω_i ai coni

$$\psi_i \equiv u_l v_l u_m v_m u_i \quad , \quad \chi_i \equiv u_l v_l u_m v_m v_i \quad , \quad \psi'_i \equiv u'_l v'_l u'_m v'_m u'_i \quad , \quad \chi'_i \equiv u'_l v'_l u'_m v'_m v'_i$$

corrispondono rispettivamente le rette u_i, v_i, u'_i, v'_i.

Ciò prova che il complesso Γ è completamente determinato dai tre quadrilateri completi $u_i v_i u'_i v'_i$, non complanari, aventi in comune i vertici opposti U, U'.

2.° Partendo da una coppia di piani σ, τ, se si assegnano tre fasci di coni di 2° ordine Φ_1, Φ_2, Φ_3 che contengano tutti il cono degenere $\sigma\tau$, resta determinato un sistema lineare ∞^3 di quadriche che comprende i tre fasci.

E se il gruppo base del fascio Φ_i è costituito dalle due coppie di rette $s_i s'_i$, $t_i t'_i$ situate rispettivamente nei piani σ, τ e concorrenti nel punto O_i della retta $r \equiv \sigma\tau$, è possibile riferire omograficamente l'anzidetto sistema di quadriche e lo spazio di piani in modo che ai coni dei fasci Φ_1, Φ_2, Φ_3 corrispondano i piani tangenti agli stessi coni lungo le rette s_1, s_2, s_3 rispettivamente, sicchè al cono degenere $\sigma\tau$ corrisponda sempre il piano σ.

Con ciò le reti R_1, R_2, R_3 del sistema che comprendono rispettivamente le coppie di fasci $\Phi_2\Phi_3$, $\Phi_3\Phi_1$, $\Phi_1\Phi_2$ hanno per omologhe le stelle di piani che hanno i centri nei punti $U_1 \equiv s_2 s_3$, $U_2 \equiv s_3 s_1$, $U_3 \equiv s_1 s_2$, in modo che ogni quadrica di una qualunque R_i delle tre reti ha per omologo il suo piano tangente nel punto U_i.

Perciò il complesso Γ generato dall' anzidetta omografia ha i punti singolari U_1, U_2, U_3.

Viceversa ogni complesso Γ dotato di 3 punti singolari ha la genesi indicata.

Da tale genesi segue innanzi tutto che nel complesso, oltre al piano σ, risultano singolari i piani $\sigma_1 \equiv s_1 t_1$, $\sigma'_1 \equiv s_1 t'_1$; $\sigma_2 \equiv s_2 t_2$, $\sigma'_2 \equiv s_2 t'_2$; $\sigma_3 \equiv s_3 t_3$, $\sigma'_3 \equiv s_3 t'_3$.

Inoltre il gruppo base della rete R_i è costituito dalle due quaterne sezioni l'una delle coppie $s_l s'_l$, $s_m s'_m$ del piano σ, l'altra delle coppie $t_l t'_l$, $t_m t'_m$ del piano τ. Perciò se i vertici del trilatero $s_1 s_2 s_3$ sono i punti V_1, V_2, V_3, la linea o_i dovuta al punto U_i si spezza nelle rette $s_l, s_m, U_i V_i$ del piano σ e nelle rette comuni alle due coppie di piani $\sigma_l \sigma'_l$, $\sigma_m \sigma'_m$; ed i punti fondamentali del complesso Γ sono: i punti U_1, U_2, U_3; il punto U_0 comune alle rette U_1V_1, U_2V_2, U_3V_3, centro dell'omologia, di asse $r \equiv \sigma\tau$, che intercede fra i trilateri $s_1 s_2 s_3$, $s'_1 s'_2 s'_3$; i punti U'_1, U'_2, U'_3 nei quali le U_1V_1, U_2V_2, U_3V_3 segano rispettivamente le s_1, s_2, s_3; e gli 8 punti comuni alle tre coppie di piani $\sigma_1\sigma'_1$, $\sigma_2\sigma'_2$, $\sigma_3\sigma'_3$.

La rete generatrice del complesso dovuta al piano σ comprende le tre quadriche degeneri $\sigma_1\sigma'_1$, $\sigma_2\sigma'_2$, $\sigma_3\sigma'_3$ che nella corrispondente omografia Ω hanno per omologhe le rette s_1, s_2, s_3; mentre al fascio della rete che ha un punto base nel punto U_0, corrisponde il fascio di rette che ha il centro nello stesso punto.

Ciò prova che il complesso Γ è completamente determinato dalle tre coppie di piani $\sigma_1\sigma'_1, \sigma_2\sigma'_2, \sigma_3\sigma'_3$ uscenti dalle rette s_1, s_2, s_3 del piano σ e dal punto U_0 di tale piano non situato sulle rette s.

3.° Se il punto U_0 si assume sulla retta o che unisce i due punti base $U_4 \equiv \sigma_1\sigma_2\sigma_3$, $U_5 \equiv \sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3$ della rete R, il complesso Γ acquista altri due punti singolari nei predetti punti U_4, U_5.

Infatti l'omologia armonica dello spazio che ha il piano fondamentale σ ed il centro nel punto O, coniugato armonico del punto $U_0 \equiv o\sigma$ rispetto ai punti U_4, U_5, muta in sè stessa ognuna delle tre coppie di piani $\sigma_1\sigma'_1, \sigma_2\sigma'_2, \sigma_3\sigma'_3$, e però trasforma la rete R in sè stessa; onde gli 8 punti base della rete si distribuiscono in coppie situate su 4 rette della stella (O), e queste rette costituiscono il gruppo base di un fascio di coni di 2° ordine appartenente alla rete. Una delle 4 rette è la $o \equiv U_4U_5$.

Rispetto ad ogni quadrica φ_2 della rete il punto O è polo del piano σ; e se alla φ_2 si fa corrispondere la retta r del piano σ comune ai piani tangenti alla φ_2 nei punti U_4, U_5, l'omografia che ne risulta fra la rete R ed il piano rigato (σ), coincide con l'omografia Ω generatrice del complesso, perchè in entrambe alle quadriche degeneri $\sigma_1\sigma'_1, \sigma_2\sigma'_2, \sigma_3\sigma'_3$ ed al fascio di quadriche che passano pel punto U_0, le quali risultano essere i coni innanzi detti, corrispondono le rette s_1, s_2, s_3 ed i raggi del fascio (U_0). Perciò le coniche del complesso Γ situate nei singoli piani U_4r, U_5r delle stelle (U_4), (U_5) si spezzano in coppie di raggi di queste stelle, sicchè i punti U_4, U_5 sono singolari pel complesso.

Viceversa se un complesso Γ che abbia i punti singolari U_1, U_2, U_3, acquista un altro punto singolare U_4, esso avrà ancora un quinto punto singolare U_5, e sarà del tipo ora costruito.

Il complesso è del tutto individuato dai 5 punti singolari $U_1, \ldots U_5$ dati in posizione generica nello spazio. Gli altri suoi punti fondamentali sono le sezioni di ogni retta che unisce due dei predetti punti col piano che passa per i restanti tre punti. Questi piani sono singolari pel complesso.

Inoltre in ogni stella singolare (U_i) l'involuzione costituita dalle coppie di rette che formano coniche del complesso, è l'involuzione di 2° ordine e di 1ª classe che ammette per raggi uniti i 4 raggi che da U_i proiettano i restanti punti singolari.

Perciò il complesso in esame è il complesso di **H u m b e r t** dovuto al pentagono gobbo completo $U_1 \ldots U_5$ *).

4.° In un complesso bilineare di coniche possono risultare singolari tutti i punti di una retta s, può accadere cioè che in qualsiasi piano generico ω dello spazio la conica del complesso si scinda in due rette u, u' segantisi sulla s.

In tale caso le superficie del complesso dovute alle rette del piano ω sono superficie gobbe di 3° ordine aventi a comune la direttrice doppia s e le due generatrici u, u', sicchè nella rete che esse costituiscono, vi è una superficie degenere che si spezza nei piani su, su' ed in un piano π che contiene i tre punti base U_1, U_2, U_3 della rete.

---

*) *Sur un complexe remarquable de coniques .....* Journal de l'Ecole Polytechnique, Cahier LXIV, 1894.

Questa superficie è dovuta alla retta sezione dei piani π, ω, sicchè il primo di questi piani è singolare pel complesso, e propriamente per ogni sua retta r si ha che la superficie φ_2 dovuta a tale retta è una coppia di piani $\rho'\rho''$ del fascio (s), la quale col variare della retta r in un fascio, descrive un' involuzione e viceversa.

In particolare alle involuzioni paraboliche del fascio (s) corrispondono nel piano π fasci di rette aventi i centri su di una conica c_2, sicchè ne risulta una proiettività fra i piani del fascio ed i punti della c_2 in modo che ad una retta r del piano π corrisponde la coppia di piani $\rho'\rho''$ omologa nell'anzidetta proiettività della coppia di punti $R'R''$ sezione della r con la c_2.

Perciò il complesso è completamente determinato quando sia data la proiettività in discorso, perchè allora per un qualunque piano ω dello spazio, che seghi il piano π secondo la retta r, resta determinata la conica $\omega(\rho'\rho'')$ del complesso situata in quel piano.

In particolare i tre punti fondamentali U_1, U_2, U_3 del complesso sono i punti della conica c_2 che si trovano nei piani corrispondenti del fascio (s).

Inoltre le coniche del complesso che passano per un punto generico O dello spazio, si trovano nei piani che passano pel punto O e pel punto R' della conica c_2 omologo del piano $\rho' \equiv sO$, sicchè il complesso K è costituito dalle seganti della conica c_2; e propriamente ogni retta che si appoggi alla c_2 in un punto R' è coordinata al suo punto di sezione col piano ρ' del fascio (s) omologo di R' nella proiettività assegnata.

In particolare le rette coordinate ai punti di una conica $\omega(\rho'\rho'')$ del complesso costituiscono i due fasci $(R'), (R'')$ del piano ω che hanno i centri sulla conica c_2; e così la curva del complesso Γ che ha il polo in un punto generico O dello spazio, è la cubica gobba generata dalla corrispondenza proiettiva che viene ad aversi fra le rette che dal punto O proiettano i punti della c_2 ed i piani del fascio (s) omologhi di questi punti. Perciò la cubica in discorso passa pei punti O, U_1, U_2, U_3 e pei due punti di sezione della retta s col cono che dal punto O proietta la c_2.

Se la retta s e la conica c_2 si segano in *un* punto, può accadere che ogni piano del fascio (s) passi pel corrispondente punto della c_2.

In tale caso ogni conica del complesso Γ è costituita da due raggi complanari della congruenza di rette, di 1° ordine e di 2ª classe, che ha per direttrici le s, c_2; sicchè le coniche del complesso che passano per un punto generico O dello spazio, hanno in comune il raggio o della congruenza che passa per O, e perciò giacciono nei piani del fascio (o).

È questo l'unico caso in cui le rette o dovute ai singoli punti O dello spazio non costituiscono un complesso ma una congruenza.

CAPITOLO OTTAVO

§ XIX.

Le involuzioni dello spazio collegate ad un complesso bilineare di coniche.

35. Le proprietà fondamentali stabilite nello spazio pei complessi bilineari di coniche si estendono assai agevolmente ai complessi bilineari di curve piane di ordine arbitrario.

Qui basterà notare che dato nello spazio un complesso bilineare Γ_n, per ogni punto generico O resta determinato un raggio o uscente da O, comune ai piani sostegni delle curve c_n del complesso che passano pel punto O. Col variare di questo punto nello spazio, il raggio o descrive un complesso K il quale in generale dalla genesi ora indicata risulta riferito con corrispondenza biunivoca e prospettiva allo spazio di punti.

Non è escluso però che in casi particolari la corrispondenza in discorso sia una corrispondenza $|1, m|$, non è escluso cioè che in casi particolari le curve c_n del complesso uscenti da un punto generico O_1 abbiano tutte in comune altri $m-1$ punti $O_2, \ldots O_m$ situati col punto O_1 su di un medesimo raggio o del complesso K, per $n \geqq m > 1$.

Viceversa se un complesso di rette è riferito con corrispondenza prospettiva allo spazio di punti in modo che ad ogni raggio generico o del complesso corrispondano m suoi punti $O_1, \ldots O_m$, per $m \geq 1$, mentre un qualunque punto generico O_i dello spazio risulti l'omologo di un solo raggio o del complesso, le linee c di ordine $n \geq m$ omologhe in siffatta corrispondenza degli inviluppi di raggi del complesso situati nei singoli piani dello spazio costituiscono un complesso bilineare Γ_n.

Perciò *nello spazio la teoria dei complessi bilineari di curve piane di ordine arbitrario* n, *coincide con la teoria dei complessi di rette riferibili con corrispondenza prospettiva allo spazio di punti.*

Questa teoria può essere stabilita con procedimenti affatto analoghi a quelli tenuti pel caso di n $= 2$.

Intanto per i risultati già ottenuti *possono ritenersi noti tutti i tipi di complessi di rette riferibili con corrispondenza prospettiva allo spazio di punti, in modo che le curve omologhe degli inviluppi piani del complesso siano di 2° ordine.*

Per tutti questi complessi è $m = 1$, escluso soltanto il caso indicato nel numero 33, 5°, nel quale il complesso K è costituito dalle seganti di una retta fissa s, e la corrispondenza $|1, 2|$ che lo liga allo spazio di punti, è ottenuta riferendo proiettivamente la punteggiata (s) ad un fascio di quadriche, e riguardando omologhi di un qualunque raggio del complesso, che incontri la s nel punto P, i due punti in cui esso sega la quadrica del fascio omologa del punto P.

Pel caso più semplice di $n = 1$, si ha il teorema che: *L'unico complesso di rette non singolare che sia riferibile con corrispondenza biunivoca e prospettiva allo*

spazio di punti in modo che ai raggi del complesso situati in un qualsiasi piano generico dello spazio corrispondano i punti di una retta, è il complesso tetraedrale.

Infatti in un complesso K soddisfacente alla condizione indicata, i raggi che corrispondono ai punti di una retta generica s dello spazio, costituiscono una rigata che in un qualsiasi piano ω del fascio (s) ha una sola generatrice, omologa del punto di sezione della s con la retta c luogo dei punti omologhi dei raggi del complesso situati nel piano ω.

Inoltre la rigata ha per direttrice semplice la s, e però risulta di 2° grado. Corrispondentemente ogni superficie φ, omologa di una congruenza del complesso K costituita dai raggi che incontrano una retta generica r dello spazio, è di 2° ordine.

Col variare della retta r in un piano ω, la superficie φ_2 descrive una rete R_ω, che ha per base la retta c del piano ω, in modo che le superficie della rete dovute alle rette r di un fascio (O) costituiscono a loro volta un fascio, il quale ha per base variabile la curva o omologa del cono del complesso K di vertice O.

Ora nel caso più generale la rete R_ω presenta soltanto 4 punti base $U_1, \ldots U_4$ fuori della c, sicchè la curva o è una cubica gobba che passa per i punti U, ed il cono che la proietta dal suo punto O è di 2° ordine e contiene i predetti punti.

Perciò il complesso K è un complesso tetraedrale che ha i punti fondamentali $U_1, \ldots U_4$.

Inoltre se su di un raggio o del complesso si fissa ad arbitrio un punto O′ diverso dal punto O omologo del raggio, resta determinata nello spazio una omografia Ω, nella quale al punto O è omologo il punto O′, e sempre due punti omologhi P, P′ sono sul raggio p del complesso K omologo del punto P.

Infatti le superficie φ'_2 dovute alle rette r' della stella (O′) hanno tutte in comune la cubica gobba o'_3 dovuta al punto O′, e però esse passano per le singole rette r che escono dal punto O di tale cubica; e propriamente la superficie φ'_2 dovuta alla retta r' della (O′) contiene la retta r della stella (O) omologa della r' nella omografia generatrice della cubica o'_3.

Ora per due rette omologhe r, r' si ha anche che la schiera rigata ρ del complesso K omologa della punteggiata (r) ha una seconda direttrice nella retta r', sicchè le punteggiate $(r), (r')$ risultano riferite fra di loro proiettivamente in modo che due punti omologhi sono su di un medesimo raggio della rigata ρ.

Col variare delle rette r, r' nelle due stelle, le anzidette proiettività determinano una corrispondenza birazionale Ω nello spazio, nella quale al punto O è omologo il punto O′, e sempre due punti omologhi P, P′ sono sul raggio p del complesso K omologo del punto P.

Se il punto P varia su di una retta generica a dello spazio, il punto P′ varia sulla quadrica sostegno della schiera α del complesso K omologa della punteggiata (a). Ogni raggio della α contiene un solo punto P′, nè questo viene mai a cadere sulla a che non appartiene al complesso. Perciò il punto P′ descrive una retta a', e la corrispondenza Ω è una omografia.

Si ottiene così la più semplice corrispondenza che possa stabilirsi fra i raggi di un complesso tetraedrale ed i punti dello spazio *).

---

*) Vegg. ad es. Reye, *Die Geometrie der Lage.* Dritte Abteilung. Leipzig, 1910, pag. 9.

A questa corrispondenza si associa quella intercedente fra i piani ω dello spazio e le rette c che sono i raggi del complesso K sezioni dei piani ω con i loro omologhi nella inversa della omografia Ω.

Le relazioni che intercedono fra le due corrispondenze si invertono dualmente, scambiando in particolare i vertici del tetraedro fondamentale con le facce del tetraedro stesso.

Le cose dette non mutano se la rete R_ω presenta una retta base s' appoggiata alla c e due punti isolati U, U'. Per altro in tale caso ogni cubica o_3 si spezza nella s' ed in una conica $o_2 \equiv UU'$, onde il complesso K si scinde nel sistema delle rette o appoggiate alla retta $s \equiv UU'$ e nel sistema delle rette c appoggiate alla retta s'; e ciò dipende dal fatto che nell'omografia Ω, determinata nel modo innanzi detto, risultano uniti i piani dal fascio (s) e i punti della retta s'.

Gli ulteriori elementi uniti della corrispondenza sono i punti U, U' della s ed i piani $s'U, s'U'$ del fascio (s').

Inoltre vi è una speciale omografia Ω che riducesi ad una proiettività Ω_0 fra il fascio di piani (s') e la punteggiata (s), in modo che il raggio o coordinato ad un punto generico O dello spazio che sia sul piano π del fascio (s'), è il raggio che unisce il punto O al punto P della retta s omologo del piano π nella Ω_0, come la retta c omologa di un piano generico ω dello spazio che seghi la s nel punto P, è la sezione del piano ω col piano π del fascio (s') omologo del punto P nella Ω_0^{-1}.

36. Avendo nello spazio un complesso bilineare di coniche del tipo più generale, non è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca e prospettiva fra le coniche del complesso ed i punti dello spazio, perchè se questa corrispondenza esistesse, ad una congruenza costituita dalle coniche del complesso situate nei piani di una stella (O) corrisponderebbe una superficie, la quale avrebbe in comune con una qualsiasi conica della congruenza, al di fuori della curva direttrice o_7, l'unico punto corrispondente a quella conica, ciò che è assurdo perchè i 6 punti comuni a questa linea ed alla o_7 contano per un numero pari o nullo di punti di sezione.

Invece *è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca e prospettiva fra le coniche di un complesso bilineare* Γ *e le coppie di punti coniugati in una corrispondenza birazionale involutoria dello spazio.*

Per determinare il tipo di una siffatta involuzione J occorre la seguente osservazione.

Per ogni conica o_2 del complesso Γ che abbia per omologa la coppia di punti coniugati $O'O''$ della J, si riguardino corrispondenti il piano ω della o_2 e la retta o_1 che unisce i predetti punti O', O'' della o_2.

Si viene con ciò a stabilire una corrispondenza biunivoca e prospettiva fra i piani ω dello spazio ed i raggi o_1 che congiungono le coppie di punti coniugati nell'involuzione J.

Ora si supponga che nel complesso K costituito dalle anzidette congiungenti, i raggi che escono da un punto generico O dello spazio, corrispondano ai piani ω di un inviluppo di classe n della stella (O).

Le coniche del complesso Γ che passano pel punto O sono nei piani di un fascio, e però fra di esse ve ne saranno n situate nei piani del predetto inviluppo.

Una qualunque di queste n coniche avrà per corrispondente una coppia della involuzione J, che contiene il punto O. Ma per l'ipotesi fatta sulla J, vi è una sola di tali coppie, onde è $n = 1$, e però nel caso più generale il complesso K è un complesso tetraedrale, ed il raggio o_1 del complesso omologo di un piano ω dello spazio può riguardarsi come sezione di questo piano col suo omologo in una data omografia Ω_1.

Dunque: *Esiste nello spazio un unico tipo di involuzione* J *che può essere riferita ad un complesso bilineare di coniche del tipo più generale, in modo che le coppie dell'involuzione appartengano una ad una alle coniche del complesso.*

L'involuzione J *è costituita dalle coppie di punti sezioni delle singole coniche* c_2 *del complesso con i piani* ω' *omologhi dei piani* ω *delle* c_2 *in una data omografia spaziale.*

Ne segue che *l'involuzione* J *può riguardarsi determinata da tre sistemi lineari* ∞^3, *due di piani ed uno di quadriche, a due a due omografici; nel senso che ogni coppia di punti coniugati nella* J *è la sezione di tre superficie omologhe dei tre sistemi.*

Si ricade con ciò in un tipo di involuzione già da me altrove studiato *).

Nel caso particolare che l'omografia Ω_1 presenti due rette s, s', l'una di punti, l'altra di piani uniti, l'involuzione J può ottenersi anche con la seguente costruzione:

È data una proiettività Ω_0 *fra un fascio di piani* (s) *ed una punteggiata* (s'). *Segando un piano* π *del fascio con le singole coniche del complesso* Γ *situate nei piani della stella che ha il centro nel punto omologo del piano* π *nella data proiettività, ottienesi un'involuzione, la quale col variare del piano* π *nel fascio descrive la involuzione spaziale* J.

E se la proiettività Ω_0, indicata nella precedente proposizione, è prospettiva, ogni retta u appoggiata alle s, s' risulta unita nella J, e propriamente nella J risultano coniugati due punti della u situati su di una medesima conica del complesso.

Per ragione di brevità non è il caso di scendere in ulteriori dettagli per i vari casi particolari che si presentano pel complesso.

Errata-Corrige

A pag. 8 in nota dopo le parole *degli ordini* n_1, n_2 si aggiunga la frase *fra loro omografici.*

finita di stampare il dì 12 Aprile 1913

*) *Su la trasformazione involutoria dello spazio che determina un complesso tetraedrale.* Rend. Accademia Lincei, vol. V, aprile 1889. Cfr. anche Wimmer, *Ueber eine allgemeine Classe von ein-zweideutige Raumtransformationen.* Zeitschrift für Mathematik und Phisik, 36 Jahrgang, 4 Heft.

INDICE

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

ANALISI CHIMICA
DELL'ACQUA MINERALE "MINERVA,,
IN TORRE ANNUNZIATA (NAPOLI)

MEMORIA

di A. PIUTTI ed E. COMANDUCCI

(presentata nell'adunanza del dì 4 Maggio 1912)

DESCRIZIONE DELLA SORGENTE

La sorgente si trova in Torre Annunziata nel lato Nord del Molino a Cilindri con Pastificio del Sig. Jennaco Antonio fu Salvatore ed è costituita da un pozzo quadrangolare, cementato internamente, profondo undici metri, nel quale l'acqua si rinnova in quantità abbondante di 15 metri cubi all'ora ed il livello si mantiene quasi costantemente a m. 1,30 dal fondo. L'eccesso dell'acqua trova un'uscita attraverso il sottosuolo di Torre che, intorno all'Opificio Jennaco, è formato di lapilli e scorie, e nel lato verso il mare, di sabbia marina, ciottoli arrotondati e conchigliette di piccoli molluschi, la cui presenza fa supporre che in tempi remoti quella regione fosse in riva al mare.

Quel pozzo venne costruito nel 1886, dopo quattro anni che si erano fatti gli scavi per le fondamenta di detto opificio, durante i quali fu scoperta una importante falda acquifera. In quegli scavi « furono rinvenute delle vasche di marmo, dei « tubi di piombo e, fra tante altre cose di poca importanza, due statue di marmo « una delle quali di squisita fattura greca, che gli archeologi ritennero rappresen- « tasse la dea Minerva. Non mancarono mosaici ed affreschi, ma nella quasi tota- « lità distrutti » [1]). Molto probabilmente quei ruderi rimontano a qualche terma dell'antica città di *Oplunto*.

L'acqua viene estratta dal pozzo mediante una pompa ed oltre l'uso domestico ed industriale, al quale fu d'allora impiegata, da poco venne messa in commercio come acqua minerale da tavola, col nome « *Minerva* » in omaggio alla statua di quella dea rinvenuta nel costruire le suddette fondamenta.

[1]) *Terra Nostra* — Conferenza letta nella sala della Scuola Tecnica G. Parini di Torre Annunziata il 26 Maggio 1907 dal Dr. Gaspare Gargiulo (Torre Annunziata, Prem. Stab. Tip. Enrico Prisco, 1907, pag. 18).

OSSERVAZIONI ED ANALISI FATTE ALLA SORGENTE

PROPRIETÀ FISICHE ED ORGANOLETTICHE

Temperatura dell'aria e dell'acqua. Venne determinata il 13 Settembre 1911 calando con una corda un termometro a massimi e minimi e lasciandolo immerso nell'acqua per $^1/_4$ d'ora. La temperatura era di 24°.5, mentre quella dell'ambiente era 25° C. — Il 20 Gennaio 1912 la temp. dell'acqua era 23°, e quella dell'ambiente 10°.

Colore e limpidità. L'acqua in esame paragonata all'acqua distillata entro tubi di vetro lunghi 75 cm. e larghi 2, si mostrò limpida e quasi incolora.

Reazione. Le carte di tornasole rosse e neutre diventano leggermente azzurre e poco dopo nettamente azzurre. (Presenza di bicarbonati alcalini).

Sapore e odore. É inodora e di sapore gradevole, acidulo.

SAGGI QUALITATIVI. [α) *Positivi*].

Anidride carbonica libera, carbonati alcalini e bicarbonati. Dibattuta con poca acqua di calce, preparata di recente e limpida, dà prima un lieve precipitato che scompare agitando, poi un intorbidamento, infine un precipitato bianco abbondante.

Carbonati e Bicarbonati. Trattata con acido cloridrico diluito svolge molta anidride carbonica.

Calcio e Magnesio. Con carbonato sodico fornisce una lieve opalescenza e dopo aggiunta di idrato sodico, un precipitato bianco abbondante.

Ferro. Trattata con soluzione di acido gallico ed acido tannico dà lievissima colorazione rossa. (Tracce).

Nitriti. Con acido solfanilico, ac. solforico conc. e cloridrato di α-naftilamnina, dà, dopo una mezz'ora, lievissima colorazione rossa (tracce minime). La prova in bianco riuscì negativa. Ripulita la sorgente e ricementata, queste tracce persistettero. (20 Marzo 1912).

Ammoniaca. Trattata con carbonato e idrato sodico e lasciata a sè per 2 ore, dette abbondante precipitato, voluminoso. Dopo decantazione del liq. limpido, questo, per aggiunta del reattivo di Nessler dette una lievissima colorazione ranciata solo dopo $^1/_2$ ora (tracce minime). Ripulita la sorgente e ricementata, queste tracce scomparvero. (20 Marzo 1912).

[β) *Negative*].

Acido solfidrico. Le carte all'acetato di piombo non annerirono, non si scolorò la soluzione diluita di iodio, nè ingiallì il carbonato di cadmio.

Solfuri. Trattato con carbonato e idrato sodico e filtrato rapidamente, il liq. non si colorò con nitroprussiato sodico.

1.° Idrotimetria

L'analisi idrotimetrica venne fatta alla sorgente col metodo Boutron e Boudet, e per la durezza totale si diluì con tre volte il volume di acqua distillata.

— 23 gradi idrotimetrici francesi, corrispondevano a 40 cc. della soluzione di cloruro di calcio al 0.25 $^0/_{00}$.

Ecco i risultati:

1. 40 cc. dell'acqua diluita (10 : 40) richiesero 35 gradi francesi.
2. 100 cc. dell'acqua in esame, bollita per tre quarti d'ora e riportata a volume con acqua distillata e bollita precedentemente, venne filtrata. 40 cc. del liquido richiesero 14 gradi francesi; 50 cc. dello stesso liquido, vennero trattati con ossolato ammonico e filtrati; 40 cc. di questo filtrato richiesero gradi 9,5.
3. 50 cc. dell'acqua in analisi vennero trattati con ossalato ammonico e filtrati; 40 cc. (10 : 40) del filtrato richiesero gradi 13,5.

Da queste determinazioni, calcolando per 40 cc. dell'acqua in esame, abbiamo:

1. Durezza totale (tutti i sali di calcio e magnesio) eguale a gradi francesi 140.
2. Durezza permanente (dei sali di magnesio e di calcio non carbonati) eguale a gradi 14 — 3 = 11.
3. Durezza dei sali di magnesio (carbonato e non carbonato), gradi 54.
4. Durezza del magnesio diverso da carbonati, gradi 9,5.

Da cui si calcola:

Durezza totale	gradi	francesi	140,0
» *permanenza*	»	»	11,0
» *temporanea*	»	»	129,0
» *dei sali di magnesio* (carbonati e non)	»	»	54,0
» » » » » (non carbonati)	»	»	9,5
» » » » *calcio* (carbonati e non)	»	»	86,0

ANALISI ESEGUITE IN LABORATORIO

I. ANALISI QUALITATIVA

Una prima analisi qualitativa venne fatta il 15 Novembre 1904, seguendo il trattato di R. Fresenius (11ª edizione francese § 247-249) nell'acqua contenuta in una damigiana inviataci dal Sig. Antonio Jennaco fu Salvatore, ben tappata e suggellata.

Quest'analisi ripetemmo alla fine del 1911 con acqua prelevata da uno di noi.

I risultati furono i seguenti:

A. *Corpi che si trovano in notevole quantità.* (Ricerca fatta con tre litri di acqua filtrata, bollita per un'ora, conservando il livello con acqua distillata calda, e filtrando).

1. Precipitati coll'ebollizione:

Acidi	*Basi*
Carbonati (abbondanti)	Calcio (abbondante)
Solfati (piccolissima quantità)	Magnesio (discreta quantità)
	Ferro (tracce)

2. Rimasti in soluzione dopo l'ebollizione:

Acidi	*Basi*
Carbonico (discreta quantità)	Calcio (piccolissima quantità)
Solforico (abbondante)	Magnesio (discreta quantità)
Cloridrico (discreta quantità)	Sodio (abbondante)
Nitrico (tracce minime)	Potassio (discreta quantità)
Silicico (poca quantità)	Ferro (tracce)
	Alluminio (piccolissima quantità)

La ricerca dei metalli pesanti fu negativa, quelle dell'*acido nitroso* col reattivo del Griess, dell'*ammoniaca* col reattivo di Nessler e dell'*acido fosforico* prima col molibdato ammonico e poi con la mistura magnesiaca svelarono la presenza di tracce di questi corpi.

L'analisi del 20 Marzo 1912 per i nitriti e l'ammoniaca, confermò la presenza di tracce minime dei primi ed escluse quella della seconda.

B. *Corpi che si trovano in piccola quantità* (Per questa ricerca vennero impiegati 20 litri di acqua).

1. Insolubili nell'acqua dopo ebollizione ed evaporazione fino a secco a bagno maria:

Acidi	*Basi*
Carbonico (abbondantissimo)	Calcio (abbondantissimo)
Solforico (discreta quantità)	Magnesio (abbondante)
Fosforico (tracce)	Alluminio (piccola quantità)
Silicico (piccola quantità)	Ferro (tracce)
	Bario (»)

2. Solubili nell'acqua dopo ebollizione ed evaporazione a secco:

Acidi	*Basi*
Carbonico (abbondante)	Sodio (discreta quantità)
Nitrico (tracce)	Potassio (discreta quantità)
Borico (»)	

C. *Corpi che si trovano in piccolissima quantità*. (Si impiegarono litri 107 di acqua).

Acidi	*Basi*
Iodidrico (tracce)	Litio (tracce)
Titanico (»)	Manganese (tracce)
Nitroso (»)	Ammoniaca (») (nella ricerca del 20 marzo 1912, non vi erano più)

Riassunto della Composizione qualitativa dell'acqua in esame

Anioni —	Cloro	discreta quantità		
	Iodio	piccolissime quantità		(tracce)
	Solforico	discreta	»	
	Nitrico	piccola	»	
	Nitroso	piccolissima	»	(tracce minime) [1]
	Carbonico	abbondante		
	Fosforico	piccolissime quantità		(tracce)
	Titanico	»	»	(»)
	Borico	»	»	(»)
	Silicico	mediocre	»	
Cationi —	Calcio	abbondante quantità		
	Magnesio	»	»	
	Sodio	discreta	»	
	Potassio	»	»	
	Ferro	piccolissima	»	
	Manganese	»	»	(tracce)
	Litio	»	»	(»)
	Ammonio	»	»	(» minime) [1]
	Alluminio	mediocre	»	
	Bario	piccolissima	»	(tracce)

II. ANALISI QUANTITATIVA

I campioni di acqua per le analisi quantitative vennero prelevati personalmente da uno di noi il 13 Settembre 1911, dentro bottiglie da uno e due litri di vetro Schott e Genossen di Jena e dentro damigiane nuove, ben lavate con gli acidi solforico e cloridrico, indi ripetute volte con l'acqua d'analizzare. Il riempimento delle bottiglie e dei palloni per l'analisi dei gas venne fatto con acqua estratta dalla sorgente, con un secchio di ferro zincato. Le damigiane si riempirono con acqua tirata su con una pompa.

2. Peso specifico

Venne determinato con un palloncino graduato da 100 cc. e con un picnometro di 50 cc., riempiti alla sorgente e turati bene con tappo di vetro. Le determinazioni furono fatte a 24°, temperatura dell'acqua alla sorgente.

	I	II
Palloncino + acqua in esame	150 — 14,2300	80 — 4,8250
» + » distillata	150 — 14,3765	80 — 4,9604
» vuoto ed asciutto	150 — 115,4350	80 — 54,8326
Peso specifico	1,0014	1,0027
Media	1,0020	

[1]) L' NH^3 nella ricerca fatta il 20 marzo 1912 con acqua prelevata alla sorgente da uno di noi, non fu più ritrovata, ma persistettero le tracce di acido nitroso.

3. Residuo fisso

In capsula di platino tarato si evaporarono a secco a b. m. separatamente i liquidi delle due determinazioni di peso specifico. Il residuo venne seccato prima a 100°, poi a 120°, ed a 180°, indi al rosso e di nuovo a 180°, dopo ripetuto trattamento con acqua carbonica.

I risultati, riferiti a 1000 gr. di acqua, furono i seguenti:

	100°	120°	180°	al rosso incipiente	a 180° dopo trattamento carbonico
I	2,8788	2,8737	2,8433	2,0624	2,8413
II	2,8794	2,8784	2,8506	2,0660	2,8449
Media	2,8791	2,87605	2,84695	2,06420	2,8431

Da questi dati si calcolano le seguenti perdite:

		I	II	Media
Perdita da 100° a 120°	gr.	0,0051	0,0100	0,00305
» » 120° a 180°	»	0,0304	0,0270	0,02910
» » 180° al rosso incipiente . .	»	0,7809	0,7846	0,78275
» » 100° » » . . .	»	0,8164	0,8134	0,81490
» a 180° dopo trattamento carbonico	»	0,0020	0,0057	0,00385

La Radioattività del residuo a 100°, eseguita appena ottenuto, fu zero.

4. Gas disciolti

I gas disciolti vennero ricercati nell'acqua contenuta in due palloni riempiti alla sorgente. Erano della capacità di circa 1000 cc., chiusi con tappi di gomma ad un foro pel quale passava una squadra di vetro chiusa nella parte che penetrava nel pallone e munita di un foro laterale nella stessa parte.

Il gas sviluppato durante il riscaldamento venne raccolto con una disposizione speciale in un cilindro graduato di 1000 cc., ripieno di una soluzione satura di cloruro di sodio, in modo che il gas non vi gorgogliasse e non vi potesse entrare minimamente l'aria dell'ambiente.

I gas vennero analizzati con gli apparecchi Hempel, assorbendo l'anidride carbonica con la potassa caustica, l'ossigeno col fosforo ordinario e il residuo non assorbito venne analizzato con l'apparecchio Piutti per la ricerca e determinazione dei gas rari.

I risultati avuti con i due campioni d'acqua, furono i seguenti:

Peso dell' acqua gr.	Volume in cc. del gas				Temperatura	Pressione mm.	Volume corretto a 0 e 760mm				Volume dei gas riferiti a 24° e 760mm		
	Totale	preso in esame	Componenti	dei singoli componenti			nei 100 cc. presi in esame	in 1000 gr. di acqua: Totale	Componenti	dei singoli componenti	Totale	Componenti	dei singoli componenti
1085	789	100	CO^2	96,30	22°	767,97	87,41	716,22	CO^2	689,65	779,30	CO^2	750,40
			O	0,45	»	»	0,40	»	O	3,19	»	O	3,47
			g.non ass.	3,25	»	»	2,96	»	g.non ass.	23,38	»	g non ass.	25,43
1092	805	100	CO^2	96,30	23°	761,67	86,25	720,97	CO^2	694,33	781,90	CO^2	755,50
			O	0,40	»	»	0,33	»	O	2,66	»	O	2,70
			g.non ass.	3,30	»	»	3,12	»	g.non ass.	23,98	»	g.non ass.	23,70
		100	CO^2	96,05	22°	»	86,32	»	CO^2	697,10	786,90	CO^2	758,50
			O	0,45	»	»	0,39	»	O	3,19	»	O	3,10
			g.non ass.	3,50	»	»	3,09	»	g non ass.	25,57	»	g.non ass.	25,30
		100	CO^2	96,60	»	»	86,87	»	CO^2	695,26	781,97	CO^2	756,50
			O	0,40	»	»	0,33	»	O	2,66	»	O	2,83
			g.non ass.	3,00	»	»	2,66	»	g.non ass.	21,28	»	g.non ass.	22,64

N. B. Nell' CO^2 così ottenuta vi è compresa anche l' CO^2 semicombinata.

Da queste determinazioni si calcola la seguente media per 1000 gr. d'acqua:

	In volume, cc.		In peso a 24° e 760mm
	a 0° e 760mm	a 24° e 760mm	
CO^2	694,10	755,23	gr. 1,37229
O	2,92	3,025	» 0,00430
Gas non assorbiti	23,55	24,27	» 0,03035 [1]

Analisi spettrale dei gas non assorbiti dal fosforo e dall'idrato potassico

Per la ricerca dei gas rari contenuti nel residuo inassorbito dal fosforo e dalla potassa caustica venne adoperato l'apparecchio Piutti, altrove descritto [2].

I gas, preventivamente seccati con anidride fosforica venivano introdotti mediante una speciale disposizione, in quantità misurata, nell'apparecchio allorchè si era raggiunto il vuoto catodico mediante il carbone di noccioli di ciliegie raffreddato con aria liquida.

Dopo l'assorbimento operato dal carbone, gli spettri residui venivano confrontati con altri ottenuti nelle stesse condizioni mediante l'aria del laboratorio, sino ad avere la medesima intensità delle righe.

I risultati ottenuti sono riuniti nella seguente tabella:

[1]) Considerando la parte non assorbita come tutto azoto.

[2]) Rend. R. Accad. Scienze Fis. e Mat. di Napoli 1909, p. 203; Gazz. Chim. Ital. XLI, 447 (1910).

Gas non assorbito dalla KOH, e dal P cc.	Volume corrispondente di aria cc.	Aria di Napoli occorrente per avere spettri delle stesse intensità cc.	Osservazioni sullo spettro
1.784	2.283	10.704	Splendido spettro dell'Argo e del Neo, visibile la riga gialla e la verde dell'Elio.
3.568	4.557	17.840	Gli spettri dell'Elio e del Neo si rafforzano, ma la D^5 del Neo è più brillante della D^3 dell'Elio.
5.352	6.851	23.192	id.
12.488	15.984	57.088	La D^3 dell'Elio è più brillante della D^5 del Neo.
16.056	20.550	76.712	Compajono le righe rosse dell'Elio.

Dall'esame di questi risultati si scorge che nei gas disciolti nell'acqua « Minerva » l'Elio vi è contenuto in quantità circa *quattro volte* maggiore che nell'aria di Napoli.

5. Anidride carbonica libera, semicombinata e combinata

Quest'analisi venne fatta seguendo il metodo Pettenkofer e Trillich modificato da Sutton, con acqua contenuta in una bottiglia di vetro S. e G. di circa **1000** cc. riempita alla sorgente.

Siccome l'acqua in esame contiene molta anidride carbonica, per la determinazione fu necessario adoperare **50** cc. di acqua, **10** cc. di soluzione di cloruro di bario al **10** %₀ e **90** cc. di soluzione baritica titolala con soluzione di acido cloridrico tale che **1** cc. corrispondeva a mgr. **1,0161** di anidride carbonica.

Ecco i risultati di tre determinazioni:

I	50 cc. liquido	limpido,	richiesero cc.	9,	di	acido	cloridrico
	altri 50 cc. »	»	» »	9,2	»	»	»
	» 50 cc. »	più precipitato	» »	127,9	»	»	»
II	50 cc. »	limpido	» »	8,7	»	»	»
	altri 50 cc. »	»	» »	8,9	»	»	»
	» 50 cc. »	più precipitato	» »	127,5	»	»	»
III	50 cc. »	limpido	» »	9,	»	»	»
	altri 50 cc. »	»	» »	9,4	»	»	»
	» 50 cc. »	più precipitato	» »	127,2	»	»	»

Da cui si calcola la seguente media:

50 cc. liquido limpido, richiesero cc.	8,9	di acido cloridrico
altri 50 cc. » » » »	9,16	» » »
» 50 cc. » più precipitato » »	127,48	» » »

Ora 8,40 cc. della soluzione baritica richiesero cc. 10 di HCl all'1,6838 ‰, da cui si calcola che 10 cc. di barite richiedono cc. 12,094 di acido cloridrico all'1,657 ‰ (corrispondente per ogni cc. ad 1 mg. di CO^2), ossia mg. 12,094 di CO^2.

Dalle medie surriferite si calcolano questi dati:

cc. HCl (1 cc. = mgr. 1,0161 CO^2) necessari per 50 cc. liquido limpido = 9,03
cc. » » » » tutta la barite libera = 27,09

quindi

$$27,09 \times 1,0161 = 27,528$$ sono i mgr. di CO^2

corrispondenti alla barite libera per ogni determinazione.

Ma

$10 : 12,094 : 90 : x \qquad x = 108,847$ mgr. CO^2 corrispondente alla barite impiegata

perciò

$108,847 - 27,528 = 81,319$ mg. CO^2 lib. e semicomb. + CO^2 corrisp. dell'MgO

Ora l'MgO trovato è di gr. 0,2308 per 1000 gr. di acqua, quindi in 50 cc. di acqua vi saranno gr. 0,011527 di MgO, corrispondenti a mg. 0,012566 di CO^2; e l'CO^2 *libera e semicombinata* sarà $81,319 - 12,566 = 68,753$ mgr.

Inoltre abbiamo:

$127,48 - 9,03 = 118,45$ cc. HCl (1 cc. = mgr. 1,0161 CO^2) per CO^2 totale e dell'MgO

quindi:

$118,45 \times 1,0161 = 120,342$ mgr. CO^2 totale e dell'MgO per 50 cc. acqua

da cui

$120,342 - 12,566 =$ mgr. 107,776 dell'CO^2 *totale* per 50 cc. acqua,

allora

$107,776 - 68,753 =$ mgr. 39,023 CO^2 *comb.* per 50 cc. acqua

e

$107,776 - (39,023 \times 2) =$ mgr. 29,73 CO^2 *lib.* per 50 cc. acqua.

Riassumendo e calcolando per 1000 gr. di acqua, abbiamo:

CO^2 *libera*	gr.	0,59339
CO^2 *combinata*	»	0,77890
CO^2 *semicombinata*	»	0,77890
CO^2 *totale*	»	2,15119

da cui si calcola il CO^2 combinato per 1000 gr. di acqua gr. 1,06215.

6. Anidride carbonica totale

Si fecero tre determinazioni seguendo il metodo Kolbe e l'apparecchio Fresenius, adoperando tre prove preparate alla sorgente con palloncini turati con tappo di gomma nei quali furono introdotti 260 cc. di acqua e un piccolo eccesso di cloruro di calcio ammoniacale.

L'anidride carbonica venne raccolta su potassa caustica contenuta in una bolla Liebig, seguita da due tubi ad U riempiti di calce sodata e cloruro di calcio secco.

I risultati furono i seguenti:

	cc. acqua	aumento peso tubo Liebig	aumento peso 1° tubo ad U	aumento peso 2° tubo ad U	gr. CO^2 totale	media
1	260	0,5396	0,0204	0,0006	0,5606	
2	260	0,5255	0,0310	0,0040	0,5605	0,5604
3	260	0,5383	0,0210	0,0012	0,5601	

Calcolando per 1000 cc. d'acqua e poi per 1000 gr., abbiamo:

	per 1000 cc.	per 1000 gr.
CO^2 *totale*	gr. 2,1555	2,1512

7. Azoto albuminoideo

Questa determinazione venne fatta col metodo Wankly, Chapmann e Smith, sopra 1 Kg. di acqua concentrata a circa 200 cc. in presenza di potassa caustica, addizionando 5 cc. di soluzione di carbonato sodico, 50 cc. di soluzione alcalina di permanganato potassico (8 gr. di $KMnO^4$, 20 gr. KOH e 100 cc. di H^2O) e raccogliendo circa 120 cc. di liquido in 50 cc. di H^2SO^4 N/100. L'eccesso di acido venne determinato con soluzione N/100 di soda caustica, della quale ne occorsero cc. 36,2. Da questo dato si calcola che l'NH^3 corrispondente all'N albuminoideo è di mgr. 2,346 per 1000 gr. di acqua.

8. Sostanze organiche ed ossigeno consumato

Non avendo notato nella calcinazione del residuo solido alcun imbrunimento, questa determinazione venne fatta col metodo Kubel e Tieman impiegando 500 gr. di acqua contenuta in una bottiglia di vetro S. e G. I risultati furono i seguenti:

	gr. acqua in esame	10 cc. soluz. acido ossalico (corrisp. ad 1 mgr. di Oss.) richiesero di $KMnO^4$, cc.	cc. soluz. di $KMnO^4$ consumati con acqua + 10 cc. acido ossalico	differenza cc.	media cc. $KMnO^4$	ossig. consumato dalle sostanze organiche di 1000 gr. d'acqua
1	500	8,75	9,90	1,15	1,175	0,2686
2	500	8,75	9,95	1,20		

9. Alogeni

Siccome l'iodio si trova solo in tracce minime ed il bromo è assente, così vennero fatte solamente le determinazioni del cloro.

I. gr. 245 di acqua fornirono gr. 0.4363 di AgCl
II. » 170 » » » » 0,3034 » »
III. » 100 » » » » 0,1783 » »

Dunque per 1000 gr. di acqua, si ha:

AgCl gr. 1,78276 corrispondente a Cl gr. 0,44088

10. Silice

Gr. 1907 di acqua vennero evaporati completamente a b. m. in una capsula di platino larga 14 cm. e profonda 7, il residuo venne ripreso varie volte con acido cloridrico concentrato, poi evaporato a secco a b. m. e quindi scaldato un poco a 120° in stufa Meyer.

Ripreso il residuo con ac. cloridrico dil. e filtrato, venne lavato bene con acqua bollente, seccato e calcinato in un crogiuolo di platino e dopo pesato venne trattato tre volte con fluoruro di ammonio ed acido solforico concentrato, indi calcinato, per eliminare tutta la silice.

Il piccolissimo residuo rimasto, analizzato, mostrò essere solfato di bario e non contenere titanio.

Per i 1907 gr. di acqua si ebbero gr. 0,1505 di silice, quindi per 1000 gr. ne abbiamo gr. 0,07892. Altra prova con gr. 1912 di acqua dettero gr. 0,1444 di SiO^2, cioè per 1000 gr. di acqua, gr. 0,07552. La media di queste due determinazioni fornì gr. 0,07722 di SiO^2 per 1000 gr. di acqua.

11. Acido solforico

La soluzione cloridrica della determinazione precedente, addizionata di cloruro di bario dette un abbondante precipitato bianco cristallino, che filtrato e lavato bene con acqua calda, venne seccato e calcinato. Per i 1907 gr. di acqua in esame si ebbero gr. 0,5350 di solfato di bario, cioè: per 1000 gr. di acqua, gr. 0,28056; da cui si calcolano gr. 0,11543 di SO^4 per 1000 gr. di acqua.

12. Ferro ed Alluminio

Separata la silice e l'acido solforico nel modo indicato nelle determinazioni precedenti, il liquido venne addizionato di cloruro ammonico e di ammoniaca, scaldato leggermente, filtrato e lavato bene con acqua calda. Questo precipitato sciolto in acido cloridrico diluito e filtrato, si precipitò con carbonato ammonico. Nell'idrato ferrico e di alluminio seccati e calcinati, venne determinato il ferro volumetricamente con soluzione N/10 di $KMnO^4$, sciogliendo il precipitato in acido solforico diluito e riducendo con zinco. Si tenne conto del ferro dello zinco titolandolo nella stessa maniera.

Per i 1907 gr. di acqua si ebbero gr. 0,0875 di $Al^2O^3 + Fe^2O^3$, mentre l'analisi volumetrica fornì gr. 0,001456 di $Fe =$ gr. 0,00208 di Fe^2O^3. Per 1000 gr. di acqua si calcolano gr. 0,04588 di $Al^2O^3 + Fe^2O^3$ e gr. 0,00109 di Fe^2O^3, quindi gr. 0,04479 di Al^2O^3. Allora si calcolano gr. 0,00237 di Al e gr. 0.00076 di Fe.

13. Calcio (totale)

Separati il ferro e l'alluminio, nel liquido alcalino venne precipitato il calcio con cloruro ammonico, ammoniaca ed ossalato ammonico. Il precipitato filtrato e lavato bene con acqua ed acido acetico diluito, venne sciolto con acido cloridrico diluito filtrato e portato a 150 cc. In 50 cc. di questo liquido venne riprecipitato l'ossalato di calcio con ammoniaca, indi filtrato e lavato bene con acqua acidulata con acido acetico, seccato e calcinato fino a peso costante. Per i 50 cc. di liquido si ebbero gr. 0,3145 di Ca O, cioè gr. 0,49483 di Ca O per 1000 gr. di acqua, da cui si calcolano gr. 0,35378 di Ca.

14. Magnesio (totale)

Per questa determinazione vennero adoperati gr. 1130 di acqua, dalla quale venne eliminata la silice con acido cloridrico, il ferro e l'alluminio con cloruro di ammonio ed ammoniaca ed i metalli alcalino-terrosi con carbonato ammonico. Il magnesio venne precipitato con fosfato ammonico. Si ebbe un abbondante precipitato il quale filtrato e lavato bene, venne risciolto in acido acetico e riprecipitato con ammoniaca indi rifiltrato, lavato bene con acqua calda, seccato a 100° e calcinato in un crogiuolo di platino fino a peso costante.

Per i gr. 1130 di acqua si ebbero gr. 0,7173 di $Mg^2P^2O^7$ corrispondenti a gr. 0,15692 di Mg. Da questi risultati si calcolano per 1000 gr. di acqua, gr. 0,63476 di $Mg^2P^2O^7$ e gr. 0,13887 di Mg.

15. Sodio e Potassio

Il residuo a 100° di gr. 1912 di acqua, venne sbarazzato dalla silice, trattandolo ripetute volte con acido cloridrico conc., dagli altri corpi, aggiungendo alla soluzione cloridrica del cloruro di bario ed un eccesso di latte di calce, e poi dai metalli alcalino-terrosi, filtrando ed al liquido aggiungendo ammoniaca, carbonato ed ossalato ammonico. Eliminato il precipitato, il liquido venne evaporato a secco e calcinato, il residuo trattato di nuovo coi predetti sali ammoniacali per togliere le ultime tracce di calcio e bario, indi di nuovo filtrato ed il liquido, addizionato di poche gocce di acido cloridrico, venne evaporato a secco e scaldato a fusione fino a peso costante.

In questi cloruri venne determinato il potassio, sciogliendoli in 150 cc. di acqua distillata ed a 10 cc. di questa soluzione aggiungendo cloruro di platino, evaporando a secco a b. m. e seccando a 180° il residuo, lavato ripetute volte con alcole metilico.

I risultati per i 1912 gr. di acqua presi in esame, furono:

Cloruro di sodio e potassio	gr.	2,5210
Cloroplatinato potassico	»	2,2410
Cloruro potassico corrispondente	»	0,6876

dai quali, calcolando per 1000 gr. di acqua, abbiamo:

Cloruro di sodio	gr.	0,95887
Sodio	»	0,37783
Cloruro di potassio	»	0,35963
Potassio	»	0,18873

16. Alcalinità del residuo seccato a 180°

(Carbonati alcalini)

Gr. 0,2840 di residuo vennero posti sopra un filtro Berzelius, lavati con acqua distillata bollente ed il liquido venne titolato con soluzione N/10 di acido solforico usando come indicatore l'arancio di metile. Occorsero cc. 8,75 di soluzione titolata, quindi per il residuo a 180° di 1000 gr. di acqua, si calcolano cc. 53,36.

Riferendo l'alcalinità in CO^2 si hanno gr. 0,19499 ed in Na^2CO^3 gr. 0,46552.

17. Alcalinità dell'acqua dopo ebollizione

(Bicarbonati alcalini)

Gr. 400 di acqua furono bolliti entro la ricordata capsula di platino e poi fu ripristinato il volume primitivo con acqua distillata e filtrato. 200 gr. del liq., titolato come sopra, richiesero cc. 17,55 di acido solforico N/10. Calcolando l'alcalinità in CO^2 per 1000 gr. di acqua, si hanno gr. 0,19305; in Na^2CO^3 gr. 0,46552 ed in $NaHCO^3$ gr. 0,73761.

18. Calcio e Magnesio solubili dopo ebollizione dell'acqua

Gr. 400 di acqua furono fatti bollire a ricadere per 1 ora, indi filtrati e su 100 cc. del liquido venne eseguita la determinazione del calcio e del magnesio, precipitando il primo con ossalato ammonico ed il secondo con fosfato ammonico. I risultati furono:

Ossido di calcio	gr.	0,0011
Pirofosfato di magnesio	»	0,0112

quindi per 1000 gr. di acqua, si calcola:

Ossido di calcio	gr.	0,01100
Calcio	»	0,00786
Pirofosfato di magnesio	»	0,11200
Magnesio	»	0,02450

19. Calcio e Magnesio solubili in acqua, del residuo a 180°

(Cloruri e solfati)

Gr. 0,3866 di residuo a 180° vennero lavati parecchie volte con acqua calda e sul liquido determinati il calcio ed il magnesio nel modo solito. I risultati furono:

Ossido di calcio	gr.	0,0150
Pirofosfato di magnesio	»	0,0152

Calcolando per il residuo di 1000 gr. di acqua, abbiamo:

Ossido di calcio	gr.	0,01105
Calcio	»	0,00790
Pirofosfato di magnesio	»	0,01120
Magnesio	»	0,02450

Facendo la media di queste due ultime determinazioni pel calcio ed il magnesio nell'acqua e nel residuo, abbiamo:

Ossido di calcio	gr.	0,0110	;	*Calcio*	gr.	0,00788
Pirofosfato di magnesio	»	0,1120	;	*Magnesio*	»	0,02450

20. Alcalinità dell'acqua

200 gr. di acqua in esame vennero addizionati di poche gocce di soluzione di arancio di metile e di 75 cc. di soluzione N/10 di H^2SO^4. Dopo ebollizione per pochi minuti e raffreddamento, venne titolato l'eccesso di acido con soda caustica N/10. Di questa ne occorsero cc. 3.7.

Quindi abbiamo:

75,7 — 3,7 = 71,3 cc. H^2SO^4 N/10 per 200 gr. di acqua
71,3 × 5 = 356,5 » » 1000 » » »

e per ciò

356,5 × 0,0022 = 0,7843 gr. CO^2 per 1000 gr. di acqua.

RIASSUNTO DELL' ANALISI QUANTITATIVA

per 1000 gr. di acqua

I. Dati analitici (medie)

(2)	Peso specifico a 24°. C	gr.	1,00200
	Sostanze sospese	»	assenti
(3)	Residuo a 100°	»	2,87910
(3)	» » 120°	»	2,87605
(3)	» » 180°	»	2,84695
(3)	» al rosso incipiente	»	2,06420
(3)	» dopo trattamento carbonico ed a 180°	»	2,84310
	Perdita di peso a 100°	»	0,00305
	» » » al rosso incipiente	»	0,81490
	» » » da 180° al rosso incipiente	»	0,78275
	» » » a 180° dopo trattamento carbonico	»	0,00385
(4)	Gas disciolti a 24° e 760mm (volume totale) cc. 782,51		
(5)	Anidride carbonica cc. 755,23	»	1,37229
	Ossigeno » 3,025	»	0,00430
	Azoto e gas rari (calcolati come N) » 24,27	»	0,03035
(5)	Anidride carbonica libera	»	0,59339
(5)	» » semicombinata	»	0,77890
(5)	» » combinata	»	0,77890
(5)	» » totale (metodo Pettenkofer-Trillich)	»	2,15119
(6)	» » » (metodo Fresenius-Kolbe)	»	2,15120
(16)	» » dei carbonati alcalini (nel residuo a 180°)	»	0,19499
(17)	» » » » » (nell'acq. boll. e filtrata)	»	0,19305
(20)	» » combinata e semicombinata (nell'acq. naturale)	»	0,78430
(8)	Sostanze organiche espresse in ossigeno consumato	mgr.	0,26860
(7)	Azoto albuminoideo espresso in ammoniaca	»	2,34600
(9)	Cloruro di argento (dal cloro)	gr.	1,78276
(11)	Solfato di bario (dall'acido solforico)	»	0,28056
(10)	Silice	»	0,07722
(13)	Ossido di calcio (totale)	»	0,49483
(18, 19)	» » (dal cloruro o solfato)	»	0,01103
(14)	Pirofosfato di magnesio (totale)	»	0,63476
(18, 19)	» » (dal cloruro o solfato)	»	0,11200
(12)	Ossido di ferro	»	0,00109
(12)	» di alluminio	»	0,04479
(15)	Cloruro di sodio (dal sodio)	»	0,95887
(15)	» » potassio (dal potassio)	»	0,35963
(1)	Durezza totale	gradi francesi	140,0
(1)	» permanente	» »	11,0
(1)	» temporanea	» »	129,0

Acido titanico
» borico
» fosforico
» nitrico
» nitroso
» iodidrico
Bario
Manganese
Litio

} in tracce

II. Dati dedotti dai precedenti

(5, 6)	Anidride carbonica totale (media)	CO^2	gr.	2,15119
(5)	» » libera (»)	CO^2	»	0,59339
(10)	Silice	SiO^2	»	0,07722
	Ione carbonico totale	CO^3	»	2,91072
	» bicarbonico totale	HCO^3	»	2,95923
(16, 17)	» » dei bicarbonati alcalini	HCO^3	»	0,26896
(5)	» carbonico combinato	CO^3	»	1,06215
(9)	» cloro	Cl	»	0,44088
(11)	» solforico	SO^4	»	0,11543
(15)	» sodio	Na	»	0,37781
(15)	» potassio	K	»	0,18873
(13)	» Calcio (totale)	Ca	»	0,35378
(18, 19)	» » (dal solfato o cloruro)	Ca	»	0,00786
(14)	» magnesio (totale)	Mg	»	0,13887
(18, 19)	» » (dal solfato o cloruro)	Mg	»	0,02450
(12)	» ferro	Fe	»	0,00076
(12)	» alluminio	Al	»	0,02370

III. Calcolo per la composizione probabile

a) Ione carbonico dei carbonati alcalini (16, 17) 0,26325
Sodio corrispondente 0,20226

Carbonato sodico = 0,46551 = Na^2CO^3

b) Sodio trovato (15) 0,37781
» combinato col CO^3 (*a*) 0,20226

Differenza = 0,17554

c) Sodio rimasto (*b*) 0,17554
Cloro corrispondente 0,26998

Cloruro di sodio = 0,44552 = NaCl

d) Cloro trovato (9) 0,44088
» combinato al sodio (*c*) 0,26998

Differenza = 0,17090

e) Cloro rimasto (*d*) 0,17090
Potassio corrispondente, trovato (15) 0,18873

Cloruro potassico = 0,35963 = KCl

f) Calcio solubile dopo ebollizione o solub. nel residuo (18, 19). . 0,00786
Ione solforico corrispondente 0,01882

Solfato di calcio = 0,02668 = $CaSO^4$

g) Magnesio solub. dopo ebollizione o solub. nel residuo (18, 19) . 0,02450
Ione solforico corrispondente 0,09661

Solfato di magnesio = 0,12111 = $MgSO^4$

h) Ione solforico del solfato di Magnesio 0,09661
» » » » di calcio 0,01882

SO^4 combinato = 0,11543
Ione solforico trovato (11) = ... = 0,11543

i) Calcio trovato (13) 0,35378
» combinato all'SO^4 (*f*) 0,00786

Differenza = 0,34592

l) Calcio rimasto (*i*) 0,34592
Ione carbonico corrispondente 0,51720

Carbonato di calcio = 0,86312 = $CaCO^3$

m) Magnesio totale trovato (14) 0,13887
» combinato all'SO^4 (*g*). 0,02450

Differenza = 0,11437

n) Magnesio rimasto (*m*) 0,11437
Ione carbonico corrispondente 0,28170

Carbonato di magnesio = 0,39607 = $MgCO^3$

o) Ione carbonico combinato col sodio (*a*). 0,26325
» » » » calcio (*l*) 0,51720
» » » » magnesio (*n*) . . . 0,28170

Ione carbonico combinato . . . . = 1,06215
» » trovato (5) . . . . = 1,06215

IV. Composizione probabile del residuo a 180° di 1000 gr. di acqua

Cloruro di sodio	NaCl	gr. 0,44552
» » potassio	KCl	» 0,35963
Solfato di calcio	$CaSO^4$	» 0,02668
» » magnesio	$MgSO^4$	» 0,12111
Carbonato di sodio	Na^2CO^3	» 0,46552
» » calcio	$CaCO^3$	» 0,86312
» » magnesio	$MgCO^3$	» 0,39607
Ossido di ferro	Fe^2O^3	» 0,00108
» » alluminio	Al^2O^3	» 0,04469
Silice	SiO^2	» 0.07722
		gr. 2,80064
	Trovato direttamente (3)	» 2,84695
	differenza	» 0,04631

V. Controllo

a) gr. 250 di acqua vennero evaporati in una capsulina di platino tarato ed il residuo, dopo essere umettato con acido solforico, venne evaporato a secco e scaldato al rosso, in presenza di carbonato ammonico. I solfati rimasti ammontarono a gr. 0,9262.

Calcolando in solfati gli elementi trovati, in ossidi il silicio ed il ferro, abbiamo:

Trovato:				
Sodio	gr. 0,37781	Calcolato in solfato di sodio	gr.	1,16506
Potassio	» 0,18873	» » » » potassio	»	0,42027
Calcio	» 0,35378	» » » » calcio	»	1,20061
Magnesio	» 0,13887	» » » » magnesio	»	0,68645
Ferro	» 0,00076	» » ossido di ferro	»	0,00108
Alluminio	» 0,02370	» » solfato di alluminio	»	0,14971
Silice	» 0,07722	» » SiO^2	»	0,07722
		Totale	gr.	3,70040
		Trovati direttamente (V. *a*)	»	3,70480
		Differenza	»	0,00440

b) Anidride carbonica combinata e semicombinata espressa in acido solforico normale:

Carbonato di sodio	gr. 0,46552	cc. H^2SO^4 N	8,775
» » calcio	» 0,86312	» » »	17,240
» » magnesio	» 0,39607	» » »	9,390
» » ferro	» 0,02066	» » »	0,030
» » alluminio	» 0,10232	» » »	0,260
		cc. H^2SO^4 N	35,695
	Trovato dirett. (20)	» » »	35,65

VI. Componenti dell'acqua minerale calcolati come ioni per 1000 cc. di acqua

Cationi in 1000 cc.	grammi	mm-molecola	mm-equivalenti
Sodio (cloruro) (Na′)	0,1759	7,6480	7,6480
» (carbonato) (Na′)	0,202676	8,8117	8,8117
Potassio (cloruro) (K′)	0,189110	4,8303	4,8303
Calcio (solfato) (Ca″)	0,007876	0,1963	0,3926
Magnesio (solfato) (Mg″)	0,02455	1,0078	2,0156
Calcio (carbonato) (Ca″)	0,346608	8,6373	17,2746
Magnesio (carbonato) (Mg″)	0,1146	4,6527	9,3054
Ferro (carbonato) (Fe″)	0,0007685	0,0068	0,0136
Alluminio (») (Al‴)	0,023742	0,29203	0,8761
			51,1679
Anioni in 1000 cc.			
Cloro (Cl′)	0,44235	12,4783	12,4783
Ione solforico ($SO^{4''}$)	0,115660	1,2041	2,4082
» bicarbonico ($HCO^{3'}$)	2,213173	36,28140	36,2814
			51,1679
Acido silicico libero (H^2SiO^3)	0,094752	1,2082	
Anidride carbonica libera (CO^2)	0,5946	13,29	

VII. Composizione probabile

dei costituenti disciolti in 1000 gr. dell'acqua in esame

(temperatura 24° C — Densità a 24° = 1,002)

Anidride carbonica libera	CO^2	gr. 0,59339
Azoto	N	» 0,03035
Ossigeno	O	» 0,00430
Silice	SiO^2	» 0,07722
Solfato di calcio	$CaSO^4$	» 0,02667
Solfato di magnesio	$MgSO^4$	» 0,12111
Cloruro di sodio	NaCl	» 0,44552
» di potassio	KCl	» 0,35963
Bicarbonato sodico	$NaHCO^3$	» 0,73761
» di calcio	$Ca(HCO^3)^2$	» 1,35280
» di magnesio	$Mg(HCO^3)^2$	» 0,50407
» di ferro	$Fe(HCO^3)^2$	» 0,00242
» di alluminio	$Al(HCO^3)^3$	» 0,10372

Ioduri
Borati
Fosfati
Nitrati
Nitriti } in piccolissima quantità
Acido titanico
Sali di bario
» di manganese
» di litio

Sostanze organiche (ossigeno consumato)	mgr. 0,2686
Azoto albuminoideo (espresso in ammoniaca)	» 2,346

VIII. Conclusione

Da tutti i risultati analitici riferiti in questa relazione, si può considerare l'acqua « *Minerva* » da noi analizzata, come un'*acqua minerale gradevole, frizzante, del tipo:* ALCALINA, MAGNESIACO, CALCAREA, FORTEMENTE CARBONICA, LEGGERMENTE LITIACA E IODICA, *e che contiene inoltre piccolissime quantità di* ACIDO BORICO *e manganese.*

Istituto Chimico Farmaceutico R. Università di Napoli.
Aprile 1912.

finita di stampare il dì 31 Agosto 1912

Vol. XV, Serie 2.ª N.° 10.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

UN CONTEMPORANEO DI GALILEO: **GIUSEPPE BALLO**

MEMORIA

di **RAFFAELE GIACOMELLI**

presentata nell'adunanza del dì 4 Maggio 1912

In una lettera del P. Riccati al suo amico P. Cavina in data 26 ottobre 1770, si legge quanto segue:

« Giuseppe Ballo in un'operetta stampata a Padova l'anno 1635 che ha « per titolo: Dimostrazione del moto naturale dei corpi, per quanto io sappia, è il « primo che abbia sostenuto la vera sentenza, cioè che il corpo conserva in per- « petuo il movimento che ha, quando non v'abbia una cagione che lo minori o lo « accresca. Di questo principio si son pure serviti i due sommi uomini Galileo e « Cartesio, seguitati concordemente da tutti i matematici fioriti di poi ».

Capitata questa lettera, che è la prima di un breve epistolario del Riccati, pubblicato sotto il titolo di « De' principi della meccanica » (Venezia 1772), sott'occhio al Cerruti [1]) il quale, nei brevi momenti di riposo soleva riandare con culto di storico e di bibliofilo le opere degli antichi; rimase talmente sorpreso dall'asserzione del Riccati e dal nome di questo ignoto, che si dette a ricercarne notizie sull'opera e sulla persona. E pensò che, trattandosi d'un contemporaneo, se ne dovesse trovar qualche traccia nell'epistolario di Galileo; ma da questo non vengono mai menzionati nè il Ballo, nè la sua opera.

Ne trovò però notizia nei dizionari biografici del Riccardi e del Poggendorf, anzi dal primo potè sapere che un esemplare dell'opera nominata dal Riccati era depositata alla biblioteca universitaria di Padova. Nella quale infatti, dopo alquante ricerche, fu ritrovato da Antonio Favaro a cui il Cerruti s'era rivolto per le opportune indagini; e ritrovato appunto in calce ad un libro dello stesso autore, ma di tutt'altro argomento: d'argomento teologico e intitolato « De foecunditate Dei ».

---

[1]) Nello stesso modo, cioè rileggendo le lettere del Riccati, apprese l'esistenza del libro del Ballo anche il Prof. R. Marcolongo, alla cui benevolenza verso di me debbo la presentazione all'Accademia di questo mio scritto, pel quale m'è stato largo d'aiuto e di consiglio.

Potè così il Cerruti avere tra mani il dimenticato scritto del Ballo, e, trovatolo, dal punto di vista storico, interessante, lo proponeva a me come argomento per uno studio critico-storico. Il Vailati, al quale ben tosto lo mostrai, approvava l'idea, non solo, ma mi consigliava di curare addirittura una ristampa del libriccino.

Ciò avveniva nel 1907; ed è soltanto ora, passati cinque anni, e dopochè i miei due venerati maestri son morti, che m'accingo a farlo.

***

Questo suo scritto sul moto naturale, che nel linguaggio dell'epoca non significava altro se non il movimento di gravità, fu dal Ballo dedicato ad un santo, a S. Dionigi Areopagita, e per una considerazione abbastanza bizzarra. Giacchè gli parve che assai bene convenisse dedicare un libro sul moto naturale, a S. Dionigi, il quale, per grazia divina, era stato esperto di moto soprannaturale. La tradizione infatti racconta come S. Dionigi, allorchè in martirio gli fu mozzato il capo, proseguisse miracolosamente a camminare tenendo questo tra le mani.

Del resto, a parte tali bizzarrie, che rientravano però pienamente nei gusti dell'epoca, certo è che la breve opera del Ballo — non oltrepassa, comprendendovi una lunga citazione d'altro autore, 13 pagine a stampa — offre un indubbio interesse come perentoria e decisiva prova della prontezza immediata con cui dai contemporanei furono generalizzate ed estese le idee di Galileo. Infatti se finora le opere riconosciute come quelle che generalizzarono e elevarono a principio fondamentale la persistenza del movimento, da Galileo sempre mantenuto in ristretti limiti, furono, a parte i brevi cenni del Cavalieri (1632), opere tutte sorte o poco prima o dopo la morte di lui (1642): Gassend (1641), Descartes (1644), Mersenne (1644) e Baliani (1646): ecco che ora col Ballo assistiamo alla comparsa di un'opera che, non inferiore a quelle per generalità e ampiezza di risultati, appartiene per altro ad un' epoca in cui Galileo non aveva ancora pubblicato i suoi secondi dialoghi. I primi dialoghi sui «Massimi sistemi» avevano infatti visto la luce nel 1632, i secondi su «Due scienze nuove» nel 1638 e fra gli uni e gli altri nel 1635, nella stessa Padova, in cui era ancor tanto vivo il movimento di idee suscitato da Galileo, usciva la dimostrazione di Ballo.

Lo scopo che con questo scritto il Ballo si propose è da lui esposto in una breve introduzione: è quello di dare una dimostrazione del movimento accelerato dei gravi ricorrendo ad una ragione non mai tentata per l'innanzi. Ricorrendo cioè al principio della persistenza delle velocità acquisite, come per altro aveva già tre anni prima brevemente accennato di fare il Cavalieri nelle sue «Settioni coniche» [1]). Principio che noi troviamo qui nel Ballo, e sebbene con assai minor diffusione di particolari anche nel Cavalieri, enunciato con tutta generalità ed am-

---

[1]) « Perchè dunque i gravi partendosi dalla quiete vanno ad ogni momento acquistando nuovo « grado di velocità (avendo il motore assistente che sempre opera, cioè la gravità) quale non perdono « per non ripugnargli nè essergli tolto dall'ambiente..... perciò gli spazi scorsi da quelli in tempi « uguali, cresceranno conformemente l'incremento dei numeri dispari dall'unità » (pag. 162). Bolo- « gna 1632.

piezza, per la prima volta in opere pubblicate a stampa. Dico in opere pubblicate a stampa, giacchè fin da molto tempo prima è noto come Descartes avesse già espresso pensieri consimili, ma solamente in lettere private. Delle quali la prima pare esser questa, citata già dal Duhem, e che Descartes scriveva il 13 novembre 1629 al P. Mersenne:

« Premièrement je suppose que le mouvement qui est une fois imprimé en quel-« que cors y demeure perpétuellement, s'il n'en est pas osté par quelque autre cause, « c'est à dire que quod in vacuo semel incipit moveri, semper et aequali celeritate « movetur ».

In seguito alla quale il Duhem osserva che, « questo principio, che non è altro « che la legge d'inerzia, enunciata, *per la prima volta*, sotto una forma netta ed « esente da ogni restrizione, l'ammetteva anche Beeckman non meno di De-« scartes ».

E difatti in un'altra lettera successiva del 18 Dicembre dello stesso anno, così Descartes scriveva a Mersenne riguardo all'idea condivisa anche dal suo amico Beeckman:

« Supponit, ut ego, id quod semel moveri coepit, pergere sua sponte, nisi ab « aliqua vi externa impediatur, ac proinde in vacuo semper moveri, in aëre vero « ab aëris resistentia paulatim impediri ».

Ma anche Descartes del resto, differentemente forse da quel che possa apparire dall'interessante esposizione del Duhem (De l'accélération produite par une force constante, Genève 1904), nella quale i fatti son prospettati in modo da dar l'idea che quegli fosse giunto di per sè, e indipendentemente da ogni altro, alla scoperta della persistenza del movimento; anche Descartes ebbe in vero chi lo precedette. Non solo; ma chi gli fornì addirittura, un bel giorno, la nozione che il movimento persiste: nozione della quale per l'innanzi egli era del tutto ignaro.

Fin dal 1883-84 aveva infatti il Wohlwill, nella sua celebre « Scoperta della legge d'inerzia » [1]), richiamato a questo proposito l'attenzione degli storici sopra un libretto, composto da Descartes durante le sue peregrinazioni in Germania e in Olanda, intitolato « Cogitationes privatae » e che fu pubblicato soltanto nella metà del secolo scorso: nel quale, il giorno 23 Settembre 1620, cioè nove anni prima della lettera a Mersenne citata dal Duhem, Descartes, allora giovinotto di 24 anni, segnava la seguente nota:

« Or sono alcuni giorni mi sono incontrato con un uomo assai sottile di in-« gegno, il quale m'ha posto la seguente questione: una pietra cade in un deter-« minato istante da A verso B, ed essa sia sempre attratta dalla terra costante-« mente con la medesima forza e non perda nulla di quella velocità che le era stata « conferita dalla attrazione precedente — egli pensa cioè che ciò che si muove nello « spazio vuoto si muova sempre — si domanda in qual tempo la pietra traverserà « lo spazio dato » [2]).

Che questo incognito personaggio abbia da sè stesso trovato tale principio, che da sè sia giunto alla scoperta della continuazione del movimento una volta

---

[1]) Emil Wohlwill, *Die Entdeckung des Beharrungsgesetzes*, [Zeitschrift für Volkerpsichologie und Sprachwissenschaft. Bd. 14, S. 365, Bd. 15, S. 70, 337 (1883-84)].

[2]) Oeuvres de Descartes, publiées par Ch. Adam et P. Tannery, t. X, pag. 219.

iniziato, non pare probabile. Basta considerare col Wohlwill il lungo sforzo che tale conquista costò a Galileo, sebbene la storia di essa non sia ancora del tutto nota, per trovar difficile che vi fosse pervenuto, così senz'altro, anche l'incognito personaggio di Descartes. Molto più naturale è allora la supposizione dello stesso Wohlwill che l'incognito l'abbia direttamente o indirettamente appresa da Galileo; di cui potrebbe anche esser stato scolaro a Padova o comunque esser stato in relazione con scolari di lui.

È nota infatti la prodigalità con cui Galileo dalla cattedra comunicava ai suoi discepoli risultati di indagini che non pubblicò a stampa se non trenta o quaranta anni più tardi. Mentre questi scolari, accorrenti in folla da ogni parte d'Europa, si facevano poi al loro ritorno in patria, divulgatori delle scoperte e delle novità del maestro. Tantochè a riprova di questa diffusione delle idee di Galileo in Europa, prima assai che esse fossero divulgate con i libri, riporta il Wohlwill il caso interessante d'una lettera del conte Daniello Antonini, capitano di ventura in Fiandra e antico scolaro di Padova, il quale, nell'aprile 1611, s'intratteneva con Galileo per lettera da Bruxelles sopra una proposizione della teoria del moto che questi pubblicò solo nei dialoghi del 1638 [1]).

Che del resto Galileo fin dai primi anni del 1600 fosse in possesso — in quei limiti s'intende in cui sempre la mantenne — della nozione di persistenza delle velocità acquisite, mentre nel « De motu » composto a Pisa (1590) sosteneva ancora l'affievolimento graduale del moto; è un fatto su cui non può esservi ora più nessun dubbio. Giacchè, oltre alle ragioni ed ai fatti addotti dal Wohlwill, fra cui la divulgazione che ebbero le lettere di Galileo sulle « Macchie solari » (1612), nelle quali l'indelebilità del movimento è nettamente e diffusamente espressa [2]), c'è la celebre lettera che a lui indirizzò il 1° aprile 1607 un altro antico scolaro di Padova il P. Benedetto Castelli: lettera pubblicata nel 1883 dal Favaro. Nella quale il Castelli informava il suo maestro delle strane deduzioni che taluni traevano in campo metafisico, e precisamente riguardo alla questione della esistenza di Dio, dalla « dottrina di V. S. che a principiare il moto è ben necessario il mo-
« vente, ma che a continuarlo basta il non aver contrasto ».

Parole che provano come la dottrina di Galileo dovesse già da qualche tempo esser nota, per trovarsene nel 1607 applicazione di essa presso i teologi. E non solo conosciuta e discussa, ma concepita forse con maggior larghezza di quel che la concepisse il suo stesso autore. Come mostra abbastanza l'espressione del Castelli, priva, nell'enunciare la persistenza del movimento, di quelle limitazioni e restrizioni alla sola direzione orizzontale, da cui Galileo non riuscì mai a liberarsi.

Poichè bisogna pensare che un ostacolo insormontabile s'opponeva a che Galileo attribuisse alla sua dottrina quel carattere di generalità che senza sforzo le attribuirono invece i suoi contemporanei: ostacolo costituito appunto da una impossibilità fisica e metafisica ad astrarre i corpi dal peso.

---

[1]) Dell'Antonini così scriveva Galileo nella sesta giornata dei Dialoghi: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* [Edizione Nazionale, v. 8, giornata sesta, p. 322].
« .... il Sig. Daniello Antonini, nobilissimo d'Udine, d'ingegno e di valore sopraumano, il quale per difesa della Patria e del suo Serenissimo Principe gloriosamente morì, ricevendo onori condegni al suo merito dalla Serenissima Repubblica Veneta ».

[2]) Edizione Nazionale, v. 5, p. 134.

Ricordiamo a questo proposito, come la concezione galileiana dell'universo fosse, alla pari di quella copernicana, in stretta relazione, non ostante profonde modificazioni, con quella di Aristotele e, come questa, riconoscesse dominare nel mondo un principio d'armonia e d'ordine. Armonia ed ordine, per conservare, e mantenere i quali, aveva Iddio, secondo Galileo e Copernico, fornito tutti i corpi dell'universo d'un «istinto» a tener strette ed unite al proprio insieme o «tutto» le singole loro parti. In modo che, se violentemente distaccate ed allontanate, ad esempio, delle parti terrestri dalla terra, o delle lunari dalla luna, o delle solari dal sole, dover queste ritornare immancabilmente, per impulso irresistibile, da qualunque più remoto punto dell'universo, rispettivamente alla terra, alla luna ed al sole, per la via più breve, cioè per la rettilinea. Tale impulso è il peso. Qualità, dunque, ed attributo essenziale per Galileo della materia, e che, sebbene non costituisse più per lui, come per Aristotele, l'unica causa di tutti i movimenti possibili; fu nondimeno posto da lui, in mancanza d'un'altra nozione dinamica più generale, a fondamento d'operazioni ed effetti meccanici, coi quali non ha, nè può avere, a dir vero, alcuna relazione.

Da ciò ne venne che pensare i corpi al di fuori del peso, come era pure necessario raffigurarli per poter ad essi applicare la nozione di persistenza del movimento lungo una direzione qualunque dello spazio; non dovè apparire a Galileo altrimenti dal pensar l'universo non più regolato in tutte le sue parti dal principio dell'armonia e dell'ordine. Il che repugnava assolutamente al suo sentimento della natura. Nè l'ipotesi di corpi senza peso, anche se fatta a semplice titolo di esperimento mentale, gli dovette apparire di qualche utilità per la conoscenza dei fenomeni; nè, se pur una volta gli venne formulata [1]), su essa s'indugiò; quasi che ciò gli paresse un mettersi fuori della realtà.

Gli parve all'opposto di ben rimanere nella realtà vera dei fatti, ricorrendo al mezzo materiale e concreto d'un piano orizzontale per compensare ed eliminare,

---

[1]) Si trova infatti nel dialogo dei Massimi sistemi giornata 2ª questo punto in cui Sagredo domanda a Simplicio:

« Ma quando l'artiglieria si piantasse non a perpendicolo, ma inclinata verso qualche parte, « qual dovrebbe essere il moto della palla? andrebbe ella forse, come nell'altro tiro, per la linea « perpendicolare, e ritornando anco poi per l'istessa? ». A cui Simplicio risponde: « Questo non « farebb'ella, ma uscita del pezzo seguiterebbe il suo moto per la linea retta che continua la di- « rittura della canna, se non in quanto il proprio peso la farebbe declinar da tal dirittura verso « Terra ». Onde Sagredo conclude: « Talchè la dirittura della canna è la regolatrice del moto « della palla, nè fuori di tal linea si muove, o muoverebbe, se 'l peso proprio non la facesse de- « clinare in giù.... » [Edizione Nazionale, v. 7, pag. 201].

Passo che, se con altri pochi potessimo isolare da tutto il resto, potremmo senz'altro ritenerli col Mach come assolutamente probatori del possesso pieno e completo della nozione di persistenza del movimento in ogni direzione da parte di Galileo. Mentre, se lo confrontiamo con altri passi consimili del Cavalieri appartenenti allo stesso anno, troveremo in questi espressa con tale generalità la continuazione eterna del movimento lungo qualunque direzione, come indarno noi cerchiamo in Galileo:

« Dico ancora, che quel proietto non solo anderebbe per dritta linea nel segno opposto, ma « che in tempi uguali passerebbe per spazi uguali della medesima linea, mentre quel mobile fosse « a tal moto indifferente; e mentre ancora il mezzo non gli facesse qualche resistenza, poichè non « ci sarebbe causa nè di ritardarsi nè di accelerarsi: si che il grave, mercè della istessa gravità, « non anderà se non verso il centro della terra, ma quello mercè della virtù impressagli, potrà « incamminarsi verso ogni banda. » Cavalieri, (loc. cit., pag. 155).

mediante opportuna resistenza, l'azione della gravità nei corpi su di esso collocati. Sui quali finalmente, per esser posti realmente in condizione da non risentire gli effetti disturbatori del peso, era possibile affermare, prescindendo soltanto dalla resistenza dell'aria e dall'attrito, che un movimento, una volta iniziato, non sarà mai più per cessare.

Quali siano stati ora i fatti, le considerazioni e le esperienze che condussero Galileo ad affermare in tali condizioni, la persistenza del movimento nei corpi, non è, come s'è detto, ancora del tutto noto. Esiste invero nell'esposizione e negli scritti di Galileo un salto brusco, per cui, dall'opinione antica della estinzione spontanea del movimento, lo vediamo esser passato alla dottrina nuova, senza poter noi trovare nessuna notizia sul momento e sulle fasi di questo passaggio. Sta il fatto però che nella formazione di questa idea nuova debbono aver avuto gran parte le considerazioni ed esperienze descritte nel «De Motu» di Pisa (1590), le quali lo avevano convinto dell'assoluta indifferenza dei corpi a qualunque grado e qualità di movimento. Supposizione che acquista tanta maggior probabilità, in quanto che vedremo su questo stesso principio dell'indifferenza, fondare anche il Cavalieri, il Ballo ed in certo modo anche il Baliani, più di tutti gli altri, prossimi a Galileo, la loro nozione dell'eternità del movimento [1]).

Ma, a parte ciò, su cui più diffusamente ci tratterremo a pag. 17, riservandomi per altro di farne prossimamente argomento di espressa trattazione in un altro lavoro, e tornando per ora al piano orizzontale di Galileo, bisogna osservare, e l'osservò egli stesso, che dovendo ad esso piano risultare sempre perpendicolare la direzione della gravità, anzi che con un vero e proprio piano s'avesse a che fare con una superficie sferica, concentrica alla terra. Onde ecco che il solo moto eterno possibile in natura, conciliabile con la pesantezza della materia, risultava essere in fondo un vero e proprio moto circolare. Il che, mentre si riconnetteva molto bene alle elucubrazioni platoniche e aristoteliche sul moto in cerchio e sul carattere di eternità che a questo, per ragioni puramente di figura, doveva competere; tornava pure assai a proposito della supposta armonia e regolarità dell'universo. Giacchè, mentre parve a Galileo che con l'ordine prescritto da Dio ai corpi celesti, trovassero assai convenientemente luogo, accanto alla quiete, anche dei movimenti circolari attorno a determinati centri, non altrettanto gli parve di poter pensare dei movimenti rettilinei, i quali, se prolungati oltre un certo limite e adibiti ad altro scopo che a quello di riportare al posto, in virtù del peso, le parti dei corpi celesti eventualmente disordinate, pensò che non potrebbero riuscire se non affatto inconcepibili ed assurdi in un universo perfettamente ordinato. Affermando che un movimento eterno in linea retta mirerebbe piuttosto al sovvertimento che al mantenimento dell'ordine, allontanando e disperdendo sempre più i corpi tra di loro e dirigendoli « dove è impossibile ad arrivare ».

Anzi, proseguendo Galileo in tale ordine di idee, e riflettendo bene che, anche i movimenti i quali a noi sembrano retti, come quelli di caduta, in realtà non lo sono, partecipando i corpi cadenti del movimento terrestre; finì col concludere che tutti assolutamente i moti possibili in natura, debbono essere circolari; così

---

[1]) Vedasi a tal proposito anche il Wohlwill loc. cit., fasc. XV, pag. 79 e seguenti.

come ammetteva, secondo la antica opinione, esser circolari anche le orbite dei pianeti. Tanto da concludere per bocca del Sagredo, nella seconda giornata dei « Massimi Sistemi », con queste parole:

« Ma io, Sig. Salviati, vo pur ora considerando un'altra cosa mirabile: e questa « è, che stanti queste considerazioni, il moto retto vadia del tutto a monte e che « la natura mai non se ne serva, poichè anco quell'uso che da principio gli si con« cedette, che fu di ridurre al suo luogo le parti de i corpi integrali quando fus« sero dal suo tutto separate e però in prava disposizione costituite, gli vien le« vato, ed assegnato pur al moto circolare »[1].

E nelle aggiunte ai dialoghi, Galileo pone a maggior dichiarazione del suo pensiero queste ulteriori considerazioni: « Io dico che nissuna cosa si muove na« turalmente di moto retto. Cominciamo a ricercar discorrendo: i moti di tutti i « corpi celesti son circolari; le navi, i carri, i cavalli, gli uccelli, tutti si muovono « di moto circolare intorno al globo terrestre; i moti delle parti degli animali son « tutti circolari: ed insomma noi ci riduciamo a non trovar altro che *gravia deor« sum et levia sursum* sembrino muoversi rettamente; ma nè di questi siamo si« curi, se prima non si dimostra che il globo terrestre stia immobile »[2].

Ecco come tutto un complesso di sentimenti invincibili e di prevenzioni radicate vietasse a Galileo d'estendere a principio generale la sua dottrina del moto eterno orizzontale. Mentre non è esatto pensare che egli a tal generalizzazione non giunse, o perchè la sua dottrina non sarebbe stata altro che una pura continuazione delle fantasie degli antichi sull'eternità del moto in cerchio; o perchè egli fosse effettivamente incapace, secondo la nota critica di Descartes, d'elevarsi dalla cognizione di fatti particolari a principii e leggi generali. Osserviamo infatti per la prima parte che, sebbene di tali considerazioni degli antichi egli si sia realmente servito, tanto come spunto e come premessa al principio, quanto come opportuna citazione e punto d'appoggio in seguito, per convalidare e rafforzare con l'autorevole testimonianza di Platone i suoi proprii risultati; non si possa tuttavia fare a meno di riconoscere che tali risultati sulla dottrina del movimento Galileo li ricavò e li fondò personalmente. Mentre per la seconda parte osserviamo come sia molto più probabile, non che consentaneo all'altezza del suo genio, ammettere che egli abbia volontariamente esclusa ogni ulteriore estensione della sua idea, perchè non accordabile con la sua concezione metafisica della natura, anzichè pensare che Galileo non si sia accorto e della facilità d'una tale estensione e dei vantaggi che l'uso d'un principio generale avrebbe portato alla trattazione dei fenomeni del moto. Tanto che non direi più col Wohlwill che quel passo della celebre lettera a lui inviata dal Baliani il 19 agosto 1639[3], in cui questi gli domandava se potesse ammettersi per principio ciò che si trova scritto a pag. 207 dei suoi « Discorsi », che cioè ogni grado di velocità impresso dalla natura è indelebile: principio — aggiungeva — da cui potrebbero ricavarsi tante belle conseguenze specie per il moto dei proietti; non direi più che tal domanda gli sia passata inosservata e senza fare su lui nessuna impressione, quasi non avendone compresa la

[1]) Edizione Nazionale, v. 7, p. 193.
[2]) Edizione Nazionale, v. 7, p. 545.
[3]) Edizione Nazionale, v. 18, p. 86.

importanza. Cosa che il Wohlwill arguiva dal fatto che Galileo, rispondendo a tutto il resto della lettera [1]), lasciò questo punto senza risposta. Ma direi piuttosto che Galileo su tal questione non intese pronunziarsi essendo per lui incertissima e imbarazzante. Perchè, pur non potendo forse disconoscere in cuor suo i vantaggi dell'uso d'un tal principio rimarcati dal Baliani, non poteva d'altra parte ammetterlo per ragioni d'altra indole, ma che per lui non erano meno solide e meno potenti delle scientifiche. Tanto più che, così l'opera del Ballo, dove già 11 anni prima del Baliani troveremo messi in evidenza l'uso e la convenienza d'un tal principio, come l'opera anteriore del Cavalieri, la quale fu nota a Galileo; mostrano chiaramente e inoppugnabilmente come tal questione non potesse essere stata assolutamente per lui nè nuova, nè ignota.

Concludendo, non diremo che Galileo abbia ignorato la possibilità di estendere a principio generale la sua idea del moto eterno lungo l'orizzonte, rimanendo così a mezza strada sul cammino che fu poi percorso per intiero dai suoi discepoli; ma diremo invece che Galileo non volle tale estensione deliberatamente. E non la volle per le ragioni già dette di sopra: ragioni d'ordine metafisico; ma a cui conviene aggiungerne forse un'altra ancora; e questa d'ordine prettamente fisico, benchè in fondo dipendente dalle altre. Bisogna infatti pensare che Galileo, non avendo mai, come s'è già detto, riconosciuto nei corpi un'altra facoltà dinamica diversa e più generale del peso, cui riportare la causa del loro vario comportarsi meccanico, non avrebbe mai potuto, a meno di non voler costruire a vuoto, rappresentarsi dei corpi in cui — conforme a quanto era necessario per applicare ad essi la persistenza del movimento in una direzione qualunque — fosse sospesa, anche in via puramente ipotetica, l'attività del peso.

Una volta che il peso costituiva per lui, come per Aristotele, ogni facoltà e caratteristica meccanica della materia, che senso si sarebbe potuto più ammettere, dal punto di vista meccanico, ad una rappresentazione di corpi, che, per esser privati del peso, venivano con questo ad essere spogliati d'ogni possibile facoltà dinamica d'agire e di resistere? Che uso e che valore poteva essere riserbato in meccanica a tali, non più corpi fisici, ma pure finzioni della mente, prive di qualsiasi fondamento e consistenza dinamici?

Non andiamo ora a ricercare le ragioni intime per cui Galileo non sentì la necessità di distinguere nei corpi una facoltà dinamica nuova, preludente in qualche modo alla nostra «massa», moderna [2]): ragioni che in fondo rientrano nella

---

[1]) Edizione Nazionale, v. 18, p. 93.

[2]) Eppure Galileo ebbe chiarissima e perfetta la nozione d'una resistenza, varia da corpo a corpo, ad assumere una certa velocità in seguito ad una stessa forza, e d'una varia resistenza nello stesso corpo ad assumere una stessa velocità in seguito all'azione di forze diverse:

« Ma non è già che qual si voglia gran mole, che galleggi nell'acqua stagnante non possa « esser mossa da qualunque minima forza, e solo è vero che minor forza più lentamente la muo- « ve..... i navili più larghi più lentamente si muovono che i più stretti, spinti da forze eguali, « e 'l medesimo vassello tanto maggior forza di vento o di remi richiede, quanto più velocemente dee essere spinto ». *Discorso intorno alle cose, che stanno in su l'acqua, o che in quella si muovono* [Ediz. Naz., v. 4, p. 105].

Con tutto ciò non sentì Galileo il bisogno di ricavare da questa nozione di resistenza il concetto d'una facoltà dinamica con cui sostituire nei corpi quello di peso. Anzi seguitò a valersi esclusivamente di questo nello studio dei più diversi fenomeni del movimento.

sua impossibilità metafisica a scindere la materia dal peso, — al quale era riserbata funzione ordinatrice e regolatrice tanto essenziale nell'economia della natura — ; ma constatiamo soltanto che, non sostituita nei corpi in luogo del peso questa qualche altra cosa dinamicamente attiva cui riportar la ragione del loro vario comportarsi dinamico, era con ciò vietato a Galileo d'astrarre i corpi dal peso e di estendere di conseguenza a caso generale la persistenza del movimento orizzontale.

Differentemente invece andarono le cose per i suoi discepoli e contemporanei, che, o per non aver un armonico e profondo sistema metafisico e cosmologico da connettere con i risultati dell'indagine scientifica particolare, o per aver più o meno modificata l'antica idea di peso, riconoscendo in luogo suo nella materia qualche altra facoltà dinamica più intima e generale; non ebbero più i motivi di Galileo per contenere entro gli stretti limiti da lui fissati il principio della persistenza del movimento.

Or che in tale epoca, contemporaneamente a Galileo, si fosse giunti ad una profonda rivoluzione nell'idea di peso è un fatto di cui noi ci accorgiamo subito studiando l'opera di Kepler, il quale, condottovi da considerazioni astronomiche, arrivò alla conclusione che i corpi celesti dovessero possedere una specie di peso che spiegasse il loro diverso comportarsi dinamico rispetto al sole, dal quale Kepler supponeva che essi venissero mossi mediante effluvii magnetici. Peso per altro ben differente da quello ordinario e che egli venne chiamando « inerzia » o resistenza al movimento. Inerzia che estese anche ai corpi terrestri e a tutta la materia in genere. La quale appunto in questa resistenza al movimento, veniva a racchiudere ogni sua facoltà e capacità dinamica in luogo del peso, ridotto al grado d'una semplice forza magnetica d'attrazione fra corpo e corpo.

Bacon condivise le medesime idee e così pure Descartes; per quanto questi ascrivesse il peso dei corpi all'effetto d'una pressione dell'etere anzichè ad un'attrazione; similmente Mersenne e Gassend. Onde tanto Descartes quanto gli altri due non ebbero naturalmente alcuna difficoltà a riconoscere sui loro corpi senza peso, ma non per questo dinamicamente inetti, la possibilità di continuare eternamente un moto iniziato in linea retta. Nè tale abitudine di scindere omai la materia dal peso inaugurata da Kepler, le cui opere nessuno ignorò ai primi del 1600, mancò di far sentire la sua influenza sugli stessi discepoli italiani di Galileo, così come aveva fatto su Descartes e sugli altri nel rimanente di Europa. Onde, per quanto non si voglia escludere che anche da loro stessi e con osservazioni proprie non vi sarebbero egualmente giunti; fatto sta che anche qui in Italia, nello stesso tempo che fuori, si venne determinando una corrente di pensiero volta a scindere la materia dal peso: riconoscendo alla prima una consistenza ed un'esistenza dinamica a sè, sulla quale appunto potersi esercitare l'azione del peso e delle altre forze.

Quale sia stata per questi scrittori prima di Newton e dominati dalla duplice influenza di Kepler e Galileo tal nozione dinamica della materia non è possibile esprimere chiaramente, perchè la nozione stessa da loro posseduta non fu chiara. Sentirono, chi più chi meno, esser nella materia una certa resistenza al moto e alle variazioni; ma, pur non annettendo più a tal resistenza il senso kepleriano di una vera e propria ripugnanza al movimento, esclusa dalle lucidissime considerazioni di Galileo sull'indifferenza dei corpi al moto e alla quiete; furono ben lon-

tani per altro dal formulare questo sentimento d'una resistenza della materia in nozione completa e chiara involgente tutto l'aspetto dinamico della materia, come fa ora il nostro concetto moderno di massa. E se Descartes, che più degli altri penetrò profondamente nella questione, sentì la necessità di riportare ad un'unica nozione o proprietà fondamentale meccanica tutti indistintamente i vari fenomeni ed effetti dinamici [1]; gli altri invece, come lo provano il Ballo, il Baliani, Gassend ecc. dovettero ricorrere per spiegarsi l'attività dinamica dei corpi ad immaginare che gl'impulsi del peso e l'azione del movimento suscitassero e facessero sorgere nella materia degli sforzi, degl'impeti e delle tensioni atti a produrre gli svariati effetti dell'urto, delle trazioni, pressioni ecc. [2]).

Eravamo ben lontani insomma con tali rappresentazioni di azioni e attività dinamiche suscitate e risvegliate nella materia, in cui stavano allo stato latente, in seguito all'azione del movimento, dalla nostra nozione di «massa»; ma, a parte la lunga storia dello sviluppo di questo concetto, di cui non è qui il luogo di occuparsi, sta il fatto che i nostri contemporanei italiani di Galileo, pur essendo più assai di Descartes lontani da una nozione dinamica soddisfacente della materia, erano nondimeno giunti a distinguere nettamente questa dal peso.

Uno dei passi che finora erano considerati fra i primi in cui tal distinzione fosse marcata fortemente, essendo alla materia riconosciuta una consistenza dinamica indipendente dal peso, anzi da servire come sostegno ed appoggio all'azione di questo; è quello celebre del Baliani, che, per la prima volta, fu messo in evidenza dal Vailati in uno studio storico-didattico [3]) sul concetto di «massa». Il passo è il seguente:

«E fui condotto a pensare che, mentre il peso si comporta come un «*agente*», «la «*materia*» si comporta invece come un «*paziente*», e che quindi i gravi si «muovano secondo la proporzione dei loro pesi alla loro «*materia*», onde, se ca«dono senza impedimento verticale si devono muovere tutti con la stessa velocità, «poichè quelli che hanno più «peso» hanno anche più «*materia*» o «*quantità di* «*materia*» [4]).

Ma già prima del Baliani troviamo ora noi nella «Demonstratio» del Ballo espressa chiaramente e con un'immagine anzi assai caratteristica la esistenza a sè della materia nei corpi.

Rimane un ultimo punto a cui deve finalmente giovarci la breve opera del Ballo.

---

[1]) Così infatti Descartes conchiudeva le sue ricerche sulla causa dell'urto: «Oltre ciò bi«sogna notare che la forza con cui un corpo agisce contro un altro o resiste alla sua azione «consiste in questo soltanto che ogni cosa persiste a rimanere nello stesso stato finchè può...». Facendo cioè della proprietà meccanica dei corpi di persistere nel proprio stato una vera e propria attività dinamica, origine e causa d'ogni capacità d'agire e di resistere della materia. Oeuvres de Descartes publiées par Ch. Adam et P. Tannery, t. VIII, *Principia philosophiae*, Pars II, n.° 43, p. 66.

[2]) Vedasi riguardo a queste idee a pag. 15 e 19.

[3]) G. Vailati, «Sul miglior modo di definire la Massa in una trattazione elementare della meccanica». Nuovo Cimento. Vol. XIV, 1907. Scritti di G. Vailati, pag. 799-804.

[4]) De Motu gravium solidorum-liber primus, p. 7, anno 1638. Nell'opera del Baliani il primo libro è dell'anno 1638, gli altri del 1646.

Deve essa servirci a chiarire definitivamente una questione su cui s'indugiò il Wohlwill e che, mentre riguarda la posizione del Baliani rispetto a Galileo, servirà pure a determinare sempre meglio le nostre conoscenze su un periodo di tempo tanto importante per la storia e lo sviluppo della meccanica. Si domandò in fatti il Wohlwill, nel suo classico lavoro già citato, come potessero conciliarsi le continue ed esplicite dichiarazioni del Baliani sull'assoluta indipendenza dei suoi risultati sulla dottrina del movimento, da qualunque altro autore, col fatto innegabile che egli fu sempre in rapporti con Galileo, da cui potè direttamente apprendere quanto questi era venuto man mano scoprendo. Domanda a cui il Wohlwill pensò non potersi altrimenti rispondere che ammettendo nel Baliani la più completa malafede: la più completa malafede in questo « nobile genovese », che, quattro anni dopo la morte del maestro, sarebbe venuto fuori, attribuendo ignobilmente a sè stesso idee e scoperte sul movimento che, se pur aveva egli indubbiamente generalizzate ed estese, aveva non pertanto ricevute nella parte più essenziale da Galileo.

Del resto così, come verso Galileo si comportò il genovese Baliani, s'era già undici anni prima comportato il palermitano Ballo; dal quale, mentre si parla e d'indifferenza dei corpi al movimento e di persistenza in questo, non vien mai fatto il nome di Galileo. Nè differentemente dal Baliani e dal Ballo vediamo comportarsi Descartes, il quale, nei suoi « Principia » (1644) enunciava la persistenza dei corpi nel proprio stato, come se fosse stata ricavata da lui stesso per via puramente deduttiva dalla contemplazione della natura di Dio e delle sue operazioni. Mentre ben sappiamo noi ora, come e da chi, ebbe Descartes, al principio, comunicazione di quest'idea.

Ma d'altra parte neanche Galileo fece mai nei suoi dialoghi il nome del Benedetti che fu pure suo immediato precursore in tante questioni. Nè il nome del Benedetti, per quanto anche lui avesse spiegata l'accelerazione dei gravi con l'accumularsi dei successivi impulsi del peso — senza però pensare ad una persistenza delle velocità acquisite, che a lui, come ad ogni altro predecessore di Galileo fu completamente ignota — fu mai menzionato neppure dal Ballo; il quale si era pur presa cura di citare tutte le opinioni degli antichi sul problema dell'accelerazione. Tanto che possiamo ben dire col Duhem d'esser qui in un'epoca in cui fu completamente ignoto ogni principio d'onestà intellettuale; non sfuggendo forse, soggiunge il Duhem, a questa triste maniera, se non l'onesto Mersenne. Al quale però, almeno a questo proposito della persistenza della velocità e dei principi sull'indipendenza e indifferenza dei movimenti, possiamo aggiungere anche il Cavalieri; che, dopo aver brevemente ragionato di queste cose a proposito delle sue ricerche sulla curva descritta dai proietti, così conclude rimandando onestamente il lettore a Galileo:

« Queste cose però siano da me dette, come per un passaggio, che perciò non « mi sono spiegato con figura, nè con quella chiarezza, che bisognerebbe, poichè « rimetto il lettore a quello che la sottigliezza del signor Galileo c'insegnerà nel« l'opera del moto, che ci promette nei suoi dialoghi. » (Loc. cit. pag. 162).

Ma, anche dovendo ammettere una indiscutibile disonestà nei contemporanei e successori di Galileo, i quali s'appropriarono impunemente più volte i risultati del

suo pensiero — come egli stesso diceva a proposito della sua teoria sul flusso e riflusso del mare, la quale « volando per le bocche degli uomini, aveva trovato pa- « dri caritativi che se l'adottavano per prole di proprio ingegno » [1] — ; non si potrà tuttavia negare che le idee di Galileo, diffusesi oralmente da trenta o quarant'anni in Europa, erano talmente penetrate per le più diverse vie nei cervelli dei contemporanei e divenute di dominio tanto comune, da potersi considerare perduto ogni contatto fra esse e il suo primo autore. E se pensiamo che Galileo si ridusse a racchiudere i suoi pensieri nel monumento dei dialoghi, solo negli ultimi anni della vita, quando già le sue idee avevano fruttificato ed erano state in alcuni punti già sorpassate, essendogli mancato dapprima l'opportunità e il tempo [2]; potremo in parte anche giustificare la frase di Descartes il quale, avuti in prestito da Beeckmann per sole trenta ore i Massimi Sistemi, ebbe ad esclamare di avervi trovato delle cose sue proprie ed altre che non poteva ammettere interamente, per quanto dovesse pur riconoscere che Galileo filosofava assai bene sul movimento [3]. Nè differentemente da Descartes avrebbero potuto forse esclamare con una certa ragione anche gli altri: Cavalieri, Ballo, Gassend, Mersenne, Baliani ecc.; in quanto che tutti rappresentavano la continuazione e quindi uno stadio superiore del pensiero di Galileo. Continuazione ed ulteriore sviluppo di quello che, mentre in Descartes, Mersenne e Baliani prendevano corpo in opere pubblicate dopo la morte del maestro e in Gassend un anno appena prima di questa; uscivano invece, pubblicati a stampa per opera del Ballo e del Cavalieri, durante quel periodo appunto in cui Galileo era occupato nella composizione dei suoi dialoghi. Avvenendo così, coll'opuscolo del Ballo ed i brevi cenni del Cavalieri, il fatto singolare che uscissero a luce per le stampe, conseguenze e sviluppi di idee che Galileo non aveva per intiero ancor pubblicate.

Ed ora ritorniamo alla nostra questione: ciò che possa pensarsi del Baliani dopo il rinvenimento di quest'opera di 11 anni alla sua anteriore. Che il Baliani, pur pervenendo a quei medesimi risultati sul movimento e a quelle medesime estensioni del pensiero galileiano a cui era già pervenuto 5 anni prima il Gassend (1641), avesse nondimeno con ogni probabilità proceduto indipendentemente da questo; è un fatto che il Wolhwill ammette senza discussione. Ma può ora dirsi lo stesso

---

[1]) Dialogo sui massimi sistemi. Introduzione: Al discreto lettore. [Edizione Naz., v. 5, p. 30].

[2]) Si pensi che fin dal 1609 sollecitando il suo ritorno in patria adduceva a motivo il bisogno di un impiego tranquillo per poter attendere alla compilazione e pubblicazione dei suoi pensieri:

« ... havendo hormai travagliato 20 anni, et i migliori della mia età, in dispensare, come si dice, « a minuto, alle richieste di ogn'uno, quel poco di talento che da Dio et da le mie fatiche mi è stato « conceduto nella mia professione; mio pensiero veramente sarebbe conseguire tanto di otio et di « quiete, che io potessi condurre a fine, prima che la vita, 3 opere grandi che ho alle mani, per « poterle publicare, et forse con qualche mia lode, et di chi mi havesse in tali imprese favorito, « apportando per avventura a gli studiosi della professione et maggiore et più universale et più « diuturna utilità di quello che nel resto della vita apportar potessi ».

(A. Favaro — Galileo Galilei e lo studio di Padova, vol. I, pag. 453) [Edizione Nazionale, v. 10, p. 232].

[3]) Lettera di Descartes a Mersenne da Amsterdam il 14 Agosto 1634. Oeuvres de Descartes publiées par Ch. Adam et P. Tannery. *Correspondance*, t. I, p. 303.

nei riguardi del Baliani col Ballo? Certo che ora, tutto quanto si diceva fin ad oggi del Baliani, rispetto alla sua opera di continuatore ed erede di Galileo, può dirsi altrettanto bene del Ballo. Il che per altro non vieta di supporre che anche il Ballo, come il Gassend, possa essere stato sconosciuto al Baliani; tanto più avendo il Ballo sempre vissuto in altro ambiente da quello scientifico dell'epoca.

Pur ammettendo dunque che il Baliani, indipendentemente tanto da Gassend e da Descartes, come pure dal Ballo e dal Cavalieri, abbia rifatto per proprio conto lo stesso cammino di costoro; resta sempre questo fatto fondamentale su cui noi abbiamo voluto principalmente richiamar l'attenzione prendendo argomento dall'opuscolo del Ballo: del sorgere, cioè, più o meno simultaneo, in quest'epoca, di opere simili in cui veniva immediatamente generalizzata ed estesa alla stessa maniera la dottrina galileiana del movimento. Resta insomma provato il fatto che il lievito potente di Galileo, fermentando nei più diversi cervelli, determinava in ciascuno di essi, simultaneamente ed indipendentemente l'uno dall'altro, la formazione quasi automatica e spontanea delle stesse idee: idee da cui Galileo stesso, per un complesso di ragioni e condizioni speciali, dovè rifuggire.

***

L'opuscolo del Ballo si compone di tre parti. La prima è una breve introduzione in cui espone lo scopo della sua trattazione che è quello di portare una nuova soluzione all'antichissimo problema sulla causa dell'accelerazione dei gravi cadenti. Alla qual soluzione premette, allo scopo di farne risaltare vieppiù la novità, la citazione di tutto un capitolo d'un'opera allora molto in voga, in cui erano esposte tutte le spiegazioni date dai filosofi dell'antichità e del medioevo sulla questione.

L'opera citata è il « De comunibus omnium rerum naturalium principiis et affectionibus » libro XIV, cap. III; l'autore Benedictus Pererius. (Roma 1576 e 1585, Venezia 1586). E questa lunga citazione costituisce appunto la 2ª parte.

La terza finalmente consiste nella trattazione vera e propria. La quale comincia con alcune considerazioni sulla gravità e sul movimento: considerazioni con le quali, riconoscendosi nei corpi, in quanto cadono liberamente, un'assoluta assenza del peso, vien fin dal principio chiaramente marcata la distinzione fra questo e la materia. Nota infatti il Ballo come il movimento d'un corpo, mentre cade liberamente, ed il peso del medesimo, finchè gli è impedita la caduta da un opportuno sostegno, siano due effetti diversi d'un medesimo principio: il quale è la tendenza dei corpi ad accorrere verso una determinata direzione. Così come — seguitava il Ballo — il calore e la luce del sole sono due diversi effetti d'un medesimo principio risiedente nel sole stesso. Sia infatti questa tendenza totalmente impedita, ed il corpo peserà; sia invece lasciata libera di estrinsecarsi, e il corpo, cadendo, si muoverà; sia finalmente ostacolata soltanto in parte, come è il caso d'un corpo poggiante sopra un sostegno che ne assecondi in certa misura il movimento di caduta, ed ecco che il corpo, in tanto scemerà di peso in quanto il sostegno ne seconderà il movimento. Da questo scambio e compensazione reciproca di movimento e di peso il Ballo vuol trarne una teoria d'un vero e proprio passaggio e trasformazione del-

l'uno nell'altro: trasformazione del peso in movimento allorchè, tolto il sostegno, un corpo cade, e viceversa del movimento in peso, allorchè, incontrando un ostacolo, il corpo cadente è costretto a cessare il suo movimento. Il grande effetto, che da questa cessazione improvvisa del movimento ne consegue, costituisce l'urto, che il Ballo, conforme alla dottrina del tempo, considera come un grande peso. Dottrina che sostenne anche Galileo e che costituì, come egli stesso riferisce, una delle più penose fatiche della sua vita, senza esser arrivato pertanto a dar della causa della «grande potenza della percossa» una spiegazione soddisfacente. E che Galileo non potesse mai arrivare a risolvere tal questione è spiegabilissimo: giacchè mancava d'una nozione dinamica generale della materia e diversa dal peso. Onde col peso s'ostinò a voler render ragione dell'urto, tanto stabilendo analogie tra il caso dell'urto e quello dell'equilibrio delle macchine [1]), quanto supponendo che nei gravi cadenti, durante gl'infiniti istanti di cui si può considerar costituita la durata di caduta, s'andassero accumulando e sommando, per non esser distrutti da nessuna opposta resistenza, i successivi impulsi del peso, generando finalmente un peso tanto grande da superare infinite volte il peso normale dei corpi stessi da fermi, o, come egli stesso lo chiamava, il loro «peso morto».

Aumento del peso a cui egualmente ammise, ricorrendo alla nozione medioevale da lui conservata di «forza impressa», che potessero eventualmente contribuire anche forze trasfuse ed impresse nel corpo cadente dal di fuori. Si ricordi a questo proposito il classico esempio che rimonta alle antichissime «Questiones mechanicae» attribuite ad Aristotele e che fu sempre ripetuto da tutti gli scrittori di quest'epoca: l'esempio cioè della scure e del legnaiuolo. La quale, essendo da questo vibrata sul legno, accumula in sè durante il tempo di caduta tanto i successivi impulsi del proprio peso, quanto la forza impressale dal braccio dell'uomo [2]).

Al contrario il Ballo, e dopo di lui il Baliani, non più costretti a far del

---

[1]) Nella sesta giornata infatti dei secondi dialoghi (che fu pubblicata postuma), faceva dire al Salviati che, a riflettere bene sui vari tentativi fino allora fatti per risolvere il problema della grande potenza della percossa « pare che il nodo principale della difficoltà batta qua, che non bene « si comprenda come l'operazione della percossa, che sembra infinita, non debba di necessità proce- « dere per mezzi diversi da quelli di altre macchine, che con pochissima forza superano resistenze « immense: tuttavia io non dispero di poter esplicare come in questa ancora si procede nella me- « desima maniera...... » [Edizione Nazionale, v. 8, p. 329].

Fu il primo il Borelli nella sua « De vi percussionis » (1666) a far notare l'equivoco in cui era caduto Galileo confondendo il caso dell'equilibrio con l'urto e a metter chiaramente in vista l'insufficienza del concetto di peso nello studio del fenomeno dell'urto.

[2]) « Il momento di un grave nell'atto della percossa altro non è che un composto ed aggre- « gato di infiniti momenti, ciascuno di essi eguale al solo momento, o interno e naturale di sè « medesimo (che è quello della propria gravità assoluta, che eternamente egli esercita posando « sopra qualunque resistente), o estrinseco e violento, qual'è quello della forza movente. Tali mo- « menti nel tempo della mossa del grave si vanno accumulando di instante in instante con eguale « additamento e conservando in esso, nel modo appunto che si va accrescendo la velocità di un grave « cadente: chè siccome negl'infiniti instanti di un tempo, benchè minimo, si va sempre passando da « un grave per nuovi ed eguali gradi di velocità, con ritener sempre gli acquistati nel tempo « precorso, così anche nel mobile si vanno conservando di instante in instante e componendosi quei « momenti, o naturali o violenti, conferitigli o dalla natura o dall'arte, ecc. » Galileo Galilei, Dialogo su due nuove scienze, giornata sesta [Edizione Nazionale, v. 8, p. 344].

peso il costituente essenziale dinamico della materia, nè più dominati dalla vecchia rappresentazione di « forza impressa », ma nemmeno forniti d'una nozione dinamica della materia tale da poter spiegare con essa l'urto e gli altri effetti meccanici; si trovarono costretti, avanti a tali fatti, ad immaginare nella materia, come già abbiamo accennato, il sorgere, per l'azione del peso o del movimento, di energie e di attività dinamiche, dapprima latenti nei corpi. Il Baliani infatti esprimeva abbastanza chiaramente questo risveglio d'energie nei corpi, ad esempio nei corpi cadenti, nei quali, iniziata la caduta, avviene che « l'impeto il quale stava dapprima latente, « sorge nel grave per opera del movimento; vale a dire, ciò che era prima in po« tenza, passa in atto, donde ne viene un accrescimento del moto . . . » [1]).

Similmente il Gassend, nel quale è esclusa, tanto quanto nel Baliani e nel Ballo, qualunque ricorso alla rappresentazione di forza impressa per render ragione della continuazione. Ma di tale esclusione ci occuperemo espressamente a pag. 19, e ritornando per ora a questi tali effetti o attività dinamiche sorgenti nei corpi in virtù del movimento, notiamo come il Ballo li qualificasse col nome di « effetti avventizi ». Avventizi perchè, essendo un qualche cosa che sorge nei corpi e che in essi può in varia misura accumularsi, a seconda dell'intensità e della durata del movimento da cui sono stati generati; sono non pertanto soggetti ad esser distrutti da eventuali reazioni e resistenze; mentre invece l'attività del peso è indistruttibile, riformandosi sempre di nuovo spontaneamente Se indistruttibile, non per questo però sarà vietato, aggiunge il Ballo, di immaginarla momentaneamente annullata o sospesa nei corpi, così come può pensarsi sospesa qualsiasi altra proprietà fisica. Anzi — soggiunse — ci converrà per l'appunto, in vista della nostra dimostrazione, figurare dapprima i corpi privi di qualunque proprietà e quindi venirneli man mano rivestendo.

Or le proprietà, di cui il Ballo riconosce esser forniti i corpi materiali sono le sei seguenti: la tridimensionalità, l'impenetrabilità, l'indifferenza a qualunque stato e grado di movimento, la persistenza nel medesimo, il peso e finalmente l'aumentabilità illimitata della velocità.

Prima proprietà. — Un corpo materiale consta di tre dimensioni. Questa tridimensionalità, osserva il Ballo, è la prima proprietà dei corpi ed è indipendente, tanto dalla impenetrabilità, quanto da ogni altra proprietà che si riferisca al movimento. Essa è nonpertanto comune, tanto ai corpi fisici, quanto ai geometrici; onde l'epiteto di materiale sta ad indicare appunto che è dei primi che s'intende e non dei secondi.

Seconda proprietà. — Fra le proprietà di un corpo materiale c'è la solidità impenetrabile: consistente nel fatto che da un corpo deve occuparsi tanto spazio quant'è il suo volume, con esclusione di qualunque altro corpo. Non voglio per altro entrare nell'ardua questione, soggiunge il Ballo, se in natura si dia effettivamente la penetrazione dei corpi. Giacchè mi contento di parlare d'impenetrabililità secondo l'uso corrente di negare ai corpi solidi la possibilità di penetrarsi, e, per quel tanto appunto che occorre nei riguardi del movimento.

Terza proprietà. — « Nel corpo materiale c'è un'attitudine passiva ad esser

[1]) De Motu, liber IV, pag. 98, anno 1646.

« mosso, e la natura ci mostra esser questa tanto illimitata che tutto ciò che pur « ha della resistenza ad esser penetrato, non ne offre invece nessuna ad esser mosso « o a ricevere qualunque più alto grado di velocità. Il che intendo per quanto ri- « guarda il corpo in sè, poichè, sebbene sembri che ogni corpo resista alquanto « ad un contrario motore, non dipende tuttavia questa resistenza dal corpo stesso, « così come lo considero ora, spogliato di qualsiasi tendenza verso un luogo de- « terminato: tendenza che considererò in quinto luogo ».

« Di tale attitudine passiva a muoversi, c'è una prova splendida . . . . » Prova consistente nel celebre argomento di Galileo del battello situato su un'acqua quieta, il quale è mosso da qualunque minima forza. Argomento che fu ripetuto anche dal Descartes, Baliani, Borelli ed altri. Un'altra prova che adduce il Ballo è quella d'un disco rotondo d'argento poggiante pel centro sopra una punta, il quale, ancorchè leggermente mosso in cerchio, seguiterà a girare per tanto tempo « da sem- « brare appena credibile ».

« Si ferma finalmente per le reazioni sia del peso, sia dell'attrito, sia dell'aria, « le cui parti si trascina dietro. Avviene così che per la resistenza del proprio peso, « dell'attrito e dell'aria, a poco a poco si venga vuotando del concepito movi- « mento ».

Ma, una volta astratta nei corpi la materia dal peso, non c'era più ragione per non estendere ad ogni direzione dello spazio quella indifferenza o « mobilità passiva », come la chiama il Ballo, che Galileo aveva dimostrato e asssodato sperimentalmente per quell'unica direzione in cui a lui era stato possibile eliminare l'azione perturbatrice del peso. Ed infatti il Ballo lo dichiara espressamente: « Con- « sideriamo ancora esser il mobile disposto a muoversi verso qualunque direzione « ove sarà diretto dal movente. Giacchè, finchè si tratti d'un corpo, così come io « ora lo considero, privato di qualsiasi tendenza, tanto verso il centro, quanto verso « qualsiasi altra direzione, non ci sarà maggior ragione d'ammettere questa pas- « siva mobilità piuttosto per l'ingiù che per l'insù, o per qualunque altro verso. « Anzi da questa considerazione, potrebbe trarsi che non s'abbia da parlare nè « d'un in su, nè d'un in giù: onde più facilmente si formerà l'idea d'un indiffe- « renza del mobile verso qualunque direzione ».

Quarta proprietà. — Da questa indifferenza dei corpi verso qualunque direzione nello spazio, ne viene, deduce immediatamente il Ballo, similmente a ciò che aveva fatto anche il Cavalieri [1]) che anche il movimento debba persistere indefinitamente lungo qualsiasi direzione:

---

[1]) « Hora nel grave che spiccandosi dal proicente, viene indirizzato verso qualsiasi parte, per « esempio, mosso per una linea elevata sopra l'orizzonte, vi è bene la gravità che opera, ma « quella non fa altro che ritirare il mobile dalla dirittura della suddetta linea elevata, non ha- « vendo che far niente coll'altro moto, se non per quanto viene il grave allontanato dal centro « della terra, *astraendo* adunque nel grave la inclinatione al centro di quello come anco ad altro « luogo, egli resta *indifferente* al moto conferitogli dal proiciente, e perciò se non vi fosse l'im- « pedimento dell'aria, quello sarebbe uniforme: ragionatamente adunque si potrà supporre che i « gravi spinti dal proiciente verso qualsiasi parte, mercè della virtù impressa, camminano unifor- « memente non avendo riguardo all'impedimento dell'aria (Loc. cit., pag. 157).

Un altro passo simile in cui dalla indifferenza si deduce la continuazione del movimento, lo abbiamo già citato nella nota [1]) a pag. 5.

« Donde segue direttamente che il mobile, al quale non conferii ancora nessuna « tendenza, acquistata che abbia una volta una velocità, non sarà capace di ridursi « da sè stesso in quiete, finchè non incontrerà contrari impedimenti. Onde avverrà « che esso conserverà perpetuamente quella velocità e grado di movimento; allo « stesso modo che qualunque altra qualità persiste senza fine nel proprio soggetto « finchè non sopravvenga azione contraria e purchè questo non abbia contro di lei « nessuna opposizione, bensì ogni attitudine a mantenerla ».

Deduzione dunque puramente razionale della persistenza del movimento dalla indifferenza, che, per essere compiuta tanto dal Ballo che dal Cavalieri getterà, unitamente alle chiare considerazioni del Baliani sul legame da lui stabilito fra i due principi [1]), ancora molta luce sulla via che forse battè Galileo. Del resto abbiamo già detto prima, come, nell'oscurità che avvolge la scoperta della persistenza del movimento da parte di Galileo, paia di dover fissar l'attenzione su quelle considerazioni ed esperienze, le quali condussero Galileo alla constatazione della più completa indifferenza dei corpi al movimento e della più assoluta indipendenza di più movimenti tra di loro, essendo i corpi situati sul piano dell'orizzonte. In nessun miglior modo credo allora che, in mancanza d'una vera e propria dichiarazione di Galileo stesso, possa provarsi la giustezza di quest'ipotesi, riguardo al procedimento da lui tenuto per arrivare alla certezza che il movimento persiste, quanto mostrandone la coincidenza col modo tenuto da coloro che più gli furono vicini.

Dimostrata l'indifferenza sul piano orizzontale, sarebbe Galileo passato — come mostra assai chiaramente di fare nelle celebri lettere sulle Macchie solari — [2]) per semplice deduzione alla persistenza del movimento sul medesimo; così come i suoi discepoli dalla indifferenza ammessa per qualunque direzione passarono, per deduzione immediata, alla persistenza del movimento in generale.

---

[1]) « Più volte avevo pensato che fosse assai consentaneo alla natura che dai più semplici prin-« cipii s'avessero a produrre i più mirabili effetti .... e mi sembrò probabile che ai mobili fosse « fornita tal natura da potersi da una semplice proprietà immediata, derivare tutte le altre. E « poichè or fu detto potersi muovere un mobile senza motore, pare da ciò potersi inferire che lo « stesso movimento produca altro movimento e che, per così dire, questo da se stesso si estenda « e continui. Tanto che una volta mosso un mobile, questo sia capace di sempre seguitare a muo-« versi nella medesima maniera: da che venni in idea che tale fosse la natura dei mobili da po-« tersi questi comportare *indifferentemente* tanto verso la quiete che verso il movimento » (De Motu, liber IV, pag. 97, anno 1646).

[2]) Nelle lettere sulle Macchie solari che sono il più antico documento di Galileo in cui appaia espressa la persistenza del movimento è infatti questa, appunto in tal modo, derivata: «... ad « alcuni movimenti (i corpi) si trovano indifferenti, come pur gl' istessi gravi al movimento ori-« zontale, al quale non hanno inclinazione, poi chè ei non è verso il centro della terra, nè repu-« gnanza, non si allontanando dal medesimo centro: e però, rimossi tutti gl' impedimenti esterni, « un grave nella superficie sferica e concentrica alla terra sarà *indifferente* alla quiete ed a i mo-« vimenti verso qualunque parte dell' orizonte, *ed in quello stato si conserverà* nel qual una volta « sarà stato posto; cioè se sarà messo in stato di quiete, quello conserverà, e se sarà posto in « movimento, v. g. verso occidente, nell' istesso si manterrà: e così una nave, per essempio, avendo « una sol volta ricevuto qualche impeto per il mar tranquillo, si muoverebbe continuamente intorno « al nostro globo senza cessar mai, e postavi con quiete, perpetuamente quieterebbe, se nel primo « caso si potessero rimuovere tutti gli impedimenti estrinseci, e nel secondo qualche causa mo-« trice esterna non gli sopraggiugnesse ». Lettera 2ª, 14 agosto 1612 [Edizione Nazionale, v. 5, « p. 134].

Del resto non si pretende d'esaurire e racchiudere in questa sola deduzione tutto il procedimento mentale compiuto da Galileo. Altri motivi razionali e sperimentali hanno indubbiamente concorso alla prima scoperta della nostra cosiddetta legge d'inerzia; ed io ho voluto soltanto mostrare uno speciale di questi e forse quello che tutti gli altri ha compreso e dominato.

Ed infatti neanche il Ballo, mostrando in ciò di possedere una chiarezza di idee come soltanto si ritrova oggi fra i moderni, fu persuaso che questa o altre deduzioni puramente razionali potessero da sole bastare a provare la persistenza del movimento, senza darne riprove sperimentali. Al contrario il Baliani non pare aver sentito il bisogno di cercare giustificazioni o prove sperimentali per questo che egli tenne come assioma indiscusso e indiscutibile; nè similmente Descartes il quale definitivamente impose quel carattere dogmatico che, fin si può dire ai giorni nostri, la legge d'inerzia ha posseduto [1]. Carattere del resto che da quanto appare dal Ballo e da quanto asserisce espressamente Mersenne (1644) dovè assumere prestissimo [2].

Il Ballo dunque adduce delle esperienze, ma queste, come del resto quelle addotte da Galileo nella 2ª giornata dei Massimi Sistemi, son più atte a dimostrare semplicemente che i corpi seguitano a muoversi per virtù propria dopo essere stati abbandonati dal movente, indipendentemente da ogni azione del mezzo ambiente, contro ciò che pretendevano i peripatetici, anzichè a provare che questi movimenti debbano poi continuare eterni. Ma l'interessante, e, direi quasi il mirabile, sta appunto in ciò che il Ballo ebbe ancora, antecedendo i moderni completamente, chiara coscienza della impossibilità di provare sperimentalmente per via di-

[1]) A tal proposito infatti il Mach osservava: « L'insegnamento della fisica quale a me è « stato impartito fu probabilmente tanto cattivo e dogmatico quanto quello di cui hanno da com- « piacersi i più vecchi dei miei signori avversari e colleghi. L'inerzia era ammessa come un dog- « ma del tutto adeguato e conforme all'intero sistema.... » (Mechanik, ed. VI, pag. 295).

[2]) Scriveva infatti Mersenne: « Vi sono molti grandi personaggi che credono ciò talmente « vero (la persistenza del movimento), da poterlo riportare alle nozioni comuni. Chi infatti potrà « privare di movimento un corpo quando non sia presente chi ciò possa fare? Poichè si suppone « che Dio non neghi il suo concorso ad un movimento una volta impresso più di quel che non « lo neghi alle altre cose; ed essendo il movimento un modo reale in che maniera finirà se non « l'ostacola nessun impedimento? Che se poi alcuni movimenti paiono estinguersi più facilmente, « altri più difficilmente, non significa ciò che essi s'estinguono da sè e senza ostacoli o per natura « propria, ma solo che agli uni piuttosto che agli altri fanno opposizione maggiori impedimenti. « Oppongono tuttavia alcuni non esser niente affatto assurdo che il movimento ed altre cose ancora, « siano di tal natura e di tal condizione che, come si generano, così pure facilmente finiscano ».

Egli però da parte sua riteneva come solo l'esperienza potesse decidere la questione:

« Si debbono dapprima consultare le esperienze, le quali paiono dimostrare che un movimento « è sempre duraturo, purchè sia tolto qualsiasi impedimento. Infatti una palla che legata a mo' « di pendolo ritorna quasi alla stessa altezza da cui è discesa, mostra abbastanza chiaramente, col « suo percorso, che essa sarebbe ritornata proprio alla stessa altezza se l'aria non l'avesse osta- « colata. Il medesimo è da dirsi di due piani inclinati contrapposti (idemque de margine cribri di- « cendum) nei quali una palla d'avorio o d'oro o di qualunque altra materia ben polita e dura, « ritorna quasi alla stessa altezza donde è caduta; tanto che tolta la resistenza del mezzo, ci sarà « appena qualcuno che possa dubitare che la palla non ritornerebbe alla stessa altezza. Ora, posto « ciò, necessariamente ne segue il moto eterno ». Mersenne; Ballistica, vol. II, prop. 38, pag. 136; Parigi 1644.

retta la persistenza eterna del movimento. Come cioè egli, mettendosi tutt'affatto dal punto nostro di vista moderno, riconobbe potersi dare soltanto prove indirette di tal principio. Prove consistenti nel constatare semplicemente e puramente come nessun fatto e nessuna esperienza gli contraddicano. Aggiungendo, ad ulteriore conferma e riprova, come dall'impiego di esso s'avvantaggi altamente lo studio dei fenomeni meccanici ed in particolar modo sia con esso possibile dare una spiegazione soddisfacente del problema dell'accelerazione delle gravità.

« In questa verità convengono tutte le esperienze e nessuna le è contraria.... « stia dunque ferma questa proposizione che la ragione detta, che tutte le esperienze « approvano e che, quantunque *non dimostrata* da nessuna esperienza, tuttavia può « assumersi e concedersi in vista della risoluzione assai conveniente che essa dà « dell'ardua nostra questione. Tale infatti è anche la maniera seguita da Aristotele « per tener buona una sua ipotesi quando con questa avesse potuto risolvere que« stioni lasciate insolute dagli antichi. Devesi dunque tener per fermo ciò, che un « mobile, ricevuto una volta un movimento, non lo abbandonerà più finchè quella « velocità non gli venga tolta da forza o azione contraria. Allo stesso modo che « ogni altra qualità corporale, di cui un soggetto atto a ritenerla sia stato fornito, « non ha bisogno per mantenersi della continua assistenza ed azione dell'agente. Il « quale assioma, come accettato per comune consenso e come abbastanza provato « dalla ragione, io assumo come principio fondamentale della mia dimostrazione. »

Un'ultima considerazione infine rimane a fare sulla maniera con cui il Ballo si rappresentò, a somiglianza del Gassend, di Descartes e del Baliani, il fatto della persistenza del movimento. Egli infatti per il primo mostrò nella sua breve opera di concepire la continuazione eterna del moto come proprietà dei corpi, rinunziando, come abbiamo già detto di sopra, a quella rappresentazione di « forza impressa » di cui Galileo, seguitando l'uso dei suoi predecessori, non potè mai fare a meno. Tanto da poter dire che, anzichè d'una vera e propria persistenza del movimento, s'abbia piuttosto a parlare per Galileo d'una persistenza della « forza impressa ».

Onde se finora poteva credersi col Wohlwill che il primo a rinunziare alla rappresentazione di forza impressa fosse stato il Gassend, seguitato in ciò dal Baliani [1]); dobbiamo ora constatare come già ambedue fossero stati preceduti dal Ballo.

---

[1]) Così infatti il Wohlwill dice del Gassend: « Maggior chiarezza mostrano le sue osser« vazioni sulla forza impressa. La legge d'inerzia contiene la risposta definitiva alla questione per « cui in un'epoca anteriore si era venuti alla rappresentazione di una impressione della forza « motrice. Questa forza impressa appare ora ad un miglior esame dei fenomeni non solo come un « concetto superfluo, ma anche equivoco e falso. Ciò è in Gassend espressamente dichiarato. Alla « natura del movimento — egli dice — appartiene il persistere in quanto esso è in un soggetto « persistente e nulla di contrario gli è d'ostacolo; non serve a ciò nessuna azione continua da « parte della causa motrice. Se si vuol parlare d'una forza attiva dei corpi a proseguire il mo« vimento, s'avrà allora non da designarla come impressa, ma piuttosto come « eccitata » dal mo« tore a passare da uno stato passivo in quello attivo... ». A cui così il Wohlwill aggiunge del Baliani: « Considerazioni simili e pure di contenuto personale pubblicò non molto tempo dopo « di Gassend anche Baliani. Il quale fin dall'anno 1611, come egli stesso informa, si era « occupato di problemi intorno alla dottrina del movimento..... » (loc. cit., fasc. XV, pag. 358).

Quinta proprietà. — « Un corpo più solido dell'aria, anzi (come dovrebbe ve-
« ramente dirsi, checchè da molti si pensi sulla leggerezza di alcuni elementi) ogni
« corpo materiale, ha ricevuto dal Creatore della natura una certa tendenza a rag-
« giungere il centro del mondo. E affinchè il corpo perpetuamente si sforzi verso
« di lui, questa tendenza è tale che, nel mobile in cui si trova, essa stà continua-
« mente in azione e, con la sua intima presenza, lo spinge assiduamente, e quasi
« con mano premente, o a muoversi, o a pesare. » Attività — prosegue — che mai
non cessa o s'interrompe, mentre al contrario gli « effetti avventizi » possono essere
affievoliti e distrutti. Per il che avviene che nei corpi si sussegua un continuo av-
vicendarsi di tali « effetti avventizi », i quali ora compaiono ed ora dispaiono,
mentre c'è qualche cosa nei corpi stessi che rimane sempre stabile e costante.
Questo qualche cosa è la loro materia, la quale, per l'alterna vicenda delle forze
che i corpi ora riprendono ed ora depongono, rimanendo essa costantemente inva-
riata, suggerisce al Ballo questa caratteristica immagine: immagine che esprime
sempre più vivamente l'esistenza a sè della materia e la sua piena consistenza mec-
canica indipendentemente dal peso.

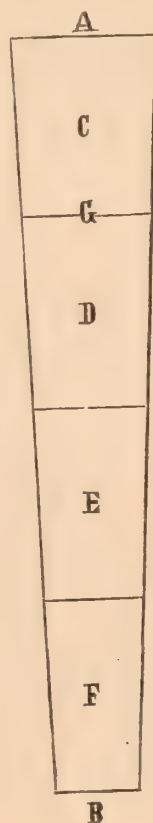
« Per la qual cosa un mobile ci sembrerà comportarsi quasi come un facchino
« il quale riprende e depone più volte il suo bagaglio, ma non mai però la mole
« del proprio corpo ».

Sesta proprietà. — La velocità è direttamente proporzionale allo spazio ed in-
versamente al tempo. Oltre a ciò è fuori dubbio che il moto può aumentare di grado
all'infinito se lo assista sempre la forza motrice; tanto che un mobile non avrà dif-
ficoltà, giusta la terza proprietà (proprietà dell'indifferenza per la quale un corpo
non offre nessuna resistenza a passare a qualunque maggior grado di velocità) a
percorrere un determinato spazio in tempo sempre minore.

In virtù di queste proprietà « dimostrerò — conclude il Ballo — che un mo-
« bile deve possedere maggior velocità in fine che al principio o nel mezzo del
« suo movimento di caduta. In quanto poi al mezzo ambiente, che suppongo ripieno
« d'un corpo uniformemente fluido ed atto ad essere uniformemente diviso dal mo-
« bile cadente, non ne terrò alcun conto. Giacchè tutto ciò che può provenire dal
« mezzo, essendo cosa estrinseca ed accidentale, può trascurarsi nella dimostra-
« zione.

« Sia lo spazio AB da percorrersi dal mobile di moto naturale: e questo spa-
« zio lo si divida in parti uguali C, D, E, F e si lasci cadere il mobile dal punto A.
« Certamente, per la natural tendenza al basso, trapasserà per primo il tratto C.
« E la velocità che possiede il mobile al principio la diremo velocità uno, anzi,
« per non inoltrarci in tante divisioni, diremo uno la velocità del mobile per tutto
« il tratto C. Se ora giunti al punto G supponiamo che il mobile venga a spo-
« gliarsi della sua tendenza verso il centro del mondo, non pertanto (secondo ciò
« che s'è visto alla quarta proprietà) il mobile lascerà il movimento e la velocità
« una volta acquisiti, finchè sia libero da ostacoli; ma perpetuamente li conser-
« verà, comportandosi in tutto come se tal natural tendenza non l'avesse mai pos-
« seduta, e fosse stato mosso invece per quel certo tratto, con quella certa velocità

« e per quella certa direzione da un altro motore qualunque, che, dopo averlo so-
« spinto, l'avesse poi abbandonato. Ma in realtà il mobile non si spoglia della sua
« naturale tendenza come per comodità di dimostrazione ho invece supposto. Onde
« per il tratto D sarà agitato anche dalla sua tendenza ingenita come da stimolo
« perenne: poichè oltre la velocità avventizia una volta acquisita sussiste quella in-
« terna tendenza naturale che (secondo la quinta proprietà) assiduamente lo sti-
« mola e lo spinge quasi con mano. E poichè quello stimolo non
« rimane senza un conveniente effetto, allo stesso modo come, per
« l'aggiunta d'un altra candela, non rimane un ambiente già illu-
« minato di illuminarsi ancora più intensamente, (giacchè un mobile
« è capace di ricevere qualunque più alto grado di velocità, giusta
« la terza proprietà); ecco che il corpo, in seguito alla velocità
« preesistente e all'impulso del peso, percorrerà il tratto D in minor
« tempo che se lo avesse dovuto percorrere con la sola velocità
« acquisita. E quindi con maggior velocità (giusta la terza proprie-
« tà) percorrerà il tratto D di quel che percorse il tratto C. Grado
« di velocità che sarà come due. Ecco che allora, se non sia im-
« pedito, conserverà la velocità di due per il tratto D e così di
« seguito in perpetuo (giusta la proprietà quarta), anche se alla
« fine del tratto D il mobile si spogliasse della tendenza naturale.
« Ma ciò non avviene, onde il corpo per la stessa ragione per-
« correrà il tratto E in minor tempo di quello con cui percorse
« il tratto D. E per la stessa ragione in tempo ancora minore il
« tratto F. E così sempre di seguito all'infinito in tempo sempre
« minore, vale a dire (giusta la sesta proprietà) con sempre mag-
« giore e maggiore velocità. Il che era quanto si doveva dimo-
« strare ».

A
C
G
D
E
F
B

A questa spiegazione dell'accelerarsi dei corpi cadenti seguono a mo' di conclusione, alcune brevi considerazioni nelle quali il Ballo fa risaltare l'importanza del principio della persistenza della velocità, non solo per la teoria dei proietti, ma, quel che è maggiormente interessante, per la teoria dei movimenti celesti. Ricordiamo infatti che fu opinione comune a quest'epoca, che per spiegare il movimento perenne degli astri o delle orbite si dovesse supporre in essi l'esistenza di « Intelligenze » o anime motrici. Opinione che ora il Ballo si sente portato ad escludere assolutamente, giacchè l'esistenza d'una forza continua non potrebbe fare a meno, in virtù dei due principii della indifferenza e persistenza dei movimenti, di determinare nell'astro o nell'orbita un movimento accelerato pari a quello dei corpi cadenti. E le sue parole dicono precisamente così:

« Dalla dimostrazione si apre una via assai conveniente per la trattazione dei
« proietti e si possono da essa dedurre importanti corollari di balistica; similmente
« per ciò che riguarda il tiro a volo degli uccelli [1]) e per molte altre questioni

---

[1]) Il problema di colpire gli uccelli a volo dette argomento a Galileo per una lunga discussione nella seconda giornata dei Massimi Sistemi sulla persistenza e componibilità dei movimenti. [Ediz. Naz., v. 7, p. 212].

« del movimento. Onde, edotto ormai da questa dimostrazione, esamini il lettore se « sia proprio necessario che delle Intelligenze provvedano, con azione continua, al « movimento delle orbite celesti, mentre a queste non si oppone nessun ostacolo, « nè da esse deve superarsi nessuna reazione; a differenza di quel che avviene per « un battello che deve di continuo superarne a forza di remi. Ed insieme rifletta « se, ammesso che delle Intelligenze provvedessero a tale opera, non fosse anche « qui per accadere a queste orbite ciò che è stato dimostrato accadere nel movi- « mento di gravità. Giacchè quanto a me basta d'aver così brevemente ragionato « a vantaggio e stimolo degli studiosi. »

***

Giuseppe Ballo era nato a Palermo il 29 Luglio 1567 da Graziano Ballo, barone di Collatuvi e Alfonsina Agliata dei principi di Villafranca. Vestì da giovanetto l'abito talare, abbandonando i titoli nobiliari e andò a studiare teologia in Ispagna, donde, al ritorno in patria, fu fatto da Filippo IV, cappellano regio a Bari. Quivi trascorse la maggior parte della sua vita, alternando i suoi studi teologici — per i quali fu in relazione con i maggiori teologi del tempo fra cui il celebre cardinale Bellarmino — con studi di matematica, d'astronomia e di poesia italiana e latina [1]).

Nel 1635, spinto dagli amici a pubblicare finalmente il frutto delle sue meditazioni, si recò a Padova per far stampare il suo libro « De foecunditate Dei » e lì, durante la stampa di questo, compose il breve opuscolo che abbiamo studiato, facendolo pubblicare in calce alla sua maggior opera.

Durante la sua dimora a Padova, incontrò assai simpatie per il suo carattere lieto, i modi affabili e la grande cultura, suscitando in tutti forte meraviglia per la sua portentosa memoria, per la quale citava a mente tutti gli scolastici. Strinse lì amicizia col letterato Tomasini, che divenne poi vescovo di Verona e che, morto il Ballo, ne scrisse l'elogio insieme a quello di altri uomini illustri del tempo. Elogio dal quale hanno più o meno attinto tutti gli altri biografi. Stampata la « De foecunditate » tornò a Bari, per riprendere un'altra volta il viaggio di Padova nel 1640, per pubblicarvi un'opera sulla Eucarestia: argomento su cui aveva meditato intensamente per trent'anni. Ma in questa seconda dimora di Padova lo colse la morte il 2 novembre 1640, vecchio di 73 anni, lasciando, come riferisce il Mongitore, in corso di stampa un volume in folio di cose matematiche ed astronomiche. Fu sepolto nella chiesa dei santi Simone e Guido dove è ricordato da una lapide, legando la sua ricca biblioteca ai padri Teatini.

Gli autori che oltre il Riccati di lui si sono occupati o che lo hanno citato, sono:

Tomasini Iacopo Filippo, *Elogium virorum illustrium*, vol. II, pag. 334.
Baronio Francesco, *De majestate Panormitorum*, lib. III.
Freero Paolo, *Theatr. viror. erudit. clar.*, pag. 489.

---

[1]) Compose infatti un poema latino, una raccolta di « Carmina et anagrammata » e delle Rime in italiano. Opere per le quali ebbe un posto nelle storie della letteratura che appresso sono citate.

Crescimbeni Giovanni Maria, *Istoria della volgar poesia*, vol. V, pag. 165, Roma 1698.

Mongitore Antonino, *Bibliotheca sicula*, tomo I, pag. 332, Palermo 1707.

Quadrio Francesco Saverio, *Della Storia e della ragione d'ogni poesia*, vol. II, pag. 311, Bologna 1739-52.

Mazzucchelli Giammaria, *Gli scrittori d' Italia*, tomo II, parte I, pag. 187, Brescia 1758.

Adelung I. C., *Fortsetzung und Ergänzungen zu c. G. löckers*, Allgem. Gelehrten-lexicon, Leipzig 1784-87.

Rambelli Giuseppe, *Intorno invenzioni e scoperte italiane*, pag. 382, Modena 1844.

Biographie universelle ancienne et moderne par une societé des gens de lettres, Paris 1843-62.

Poggendorf, *Biographische literarisches Handwörterbuch*, vol. I, Leipzig 1863.

Riccardi Pietro, *Biblioteca matematica*, Modena 1868.

JOSEPHUS BALLUS

DEMONSTRATIO DE MOTU CORPORUM NATURALI

DIVO

DIONYSIO

AREOPAGITAE

POST MARTYRIUM FELICISSIME

CONSUMMATUM

MOTU SUPERNATURALI

PROLIXA VIA SPONTE

PROGRESSO,

PAUPERCULUS SERVUS,

MIRACULI EXCELLENTIAM, SAPIENTIAE

MAGNITUDINEM,

CONTEMPLATIONIS PROFUNDITATEM

ANIMO DEMIRANS, ET SILENTIO VENERANS,

TRACTATIONEM

PUSILLAM,

DE MOTU CORPORUM NATURALI

SUBSTERNIT, DICAT, CONSECRAT

IOSEPHUS BALLUS.

DE MOTU CORPORUM

NATURALI

NONDUM AUDITA RATIO DEPROMITUR,

AC

DEMONSTRATUR

1. — Resolutio quaestionis de motu corporum naturali, satis ambiguae, et opinionum varietate celebris, adhuc desideratur. Quae enim ingenia antiquorum solertissima exagitavit, non mirum si minus acuta recentiorum torqueat. Certe, non propterea quod res diu agitata est, et doctissimorum quidem iudicio censetur nondum resoluta, iccirco ulteriorem perquisitionem ita negligere debemus, ut, insuperabilem putantes, postmittere velimus. Enimvero si universam doctrinam ab alijs suggerendam praestolamur, et non quid ultra propria defatigatione, ac studio adipisci audeamus; in scriptorum autem monimentis nil de ea re firmum, certoque resolutum agnoscimus, necesse omnino erit in quaestionis caligine perpetuo versari. Porro rem, inter manifesta opera naturae oculorum obtutui, sensuumque contrectationi expositam, operae pretium esset nos denuo tentare, novisque studijs aggredi; si forte daretur doctrinae huius mica potiri; et pudor non sit, in re philosophica, ac propemodum familiari, eousque praeceptorum ingestionem expetere, ut ea destituti segniter torpeamus. Satagant ergo interdum studiosi iter ambiguum fidenter arripere, quod majores ad doctrinae metam, residuum reliquerunt. Mihi itaque, id ipsum experiri cupienti, novissimamque rationem de praedicto motu promere cogitanti, libet praemittere peculiarem discursum, quem circa hanc materiam habet Benedictus Pererius. Unde, lector, excipias tum quod negotium adeo urserit philosophos, ut eorum aliquos ad futilia cogitandum adegerit; tum quod, quae a me demostranda est resolutio (cuius praecipua fundamenta ab Aristotele non discrepant) nullorum sit resolutionibus consonans. Nolo autem ad oppugnationem opinionum, defensionemque positionis diffundi; quatenus stultum est putare, posse opiniones, et argumenta inveniri, quae demonstrationi praeiudicent. Quare et opiniones satis impugnatas, et positionem satis defensam esse constabit; si demonstratio constabit.

---

2. — Haec itaque habet Benedictus Pererius in opere, quod scripsit; *De communibus omnium rerum naturalium principiis, et affectionibus:* et in operis libro 14. *De varietate, et divisionibus motus,* capite 3.

Segue la citazione per cinque pagine. Finita la quale così riprende:

Hactenus Pererius.

Volo autem quandam studij mei sententiam aperire, studiosorumque examini proferre; et ut vitetur aequivocatio, praemoneo, quod sub nomine, *motus*, aliisque forte verbis, quae promiscue significant motus genere diversos, audiri debet motus localis, juxta subiectam materiam. Iamque sic philosophor.

3. — Intelligo quod activum principium motus, et activum principium gravitatis secundum rem identificentur; ut unum idemque sint re ipsa. Principium dico propendentiam in actu primo tendendi aliquo versus: motus autem et gravitas, actus secundi, diversificantur, tanquam effectus ab illo uno principio, eo feremodo quo in via peripatetica lumen et calor producti a sole sunt diversi effectus unius principii in sole. Enimvero motus est effectus propendentiae non impeditae; gravitas autem est effectus eiusdem propendentiae impeditae; ideo enim corpus gravat; quia propendet aliquo versus, et moveri impeditur: si enim omnis propendentia deponeretur, profecto omnis gravitas cessaret. Documentum (dummodo intelligatur cum praedicta ratione impedimenti) est Aristotelis, quod Pererius § *Verum opinionem*, et proxime ad relatum discursum in fine capitis, innuit, et eludisse putat vana, quam contestatur, experientia: siquidem ea resolutionem fert plane diversam a viri proposito. Porro quodcumque propendens in eadem statui, et in eodem actu, tam si solutum currit, quam si impeditum gravat. Verbigratia, arcus, qui erat tensus, tanta vi sagittam primo relaxatus impellit, quanta impeditus obstaculum premebat; et eatenus corpus ponderat super sustentamentum, quatenus ultra progredi impeditur. Huius veritatis habentur experientiae; vidilicet, et quod, resecato impedimento pondus evadat in motum; et quod impedimento posito, motus evadat in pondus. Experientia de primo. Nam si id, quod sustinet, et gravatur, secundabit sustentati propendentiam, procul dubio tantundem pressione levabitur, quantum adhibebit secundantem motum; eatenus ut videatur grave, totum id, vel partem ejus, quod erat *gravare*, refundere in totum id vel partem ejus, quod est *moveri*. Experientia de secundo. Nam corpori minoris gravitatis, si denuo addatur motus velocior, quam sit, quem fert propendentia naturalis, et occurrat impedimentum; tunc constabit, corpus ita essa gravitate auctum, ut aequetur in ponderando corpori maioris gravitatis, et superet. Exempli gratia, sit libra, in cuius altera lance locetur assipondium, eaque lanx subsideat suffulta sustentaculo; altera vero lanx vacua pendeat nulla suffulta inferiore sustentamento; et in hanc cadat triens, vel sexstans, e debita distantia deorsum veniens, seu cum sufficiente impulsu proiectum, cuius cursui vacua lanx occurrat; tunc enim videbitur sextans sursum attollere assipondium, atque ideo preponderare; donec adventitium motum remittat. Sunt enim in corporibus formationes, seu effectus motionis, seu, respective ponderositatis, et hi abundant ab activa, ac genuina propensione; eosque appello, *adventitios*; non propterea quod oporteat habuisse principium extrinsecum; abstrahunt enim a principio; sed quia adveniunt corpori, et sunt in corpore praeter congenitam, naturalemque propensionem: iique solent inter se consolidari, atque intendi eo fere modo, quo plures luminosi effectus, et aliae qualitates consolidantur, et intenduntur in uno, eodemque subiecto. Porro naturalis propensio, cum aliquo consequente effectu, semper viget, et non est a quopiam con-

Motus est effectus propendentiae non impeditae. Gravitas est effectus propendentiae impeditae.

Pondus solutum evadit in motum.

Motus impeditus evadit n pondus.

Effectus recepti in mobili dicuntur adventij.

trario naturali agente impedibilis: formationes autem seu effectus recepti in mobili, quos appello adventitios (quodcumque habuerint sive externum sive internum principium) sunt a contrario agente corruptibiles; prout infra num. 8 considerabo. Sed operae pretium est, in huius tractationis gratiam, corpus mobile objicere prius omni virtute spoliatum; postmodum paulatim induere; unde sumam demonstrationis principia, quae attente considerari propono.

Adventitij effectus in mobili sunt a contrario agente corruptibiles.

4. — Primo considerandum. Corpus materiale constare trina dimensione: et quoniam eadem dimensio competit quoque corpori mathematico, iccirco addidi particulam, *materiale,* quia est adducenda oratio ad corpus mobile. Eiusmodi corpus intelligo privatum virtute locum occupandi; proindeque virtute tam ad moveri quam ad movere; iuxta fere id, quod doctores nominales audiunt esse qualitates corporum; nimirum illae locum non occupant; sed sunt penetrabiles, et penetrativae; itemque non movent, neque moventur per se, nisi ratione solidorum, in quibus subiectantur; a quo nunc abstraho. Corpus itaque materiale tale esset, quotiescumque a Deo eiusmodi potestate spoliaretur.

Corpus materiale constat trina dimensione.

5 — Secundo considerandum. Inter virtutes materiali corpori tributas unam esse soliditatem impenetrabilem; cui consequens est occupari a corpore tantundem spatii, cum exclusione aliorum corporum, quanta est propria, constrictaque dimensio, seu moles. Nolo autem ingredi arduam quaestionem, an detur penetratio corporum in natura; sed nomino impenetrabilitatem, prout solitum est negari penetrationem de solidis corporibus; quam audio hic crasso modo, in ordine ad motum de quo tantum agere intendo.

Soliditas impenetrabilis est virtus tribuita corpori materiali.

6. — Tertio considerandum. Corpori materiali esse passivam aptitudinem ad moveri, eamque taliter illimitatam esse natura nobis ostendit, ut, quod resistentiam omnimodam habet ad penetrari, nullam habeat ad moveri, seu ad recipere quamtumvis maiorem formationem motus; quod intelligo, quantum est ex ipso corpore: nam licet videatur omne corpus aliquantum resistere motori contrario, illa tamen resistentia non est a corpore, ita simpliciter considerato, sicut nunc considero; nisi sit aliqua contraria propensione indutum; sicut quinto loco erit considerandum. Talis passivae aptitudinis, ad moveri, insigne est argumentum; quoniam onerata magna navis in humido, levi attractione hominis, in terra positi, imo minori, levissimoque momento dimoveatur. Illud etiam est rei ferme evidens argumentum; si punctum medium rotundae, et aequilibratae argentae patinae, quod designatum est patinae centrum, insistat super cuspidem aliquam; et patina non multa vi, neque per magnam circuli portionem, sed levi quodam impulsu, ex brevi ductione ingesto, moveri incipiat: quippe eveniet, patinam ita pluries, et pluries volutari, ut absolutarum circulationum numerum praeter existimationem multiplicari videamus; incredibile quippe videatur posse patinam, ita leviter ductam, tot circulationes absolvere, quot vere absolvit: sistitur tandem ob reactiones, quas patitur tum ex fricato fulcimento, tum ex circumfuso aëre, cuius plures succedentes partes, quae quiescebant, aliqua vi rapit: et sic, proprio pondere, sustentaculo, et aëre reagentibus, paulatim evacuatur ingesta motio. Considerabimus etiam huiusmodi mobile paratum esse, quoquoversus a movente dirigitur, eo versus moveri; quoniam, dum corpus mobile considerandum propono, quod sit absque naturali quapiam propensione sive ad centrum, sive alio versus, iam non erit de praedicta passiva mobilitate maior ratio ad deorsum, quam ad

Corpus mobile nullam habet resistentiam ad motum.

Reactiones causa sunt sistendi motus in mobile.

Mobile indifferentiam habet ad quoversus moveri

sursum, et ad reliqua: imo, ex tali consideratione, non esset nominare sursum, au deorsum; quo facilius de quoquoversus mobilis indifferentia praesens consideratio astruatur.

Mobile, accepta formatione motus, nunquam valebit seipsum ad quietem adducere

7. — Quarto considerandum. Inde recte sequi, ipsum mobile, quod nondum dedi aliqua tendentia indutum, acquisita semel formatione motus, dum nullum contrarium occurit, et impedit, non valere seipsum ad quietem sistere; unde est, quod eam formationem, ac rationem motus perpetuo retinebit; perinde ut quaelibet qualitas in subiecto proprio, quod nullas dispositiones contrarias, sed omnimodam aptitudinem ad eam qualitatem sustentandum, nullo occurrente contrario, perpetuis seculis in illo subiecto residebit. In hanc veritatem cunctae experientiae conveniunt, et nullae ei refragantur. Ecce sagittam, per palmale duntaxat spatium a nervo arcus impulsam, servare videmus eandem penetrationem temporis, et motus, qua primum expulsa est; unde fit, quod intervallum maximum ictu oculi pertransit, donec contraria naturalis propensio, aliave predicto motui contraria adventitiam formationem, paulatim reagendo, evacuabunt. Quippe concedi oportet sagittam, a nervo arcus destitutam, procedere ulterius absque alio motore, per aliquod spatium; quod si sic, certe non erit ratio, quin acceptam primo formationem motus servabit per aliud, et semper per aliud spatium, nulla data resistentia, aut agente contrario, quod esse posset, receptae formationis corruptor. Si vero ab adversariis negaretur posse sagittam pertransire quicquam spatii absque novo succedente motore; considerent hi velim, quod in negatum liquido recidunt, dum aliud corpus, puta aërem, itidem impulsum, nedum aptum esse volunt ad se ferendum, verum etiam ad impellendam sagittam assumunt, et nervi quasi vicarium, constituunt; maxime cum talis aër sit, qui propter fluidam, cedentemque naturam minus aptus est tam violenter gravissima corpora movere: etenim si sagitta, formatione motus accepta, se ulterius ferre non valet, et haec, secundum adversarios est conditio impulsorum utique neque aliud, quod similiter impellitur, se, et alia corpora ferre valebit; unde continget, quod tum aër, tum sagitta non longius movebuntur, quam sit associatio nervi; quod est contra experientiam. Insuper nervus est, qui immediato contactu sagittam recta impellit, aër vero potius a latere dividitur, quam directe motor sufficitur; et nihilominus plerique talem aëri potestatem faciunt qualem nec mille simul percutientibus malleis tribueremus. Nimirum pila, quae e tormentis bellicis excutitur, si in ipsa ad turrim appulsione amplius impelli ab aëre destitueretur; mille simul malleis acta non efficeret totum, quod (iuxta adversarios) facillime exequitur favore duntaxat aëris, a tergo quidem rarefacti, et non recta secundantis, sed ad globum transverse, et a latere succedentis. Quippe globi rotunditas recta moveri non patitur, impetumque ferientium facile eludit, nisi directe impetatur: et utcumque fluida, cedensque aëris natura motum, impetumque alio diverteret ubi minorem resistentiam nullo negotio est inveniri; quemadmodum constat validissimos ventorum flatus immotas tegulas praetergredi. Quinimo tam impossibile est, quod, aër sagittam, pilamve impellat, quam certum esse debet quod reactione retardet: oportet enim sagittam, pilamve, ratione impenetrabilitatis corporum, rationeque replendi vacui, immotum aërem a fronte dividere, et a tergo quasi raptare. Quod si oculis non constat illa raptatio, unde area facta est plura confingendi, eaque tanquam bona, ac vera oscitantibus, venditandi. Ecce quam perspicue aliud solidius, ac visibile elementum hujus negotij veritatem de-

Experientia de sagitta ab arcu erumpente

Aer quia est naturae fluidae, minus aptus est gravia corpora movere.

clarat: scilicet, in quieto mari, nulla ventorum, et similium agitatione commoto, quotiescumque actuaria navis, validissimo remigio ducta, et statim remigio destituta, fertur transcurrere aliquod spatium, tunc oculis concernimus quod nullus aquae globus, aut unda puppim ferit; imo quod ipsi aquae globi vi rapiuntur et quasi raptantur; adeoque sequentes fluctus videntur minus posse navem prosequi, et minus praesto esse ad replendum maris vacuum, ut fere semper foveae, et quasi hiatus maris retrorsum appareant; tantum abest, quod in feriendo, et impellendo fluctus abundent et navim feriant. Evidens quoque habemus experimentum; corpora scilicet, motu formata, motore desistente, moveri seipsis. Nam cymba, per quietum stagnum fune attracta, et secus ripam velociter ducta, in qua cuncta sane interius quiescunt, (quippe homo in ea vectus, et ab ea, tanquam a casula, undequaque circumtectus ne dum moveri se sentit, verum nec circum se fusum aërem aliquatenus moveri cognoscit: levissimumque filum ibi pendens, stat penitus immotum) si forte arenam offendit, fit protinus ut corpora, quibus a circumfuso aëre nulla vis inferebatur, partem antrorsam cum impetu feriant, seu concidant; quod si adversarii id aëri mordicus imputabunt; ad aërem orationem convertam; quid nam ibi fuerit movens aërem? Nec dissimilem, et magis vulgarem experientiam habemus; cum quis madefactis digitis, et in formam arcus tensis, indeque laxatis, aquae guttas iaculatur; etenim guttae e digitis tunc primo erumpunt nullo aëre impellente (contigua nempe digito gutta est) digiti vero se continent: oportet igitur fateri guttarum excursus causam esse eam formationem motus, quam guttae a digitis primo acceperunt. Firmum igitur stet propositum, quod ratio dictat, quod cunctae experientiae comprobant, quodque, etsi nullis experientijs probaretur, tamen, pro decentissima arduae ambiguitatis resolutione, assumendum, concedendumque esset: tali namque usus est probatione quandoque Aristoteles, quod sua positio esset bona; quia veterum ambiguitates, resolvebat. Persistendum itaque est in hoc, quod mobile, semel accepto motu, nunquam eum deserat, quandiu per vim actionemve contrariam ea formatione non privatur: instar corporalis qualitatis in subiecto apto nato, quae post sui productionem non egeat iugi assistentia, et actione agentis. Quod axioma, tanquam communiter, et sat rationabiliter acceptandum in praecipuum demonstrationis principium assumo.

Experientia de navi actuaria, currente in quieto mari.

Experientia de cymba arenam offendente.

Experientia de aquae guttis, quas digiti iaculantur.

Aristoteles I phys. prout ex cont. 71 comprobat Franc. Piccolominus

Motus in mobili est sicut qualitas in subiecto apto nato ad conservandum, ut non indigeat perpetua conservatione agentis.

8. — Quinto considerandum. Corpus aëre solidius, imo (quod vera ratione asseri debet, quicquid plurimi cogitent de levitate quorundam elementorum). Omne corpus materiale certam propensionem tendentiae ad mundi centrum obtinuisse a Structore naturae; ut mundi centrum perpetuo affectet, eaque talis est, ut cum mobili, in quo stat, semper actu vigeat, mobileque ipsum, cui semper intime praesens est, assidue manu quasi premente, adigat ad moveri, aut ad gravare: cui propensioni nil adeo sive blanditur, sive adversatur, ut quandoque ab operari desistat, tam si mobile sit in quiete compositum, quam si sit violenter raptum: non enim privari potest mobile naturali sua activitate cum necessarie inde aliquo consequente effectu; etiam si maxime violenta contraria raptione impetatur, quemadmodum sextans in libra nunquam desinit lancem gravare, tam si subsideat, quam si a praeponderante in altera lance assipondio sursum feratur; unde regula sit, nullis exceptionibus obnoxia; corpus positum extra centrum, aut non impeditum moveri, aut, respective, impeditum gravare; addidi, *respective*, propter debile, quod saepe occurrit, impedimentum; quippe

Corpus materiale propensionem habet tendentiae ad mundi centrum.

Tendentia mobilis ad centrum, cum suo effectu, nullo pacto remitti potest ex quovis contrario motu, aut quiete.

Mobile quandoque simul movetur, et gravat.

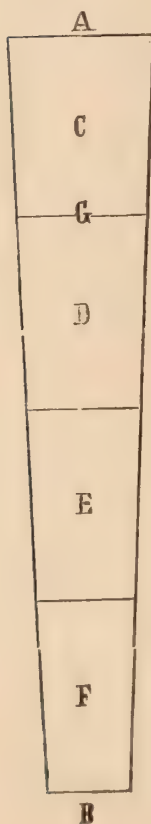
Adventitii effectus in mobili sunt natura extinguibiles ab agente contrario

tunc mobile pro parte gravat, et pro parte movetur. Secus vero sentiendum est de adventitie receptis motionis, et gravitatis effectibus, hi nanque a contrariis agentibus tum in partem, tum in totum extinguuntur, et facta extinctione, nulla de eis in mobili residua formatio remanet. Quocirca videtur mobile se habere tanquam baiulum qui farcinam pluries recipit, ac deponit, molem vero proprij corporis neutiquam.

Velocitas motus habetur per concurrentem temporis et spatij mensuram.

9. — Sexto, et ultimo considerandum. Maiorem motus velocitatem esse, ac discerni in mobili, quando ipsum mobile percurrit aequale spatium minori tempore, seu maius spatium, aequali tempore. Illud quoque exploratissimum est; motum augeri posse in infinitum, si adsit virtus motiva, adeo ut per mobile non stet (iuxta tertiam considerationem) quin aliquod designatum spatium posset semper in minori, et minori tempore percurrere. Tempus nempe est divisibile in infinitum, sicut quaelibet alia continua quantitas.

10. — His consideratis, ac positis, demonstrabo maiorem velocitatem debere esse corpori mobili in fine, quam in principio, aut in medio sui motus naturalis. Iamque nullam habebo rationem de medio, quod suppono plenum corpore uniformiter fluido, et quod se aptum praebeat uniformiter dividi a cadente mobili: quaecumque enim ex medio occurrunt, cum sint extrinseca, et solum per accidens aut iuvent, aut retardent, sunt in demonstratione negligenda.

11. — Sit spatium, A, B, percurrendum a mobili motu naturali; ipsumque spatium dividatur in partes aequales, C, D, E, F, dimittaturque mobile a loco A. Certe deorsum ex naturali propensione primo ferri debet per partem spatij C. In primo autem cursu dicamus velocitatis gradum ipsius mobilis debere esse ut unum, et sic in ipsa parte spatj C, non minutius dividentes, dicamus mobile possedisse gradum velocitatis ut unum. Iam vero, si in puncto G, fingamus mobile spoliari tantum, ac praecise sua propensione tendentiae ad mundi centrum, utique non propterea (secundum id, quod quarto loco consideratum est) motum, formationemque motus semel acquisitam, nullo occurrente impedimento, dimittet, sed perpetuo servabit, perindeque se habebit, ac si nunquam eam propensionem naturalem habuisset, verum ab alio quopiam semel impellente, et cessante, per id spatij, cum eadem velocitate, et eo versus dimotus fuisset. At re vera mobile non spoliatur propensione naturali, sicut in demonstrationis gratiam spoliari contingendum dixi: igitur per spatium, D, ingenita quoque propensione, iugi quasi stimulo agitabitur: nam, praeter adventitiam motus formationem, semel acquisitam, viget interna illa naturalis propensio, quae (secundum quintam considerationem) assidue stimulat, ac quasi manu impellit. Qua propter, quoniam illa stimulatio, vendicat sibi effectum, quemadmodum nova addita candela causat lumen intensius in illuminato cubiculo (quippe in mobili adest capacitas receptandi quantumvis maiorem formationem motus, iuxta tertiam considerationem) iccirco ipsum mobile motu formatum, ac naturali stimulo agitatum, percurret partem spacij D, minori tempore, quam, si ex sola tunc acquisita formatione percurrisset, atque ideo absolvet cum maiori velocitatis gradu (iuxtam sextam

considerationem) partem spatij, D, quam absolverat partem spacii, C. Qui velocitatis gradus dicatur esse, ut duo. Itaque, non impeditum, debet velocitatem, ut duo, servare per spatium, E, et deinceps perpetuo (iuxta considerationem quartano) etiam si in fine spatij, D, mobile spoliaretur propensione sua naturali: sed quia re vera non spoliatur, sequitur, per eandem rationem, quod corpus, naturali etiam propensione agitatum, minori tempore percurret partem spatij. E quam percurrerat partem spatij, D. Parique ratione, minori tempore partem spatij, F. Et sic deinceps, et deinceps in infinitum, minori, et minori tempore; atque ideo (iuxta sextam considerationem) velocius, et velocius. Quod erat Demonstrandum.

12. — Ex demonstratione conspicua via aperitur ad tractationem de proiectis, et de bellicorum tormentorum ratione valde conferentia corollaria a priore ducuntur: similiterque, de alitibus in volatu confodiendis, et de pluribus aliis ad localem motum pertinentibus. Lectorque, bene demonstratione instructus, examinet; an necessarium sit ad caelestium orbium motionem intelligentias perpetuo insistere; dum nullum orbibus impedimentum occurrat, nullaeque ab eis sint reactiones superandae; sicuti cum iugi remigio superandae sunt ab actuaria navi: simulque recogitet dato quod intelligentiae tali operi insisterent, an id ipsis etiam orbibus eveniret, quod de motu deorsum naturali demonstratum est. Mihi autem sufficit in studiosorum gratiam, ac stimulum, sic breviter ratiocinatum fuisse.

Facta demonstratio viam aperit ad plura valde utilia quae sunt ad motum localem pertinentia.

FINIS

Patavii, Typis Pauli Frambotti MDCXXXV.

SUPERIORUM PERMISSU.

finita di stampare il dì 8 Luglio 1912

ERRATA-CORRIGE

a pag. 18, linea 23, invece di « chiara coscienza » leggasi « più o meno chiara coscienza »
a pag. 19, linea 10, invece di « quantunque non dimostrata da nessuna esperienza tuttavia può ecc. » leggasi « se pure non fosse dimostrata da nessuna esperienza tuttavia potrebbe ecc. »

Vol. XV, Serie 2.ª **N.° 11.**

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

RICERCHE SULLA CERCARIA SETIFERA DI JOH. MÜLLER

MEMORIA

del socio ordinario Fr. Sav. MONTICELLI

presentata nell' adunanza del dì 6 Luglio 1912.

Sommario

INTRODUZIONE

Nel 1888 ho riassunto in una nota preliminare le osservazioni fatte, durante alcuni anni di permanenza nella Stazione Zoologica di Napoli, su di una Cercaria marina del nostro golfo che ora si incontra liberamente nuotante, ora, e più di frequente, si trova annidata in tutti, indistintamente, gli animali pelagici. In questa Cercaria riconobbi quella forma comunemente nota sotto il nome di *C. setifera* descritta da Joh. Müller nel 1850; e, fissatane la sinonimia con la *Macrurochaeta acalepharum* del golfo di Napoli, descritta da A. Costa nel 1864, nonchè con altre Cercarie marine che potetti identificare con la forma del Müller (1, p. 194), illustrai, per quanto sommariamente, questa Cercaria nei principali tratti della sua organizzazione così da darne migliore e più completa conoscenza (p. 196). Tentai, inoltre, di ricostituire, per induzioni, il ciclo biologico di detta *C. setifera*, che non mi era riuscito di seguire sperimentalmente. Fondandomi da una parte sopra una certa somiglianza che la *C. setifera* presentava con alcuni distomi raccolti dal Prof. Paolo Mayer sulle *Beroë* del Golfo di Napoli, per quel tanto che dell'organizzazione di questo distoma potetti allora desumere dagli esemplari in alcool favoritomi dal Prof. Mayer, e dall'altra parte sulle grandi rassomiglianze che il distoma in parola presentava col *Distomum contortum* Rud. dell'*Orthagoriscus mola,* misi innanzi l'ipotesi che il Distoma

delle Beroe fosse una *Cercaria setifera*, più avanzata nello sviluppo (essendo questo distomide già provvisto degli organi genitali, per quanto non del tutto a termine; e quindi, per conseguenza, che la *C. setifera*, potesse riguardarsi come la forma giovane del *D. contortum* Rud. Secondo questa mia induzione il ciclo sarebbe stato ricostruito completamente, avendo potuto, per la identificazione della *Cercaria echinocerca* del De Filippi con la *C. setifera* Joh. Müller, «concludere che quest'ultima proviene da una Redia che vive nei molluschi (Gasteropodi) marini, e dopo aver vagato liberamente per un certo tempo penetra negli animali pelagici...» (1, p. 197).

Della *C. setifera* ho dato pure notizie anatomiche e biologiche nei corrispondenti capitoli del «Saggio di una Morfologia dei Trematodi» (2, p. 77-80) pubblicato nello stesso anno 1888.

Nel dare alle stampe la sopra citata nota preliminare riassuntiva mi auguravo di poterla presto far seguire da un lavoro completo sulla *Cercaria setifera*, che, purtroppo, per una serie di contingenze varie e diverse non vede la luce che solamente molto tempo dopo. Nel frattempo, pertanto, avendo avuto opportunità di esaminare largo materiale del Distoma delle Beroe innanzi ricordato, da me raccolto nel 1891 nella *Beroë ovata* D. Ch. del Golfo di Napoli, lo studio a fresco e sul vivo, confortato da quello condotto su preparati in toto e sopra serie di sezioni, mi fecero certo « che la mia induzione del 1888 era erronea; perchè la *Cercaria setifera* ha, difatti, nulla di comune col Distoma delle Beroe », che, invece, « appartiene al ciclo biologico di altro Distoma che spero di essere in via di rintracciare» (3, p. 1, nota e p. 125, nota); speranza purtroppo rimasta delusa. Ma se la suddetta ipotesi cadeva, mi era possibile, per contro, di meglio identificare la *Cercaria echinocerca* De Filippi con la *C. setifera* e confermare, anche con osservazioni personali, l'origine della *C. setifera* da Redie e seguirne lo sviluppo dalla loro origine da queste. Avendo, difatti, rinvenuta una Cercaria in un *Conus mediterraneus* corrispondente a quella con questo nome indicata dal De Filippi *(C. coni-mediterranei)*, della quale egli ha trovato una sola volta delle Redie che non contenevano ancora Cercarie, potetti stabilire che le due Cercarie del De Filippi *(C. echinocerca* e *C. coni-mediterranei)*, sono la stessa cosa; e, quindi, dallo studio diretto della *C. echinocerca* del De Filippi confermare in modo definitivo la identità di questa forma con la *C. setifera*: studio che mi permise, per conseguenza, di seguire l'origine prima della *C. setifera*, la cui Redia, come avevo dedotto fin dal 1888, alberga, difatti, in Gasteropodi marini [*Conus mediterraneus, Buccinum Linnaei*, e forse anche altri] (3, p. 1-2, nota 1). Queste osservazioni sulla *Cercaria setifera* e diverse altre Cercarie mi avevano fatto abbandonare il pensiero di pubblicare l'annunziato lavoro completo sulla *Cercaria setifera* e mi avevano messo invece nell'animo quello di raccoglierle tutte insieme in un'altra serie dei miei « Studii su Trematodi endoparassiti » dedicato alla illustrazione comparativa delle Cercarie marine e loro sviluppamento (2, p. 2, nota); che purtroppo neppure mi è riuscito finora di concretare per non aver potuto, per ragioni indipendenti dalla mia volontà, continuare la pubblicazione della serie dei detti studii sui distomidi, che giacciono tuttora inediti. Cosicchè, dalle ricerche sulle altre Cercarie stralciando quelle sulla *Cercaria setifera*, pubblico ora queste solamente, sciogliendo il vecchio impegno; tantoppiù che altre saltuarie osservazioni, che mi è capitato di fare nel frattempo sulla detta *Cercaria setifera*, mi permettono di meglio integrarne lo studio e darne una, per quanto possibile, particolare illustrazione.

Difatti, se da un lato la sinonimia della *C. setifera* si è accresciuta, per ulteriori indagini di altre forme a questa da riferirsi, alcune delle quali già ricordate altrove (**2**, p. **1** e p. **124**, nota), dall'altro mi è occorso, per nuovo materiale raccolto, di poter, in seguito, constatare anche nella *C. setifera* la presenza di organi genitali, per quanto in istato più o meno iniziale di sviluppo: fatto che, affermato dal Leuckart per le Cercarie in genere, ho già detto, in altra occasione (**3**, p. **123-24**, nota **2**) di poter confermare per personali ricerche sulle medesime.

Mi spingono ancora a non tenere più oltre inedite queste da anni iniziate e condotte, e più volte riprese ricerche sulla *Cercaria setifera* oltrecchè le suesposte considerazioni, anche quella di non lasciar infruttuoso il materiale raccolto, al quale l'ingiuria del tempo, purtroppo, di già attenta; e perchè lo studio da me seguito nei limiti di quello che esso porta di contributo di fatti, possa essere utilizzato dagli studiosi di Cercarie marine.

1. Aspetto esterno.

I diversi aspetti che assume il corpo della *Cercaria setifera*, secondo le differenti condizioni di distensione o contrazione, sono rappresentati nelle fig. **1-4** ritratte dal vivo, con la lente, a piccolo ingrandimento, da animali esaminati su fondo nero a luce diretta. Nella fig. **1** è rappresentato un individuo fornito della caratteristica coda che distingue questa forma, provvista per tutta la sua lunghezza di ciuffi di setoliformi appendici laterali. Come il corpo, anche la coda di quest'individuo è in piena distensione, e ben permette così di rilevare il rapporto di lunghezza della coda rispetto al corpo, del quale essa è all'incirca due volte e mezzo più lunga. In tutte e tre le figure si constata la trasparenza del corpo della Cercaria, che è di colorito biancastro tendente al gialletto pallidissimo per diffusione del colore di due macchie o chiazze giallastro-bruniccie che si trovano ai due lati della parte anteriore del corpo, occupandola tutta, e si estendono dalla ventosa posteriore alla estremità anteriore: queste chiazze appaiono più o meno distinte l'una dall'altra (fig. **1**) o fuse insieme (fig. **2** e **4**), e più o meno estese e diffuse nel colorito, o raccolte e raddensate, e quindi più intense di tono di colore (fig. cit.), secondo lo stato di distensione o contrazione maggiore o minore del corpo. I due estremi, di grande contrazione e di massima distensione, sono rappresentati dalle fig. **4** e **3**: nel primo caso il corpo si appiattisce sempre maggiormente, nel secondo tende ad assumere con maggiore o minore accentuazione la forma subterete. La grandissima sua mobilità fa perciò variare moltissimo nei limiti dall'appiattito fogliforme ad allungato e terete, l'aspetto del corpo della *Cercaria setifera*. In tutte le sopra descritte figure si notano lungo la linea mediana dei globuletti, che spiccano in opaco nella trasparenza del corpo, ora messi in fila e più o meno addossati l'uno all'altro o fra loro distanti (fig. **1**, **2**, **3**), oppure raccolti irregolarmente in massa secondo che il corpo trovasi in distensione od è contratto (fig. **4**).

Esaminando poi la *Cercaria setifera*, sempre a fresco e dal vivo, ma col microscopio a discreto ingrandimento e per luce riflessa, essa presenta l'aspetto raffigurato nella fig. **6**, ritratta da un individuo senza coda ed in normale distensione, e nella fig. **7** ricavata da un individuo in quello stadio che potremmo, per analogia, dire di

normale contrazione, fornito di coda anch'essa contratta normalmente. Osservando, difatti, molti individui di *Cercaria setifera* si può, seguendone i movimenti, colpire il momento che, nel continuo contrarsi o distendersi del corpo, evvi come uno stadio di riposo o di tregua, se posso così esprimermi, nel quale la forma del corpo si delinea costantemente la stessa, ora più, ora meno raccolta secondo che il corpo è moderatamente disteso o contratto, come si può constatare dalle fig. 6-7, che rivelano appunto queste due condizioni di essere del corpo che ho innanzi indicate per normale distensione e normale contrazione. Dalle due fig. 6-7 si può, perciò, ricavare la forma generale del corpo della *Cercaria setifera* che, appiattito o subappiattito, si mostra all'ingrosso a forma di lancia, la punta subacuta della quale è rappresentata dalla parte posteriore del corpo, mentre per così dire la parte basale, o manico, corrisponde all'estremo anteriore: figura di lancia breve e tozza (fig. 7), o lunga e ristretta (fig. 6), secondo che il corpo è in normale distensione o contrazione. In breve, per riassumere, la *C. setifera* si mostra ristretta anteriormente, slargata nel mezzo e di nuovo ristretta posteriormente da oltre la ventosa posteriore all'estremità terminale del corpo.

Il colorito che a luce riflessa sotto il campo del microscopio presenta la Cercaria in esame è riprodotto nelle citate fig. 6-7; nelle quali sono rappresentate fedelmente come esse si mostrano le macchie pigmentarie giallo-brunastre anteriori innanzi ricordate, il loro aspetto, la costituzione loro ed il modo di comportarsi nei due stati di essere del corpo raffigurati nelle dette immagini (fig. 6-7): in queste si constata una diffusione di color gialletto verdognolo che dall'area delle chiazze pigmentarie si estende per la regione anteriore e media del corpo.

Lungo la linea mediana, nelle dette figure 6-7, si riconosce per trasparenza un sacco allungato che, con decorso ondulato, si estende dallo estremo posteriore del corpo molto oltre in avanti, sorpassando il livello della ventosa posteriore; esso contiene delle grosse sferule rifrangenti colorate in verde scuro, che sono appunto i globuletti opachi dei quali ho innanzi fatto cenno. Anche per trasparenza, lungo i lati del corpo, e particolarmente disegnati nella fig. 7, si intravvedono i due canaletti maggiori del sistema escretore, tortuosi nel decorso, e descriventi ondulazioni. Oltredicchè, a traverso le pareti del corpo, si delineano anche le altre parti della interna organizzazione, che sono poi meglio visibili nei preparati in toto della Cercaria in esame osservati con maggiore ingrandimento: ciò che dimostra la fig. 15.

La superficie del corpo della Cercaria si presenta finamente e nettamente striata per traverso e le striature mettono capo, sui margini, a piccole punte sporgenti: sono, difatti, per l'appunto le serie trasversali di questi aculeetti che impersonano le strie innanzi dette. Queste, più fitte fra loro ed appariscenti, per sviluppo degli aculei, nella parte anteriore e media del corpo, vanno poi distanziandosi alquanto fra loro e si fanno meno evidenti, per riduzione degli aculei, verso l'estremità posteriore del corpo (fig. 17 e 51). La fig. 10 mostra un pezzetto marginale della superficie della regione anteriore del corpo, dove più fitte sono le strie e più grossi gli aculei, vista di fronte: in essa risalta l'aspetto e la forma d'insieme degli aculei suddetti dalla base larga, circolare, che si risolve in un cono puntuto: ciò che è dimostrato poi anche meglio dalla fig. 9, che integra e completa la citata figura 10, mostrando gli aculei quali essi si rivelano se si esamina il margine del corpo, alquanto schiacciato per com-

pressione, a più forte ingrandimento. Dove gli aculeii raggiungono maggiore e massimo sviluppo è verso l'estremo anteriore del corpo ed in particolare sulla ventosa anteriore ed intorno alla bocca (fig. 8).

La ventosa anteriore, quasi del tutto terminale, è molto caratteristica per la forma ad imbuto che presenta (fig. 15, 33, 34). Poco proeminente all'esterno intorno alla bocca, essendo essa di frequente invaginata per contrazione dell'estremo anteriore del corpo (fig. 8, 31, 62), quando protrude allo esterno, quasi per rimboccatura contro, sopra ed intorno la superficie dell'estremità terminale anteriore del corpo, essa assume la figura di un cercine più o meno grosso e sporgente (fig. 33, 34); che si risolve nella forma di una vera ciambella quando manifesta il consueto aspetto delle ventose anteriori; cioè, per meglio esprimermi, quando essa è interamente svaginata (fig. 6, 7, 15). La ventosa posteriore bene appariscente e di mediocre grandezza, sporge dalla superficie del corpo poco oltre la metà della lunghezza di questo, nel modo come, meglio di una più particolare descrizione, mostrano le fig. 1, 6, 7, 15, 31, 33, 47, 62, 93.

La coda non si attacca proprio all'estremo posteriore del corpo, nè fa continuità con questo: essa appare come una parte appendicolare, propagine e dipendenza del corpo della Cercaria, dal quale fuoresce dorsalmente, come pare, restringendosi a pedicello breve alla sua origine per presto allargasi e prendere le normali proporzioni di larghezza della coda. Ciò è messo chiaramente in evidenza dalla fig. 51 confortata e completata dalla fig. 17, chè mostrano entrambe il modo di attacco, o di sporgere, della coda dal corpo della Cercaria: essa nasce da questo subterminalmente lasciando perciò libero l'estremo terminale del corpo (fig. 17). L'aspetto della coda, come si presenta all'osservazione col microscopio a luce diretta, può facilmente desumersi dalle fig. 1 e 7: larga nella sua porzione iniziale, si va gradatamente restringendo verso l'estremo dove termina a larga punta. Per tutta la sua lunghezza essa presenta una finissima striatura trasversa ectodermica (fig. 7, 16, 17) e nei margini una zona scura periferica fatta di granelli scuri: per trasparenza mostra come un asse centrale di color gialletto molto pallido fatto, all'apparenza, di una granellatura o macchiettatura più scura del fondo (fig. 7). Come facevo notare fin dal 1888, da alcuni osservatori è stata descritta un anellatura nella coda della *Cercaria setifera* che, in realtà, non si constata normalmente: difatti nello stato di distensione della coda tale anellatura non si riconosce affatto, ed in quello di normale contrazione neppur si manifesta; non osservandosi altro, in tal caso, che delle leggere infossature in corrispondenza delle inserzioni dei ciuffi di appendici (setole) che determinano delle piccole gobbe nello spazio intercedente; ma queste si accentuano in corrispondenza e per conseguenza delle più forti infossature suddette che si determinano per il forte contrarsi e raccorciarsi della coda, la quale piglia allora l'aspetto anellato descritto dagli autori surriferiti. Il che non è, quindi, un fatto normale, ma derivato dalle contrazioni della coda, che, negli individui esaminati dai detti A., era rattrapita per forte accorciamento da contrazione.

Lungo i due lati della coda si osservano quei gruppi d'appendici disposte a coppie ed in tante paia quante ne capono, ad uguale distanza fra loro, nella lunghezza della coda, che comunemente s'indicano come setole, perchè ricordano molto

nell'insieme all'aspetto le setole degli anellidi: il numero delle coppie di fasci di queste appendici varia perciò col variar di lunghezza della coda (fig. 7, 11, 12, 16, 51, 60). I fascetti o ciuffi di setole sono formati da quattro, d'ordinario, ma talvolta di cinque o sei, al massimo, di queste formazioni ectodermiche (setole Auct.) rigide, di aspetto cuticuloide che sono riunite alla base convergendo in un tratto unico, del quale, forse più propriamente, invertendo i termini, sembrano delle lacinie che da esso si sfiocchino. Come che sia, il pezzo, o porzione basale, forma come un manico corto e largo, appiattito, concavo-convesso, inserito, o, forse meglio si direbbe, sporgente trasversalmente lungo il margine della coda ed obliquamente dal ventre al dorso, da avanti in dietro: cosicchè ciascun gruppo di queste appendici (setole) può rassomigliarsi, alla grossa, ad un ventaglio con le stecche aperte ed attaccato per la base; od anche, secondo qualche Autore, ai raggi di una pinna natatoria.

Claparède, difatti, colpito dalla descritta caratteristica disposizione, credette che queste appendici (setole) fossero dei raggi destinati a sostenere una membrana fra esse intercedente come nelle pinne: membrana della quale pel primo il Bütschli (p. 400 nota, tav. 25, fig. 16 *a-c*) smentì l'esistenza; ciò che fu da me confermato, in base a personali ricerche, nei miei precedenti scritti su questa Cercaria (1-2). Il modo di comportarsi di questi ciuffi di setole (Auct.) può ben desumersi, oltrecchè dalle fig. 1, 7, 17, anche, e più particolarmente, dalle fig. 11 e 16. Staccando o tagliando le setole dalla loro base, queste, isolate, si mostrano leggermente ristrette nella loro porzione inferiore e media; si allargano poi a clava presso l'estremità e finiscono a punta più o meno acuta e talvolta subacuta (fig. 12), ricordando così per la loro forma in genere il comportarsi della parte terminale delle setole degli anellidi, alle quali queste formazioni della *Cercaria setifera*, e di altre che ne sono ugualmente fornite (*Cercaria Villoti* ecc.), come ho detto, sono state perciò, appunto rassomigliate.

A completare la descrizione generale della *Cercaria setifera* torna opportuno l'esame di un preparato in toto, previa colorazione, di un individuo fissato rapidamente in modo da fermar la forma del corpo della *Cercaria setifera* che nella sua linea generale, è conforme *post mortem*, a quella innanzi riconosciuta in vita: del che fa fede il confronto fra le fig. 6 e 7 e la fig. 15. In quest'ultima, ricavata da un esame a più forte ingrandimento dell'animale fissato, come ho già detto, si delineano le caratteristiche differenziali anatomiche che impersonano questa *Cercaria* nei suoi attributi specifici.

Nella detta figura, difatti, appare manifesta quella che diremo armatura cutanea innanzi descritta dal vivo; si delineano nella loro forma e rapporti di dimensione ed inserzione, le due ventose, l'anteriore (boccale) e la posteriore (ventrale); e si disegnano le aree delle due chiazze o macchie pigmentarie laterali: fra le quali si nascondono dorsalmente, nella loro parte anteriore, in corrispondenza del livello del faringe e prefaringe, due piccoli organi visivi, dei quali sarà data a suo luogo descrizione. L'apparato digerente si rivela fatto di un prefaringe, cui segue un faringe, dal quale si origina brevissimo esofago, che presto si divide in due brevi braccia intestinali. Risalta nel mezzo del corpo la vescicola del sistema escretore, i cui grossi tronchi, come è detto innanzi si riconoscono per trasparenza, ripiena delle sferule già ricordate; vescicola che termina nel forame codale. Questo nella Cercaria

in esame non sbocca direttamente all'esterno nella estremità del corpo, ma in fondo ad una infossatura od invaginamento di essa, a forma di largo imbuto, come ben lo si riconosce nella figura 16, e che, per comodo di descrizione, distinguo col nome di infossamento ectodermico.

La *Cercaria setifera* misura, dal vivo, nel corpo: in lunghezza normalmente da 0.50 a 0.83 millimetri in distenzione e da 0.35-0.58 mill. in contrazione: in larghezza da 0.25-0.33 mill. in distenzione ed in contrazione all'incirca 0.20 mill. La coda può raggiungere normalmente la lunghezza di circa un millimetro o poco più; in contrazione si riduce a 0.55-0.70 mill. La totale lunghezza del corpo e della coda può calcolarsi in media di mill. 1.80-1.90. Queste misure, data la grande mobilità del corpo, rappresentano, s'intende, sempre la media approssimativa ricavata da una serie di misure.

Gli esemplari conservati in alcool misurano in media: nel corpo da 0.58-0.66 mill. in lunghezza per 0.21-22 mill. in larghezza; nella coda 0.55-80 mill. di lunghezza.

2. Struttura anatomica ed istologica.

1. — *Rivestimento cutaneo, muscolatura, mesenchima.*

Rivestimento cutaneo. — L'ectoderma (cuticola Auct.) si presenta striato superficialmente (fig. 52): esso, di mediocre spessore, è limitato inferiormente dal parenchima da una distinta membrana basale che può intravvedersi anche sul vivo (fig. 9), e si presenta più intensamente colorata nelle sezioni (fig. 48, 49). L'aspetto ed il comportamento dell'ectoderma, oltrecchè dalle citate figure, si rileva anche dalle fig. 15, 31, 34, 55, 63 74, 84-93. A fresco e sul vivo l'ectoderma si mostra trasparente, a contorno esterno netto: meno trasparente, specialmente nella metà basale, appare nei preparati in toto ed assume un aspetto assai finamente granelloso (fig. 49), che si constata anche meglio nelle sezioni dove esso appare di più intensa colorazione. Gli aculei innanzi descritti, che rivestono il corpo, sono dei coni rigidi subpuntuti ad estremità subricurva e ad apice rotondato. Essi sono impiantati con la loro base sulla membrana basale e sporgono dall'ectoderma per poco meno di metà di loro lunghezza, come si scorge nettamente nella fig. 9, dove appaiono per trasparenza attraverso l'ectoderma: un poco più corti si rivelano nei preparati in toto dove pure si distinguono nella loro inserzione e nel loro comportamento attraverso l'ectoderma. Nelle sezioni essi non si mostrano così come lascerebbero supporre a primo esame le osservazioni a fresco e sui preparati in toto, nei quali solo la parte di detti aculei sporgente oltre l'ectoderma sembra essere più scura della restante parte immersa nell'ectoderma, o più forte colorata (fig. 49); ma si rivelano come dei coni pieni incuneati nell'ectoderma, che si tingono ugualmente in ispessore, coi coloranti, assai più fortemente del circostante ectoderma in mezzo al quale spuntano (fig. 48, 52): più intenso ancora è il colorito che essi assumono nella loro porzione basale dove si adagiano sulla membrana basale dell'ectoderma alla quale aderiscono (fig. 48).

L'ectoderma di rivestimento della coda appare anch'esso striato trasversalmente come è descritto innanzi (fig. 7): esso è alquanto meno alto di quello del corpo della

Cercaria (fig. 31, 55, 61) e non si riconoscono, nemmeno nelle sezioni, le piccole sporgenze coniformi come quelle innanzi descritte nell'ectoderma del corpo. Dall'ectoderma la coda si elevano, invece, da ciascuno dei due margini, a regolari distanze, delle eminenze che si allargano a palette concavo-convesse per formare la parte basale del ventaglio delle setole, innanzi descritte, che nel loro insieme costituiscono una derivazione fanerica dell'ectoderma esterno, dal quale, come tutto lascia desumere, sono prodotte.

Muscolatura. — Bene sviluppata è la muscolatura del corpo della Cercaria: il sacco muscolare cutaneo è rappresentato dai due sistemi di fibre che ordinariamente entrano a costituirlo, e cioè fibre longitudinali e circolari, che si scorgono anche per trasparenza lungo il margine del corpo nei preparati a fresco, e meglio ancora in quelli in toto (fig. 9, 49). I rapporti reciproci, la disposizione e lo spessore delle fibre muscolari sono messi in evidenza dalle sezioni, come si rileva dalla fig. 48. Molto sviluppata e robusta è la muscolatura dorso-ventrale, specialmente, come pare, nell'area centrale della larghezza del corpo; fra le fibre della quale se ne scorgono di quelle in via di sviluppo (fig. 62). La struttura intima delle dette fibre si appalesa costituita, come ho descritto ed è nota per altri Trematodi e nei Dactylodi, da una zona periferica contrattile intensamente colorabile, che forma la maggior parte dello spessore della fibra nel cui interno si osserva un'area che rimane quasi incolore (fig. 48, 62, v. pure fig. 54).

La muscolatura della coda richiede una particolare descrizione. La muscolatura longitudinale del corpo che si continua nella coda, passando attraverso la strozzatura che costituisce il punto d'attacco di questa, acquista un considerevole sviluppo, e decorre lungo tutta la lunghezza della coda con fibre fra loro distanziate, ma aggruppate, come appare, irregolarmente in fascetti più o meno numerosi. Le fig. 51 e 61 valgono a dare un'immagine del suddescritto comportamento della muscolatura longitudinale nel suo insieme: mentre nei particolari esse sono completate dalle fig. 56 e 60. Da queste più nettamente si constata, ciò che del resto si desume anche dalle figure 51, 59 e 61, che le fibre longitudinali della coda sono molto più forti di quelle del corpo e presentano una caratteristica struttura. Questa, meglio che una particolare descrizione, ben rende palese la serie dei diversi aspetti che di essa ho desunto dalla osservazione del modo come le fibre si presentano nelle sezioni della coda: in quanto, se in alcune la fine struttura appare esser quella innanzi ricordata delle fibre del corpo (fig. 58, in basso), nella massima parte di esse sembra, invece, che la zona contrattile periferica non omogeneamente colorabile, sia rappresentata da una serie di punti più intensamente colorati ed irregolarmente disposti alla periferia della fibra (fig. 55, 56, 57, 58 in alto, 60). Descrivo e disegno ciò che mi fu possibile di vedere a forte ingrandimento circa questa peculiare struttura delle fibre muscolari longitudinali della coda, che non mi è riuscito di più oltre particolarmente investigare.

Se la muscolatura longitudinale ha così notevole sviluppo, per contro, molto ridotta è quella circolare che non sempre riesce agevole di ben riconoscere: essa si può scorgere nella fig. 17 da un preparato in toto che la mette sufficientemente in evidenza.

Robusta è bene individuata è la muscolatura delle ventose, come si può desu-

mere dalle figure d'insieme e si scorge dalle sezioni (fig. 31, 62, 93); nelle quali si riconoscono i varii sistemi di fibre e lo sviluppo dalla muscolatura radiale fra i fasci di fibre della quale si vedono le note caratteristiche cellule descritte dagli autori [1]).

Mesenchima. — Esaminando a fresco un esemplare di giovane *Cercaria setifera* molto compresso, mi fu dato di riconoscere, con forte ingrandimento, nel punto del corpo che era sotto il campo del microscopio, nella loro integrità le cellule del mesenchima del corpo (parenchima Auct.) disgregate dallo schiacciamento, alcune delle quali, come si presentavano all'osservazione, ho disegnate nella fig. 53; mentre che, nelle sezioni, la forma ed aspetto delle medesime non riesce agevole di riconoscere (v. tutte le figure della Tav. 4 e 5, e le fig. 31, 46, 47, 48, 62). Anche del mesenchima della coda non si riconoscono le cellule nei loro contorni; ma nella massa del tessuto si scorgono numerose lacune, dalle quali si potrebbe desumere che le cellule sieno fortemente vacuolari. Pertanto, di tratto in tratto, e molto di rado, così che non è facile sempre di osservarne, si appalesano nel mezzo del mesenchima della coda alcune cellule substellate con grosso nucleo, dell'aspetto di quella disegnata nella fig. 59, così come si dimostrava nel preparato. Nel mezzo della coda, per la sua lunghezza, ed in alcuni preparati in *toto* molto evidente, si osserva la caratteristica struttura, che direi fibrillare, rappresentata nella fig. 19: nella mia nota preliminare, a pag. 196, riferendomi a quanto mi parve di analogo vi fosse con ciò che aveva osservato lo Schwarze in *Cercaria armata* ho infatti ritenuto che la parte mediana della coda, che ha un aspetto scuriccio e granelloso sia costituita da sostanza contrattile.

2. — *Apparato della digestione.*

Nel fondo della parte posteriore imbutiforme della ventosa anteriore si apre la bocca; essa immette in un tratto cilindraceo prefaringeo in continuazione con la ventosa dalla quale si origina: questo tratto si presenta più o meno allungato, secondo che la Cercaria è contratta od in distensione, e rappresenta e corrisponde al prefaringe ed alla tasca prefaringea che si osserva in alcuni distomi. Il tratto prefaringeo si continua nel faringe, che ha forma di bulbo ovoidale molto schiacciato ai due estremi: dal faringe nasce, mercè un breve esofago, il tubo digerente bifido, a figura di ferro di cavallo, le cui due braccia, nelle quali si continua l'arco iniziale dell'intestino, si prolungano posteriormente, fino quasi a raggiungere il bulbo terminale del sistema escretore (fig. 33). Esse sono relativamente di grosso calibro conforme a quello dell'arco, con largo lume interno e vanno diminuendo gradatamente di diametro nel loro decorso posteriore, per terminare a cul di sacco ristretto e subpuntuto, mentre il lume

[1]) Nel chiudere questo primo capitolo mi torna opportuno di ricordare, che, nell'usare la parola ectoderma esterno mi riferisco sempre alla interpretazione che credo, dai fatti obbiettivamente considerati, si possa e debba dare al rivestimento cutaneo dei Trematodi (e Cestodi): cioè di epitelio trasformato in un sincizio anucleato cuticuloide (**3**, 5-14 e p. 202). Ciò malgrado anche le più recenti argomentazioni in contrario che, per mio vedere, non soffragano la tesi della non omologia dell'ectoderma dei platelminti con quello degli altri vermi (v. ad es. il Pratt nella sua nota sulla cuticola e sottocuticula dei Trematodi e Cestodi).

interno si restringe corrispondentemente (fig. **31**, **33**, **46-47**, **67-70**, **79-81**). Nei preparati in toto di individui alquanto contratti, le braccia intestinali si presentano più brevi e di calibro pressocchè uguale per tutta la loro lunghezza (fig. **15**).

Nella mia citata nota preliminare (**1**, p. 196), avendo data una non troppo conforme interpretazione della ventosa anteriore, ho ritenuto che la parte imbutiforme di questa rappresentasse il faringe; considerando, perciò, come un bulbo esofageo interposto lungo il decorso dell'esofago, quello che in realtà, come risulta dalla descrizione precedente, è il vero faringe. La struttura del faringe nei sistemi di fibre radiali, longitudinali e circolari, esterni ed interni, che lo costituiscono, si può rilevare dalla fig. 50, che rappresenta una sezione ottica (alquanto schematizzata) del faringe, quale, diversamente focalizzando, mi è riuscito desumerla da un preparato a fresco molto compresso. Questa figura è integrata da quelle ricavate dalle sezioni (fig. **31**, **62**, **92**) e particolarmente dalle fig. **85-86**: nella prima delle quali ben si riconoscono le fibre circolari e longitudinali che circondano all'esterno il faringe e si addossano verso la parete che ne limita il lume; mentre, nella seconda (fig. **86**), fra le fibre radiali, che in entrambe le figure bene si riconoscono nelle loro inserzioni periferiche e nel loro decorso e comportamento, si scorgono grossi nuclei delle cellule che si trovano fra di esse nello stroma del faringe, come in quello delle ventose.

L'ectoderma sinciziale esterno, che ripiegandosi nel cavo della ventosa lo riveste, si continua a sua volta nel tratto prefaringeo e tapezza anche le pareti del lume del faringe (fig. **31**, **85**, **86**, **95**), dove si presenta abbastanza alto con distinta membrana basale (fig. **85**, **86**). L'aspetto ed il comportamento di questo sincizio si riconosce assai bene nella fig. **31**, specialmente nel tratto prefaringeo.

Nella fig. **45**, che rappresenta un tratto di un braccio intestinale come si presentava alla osservazione in una Cercaria esaminata a fresco sotto forte compressione, si riconosce la struttura istologica del tubo digerente, le cui cellule epiteliali viste di fronte, dalla base, si distinguono nei loro limiti e confini poligonali, come nei loro nuclei; mentre alla periferia del tubo intestinale si intravvede la tunica muscolare, particolarmente riconoscibile nei muscoli longitudinali (fig. **45**). L'osservazione a fresco è confortata da quella dei preparati in toto, i quali, se pur non lasciano più riconoscere i limiti cellulari, permettono di intuirli dalla disposizione dei nuclei conforme a quella che si vede nella fig. **45**; come ciò chiaro si manifesta nelle fig. **46-47**. Dalle sezioni si ricava che l'epitelio intestinale forma continuità col sincizio anucleato del rivestimento del faringe che passa direttamente nell'epitelio nucleato dell'intestino (fig. **31**). Questo non è molto alto (fig. **31**, **62**, **71**, **80**, **83**, **92-93**); ma le cellule che lo costituiscono sono relativamente grandi, poliedriche (fig. **62**, **88-89**, **92**), con grosso nucleo (fig. **54**), allogato nella porzione basale delle cellule, dove il protoplasma è più denso e granelloso (fig. **83**): la superficie cellulare limitante il lume intestinale è ordinariamente, come si dimostra, piana; ma in certi individui si presenta anche a limite non netto e come sfrangiata o smangiata, in ispecie lungo il tratto medio e posteriore delle braccia intestinali: ciò probabilmente è in relazione con le diverse condizioni di funzionalità nelle quali detto epitelio si trovava nel momento della fissazione della Cercaria (fig. **83**, **87-94**). Del modo come si presenta nelle sezioni l'epitelio intestinale danno immagine oltre le già citate, anche le fig. **67-71**, **75-82**, **87-93**; dall'esame comparativo delle quali si può rilevare come nell'epitelio intestinale, a misura

che si va verso il cul di sacco terminale delle braccia e nel fondo di queste, i limiti cellulari tendono a scomparire, per dar luogo ad un epitelio sinciziale nucleato, come si mostra nelle sezioni che passano pel fondo cieco delle braccia intestinali, giusta quanto è riprodotto, p. es., nelle fig. 69-71, 75-81 sopra citate.

La tunica muscolare esterna del tubo digerente innanzi detta è messa chiaramente in evidenza dalla fig. 54 ricavata da un tratto periferico della sezione di un braccio intestinale; nella quale oltre a riconoscere i sistemi delle fibre che la costituiscono, si constata anche la minuta struttura di queste.

3. — *Sistema escretore.*

Nella immagine d'insieme ritratta nella fig. 33, è rappresentato il sistema escretore della *Cercaria setifera* quale esso si appalesa, nelle sue linee generali, dalle preparazioni a fresco per schiacciamento, completata, nei particolari, da osservazioni singole e parziali fatte sopra molti e diversi altri preparati a fresco per compressione; da ciascuno dei quali fu desunto quanto intorno al sistema escretore, secondo che lo permetteva la riuscita del preparato, veniva meglio messo in evidenza. Caratteristica del sistema escretore della Cercaria in esame, che si afferma a prima giunta e si riconosce, come ho detto, anche a piccolo ingrandimento, è la grande vescicola terminale, che, spostata alquanto verso il dorso, occupa la parte mediana del corpo, e dall'estremo posteriore si estende anteriormente fino all'altezza del faringe (fig. 33). Questa vescicola è un sacco allungato che si termina anteriormente a fondo cieco largo e rotondato, e si restringe posteriormente ad imbuto tozzo e breve per immettersi in un peculiare organo terminale, che fin da ora propongo di distinguere col nome di bulbo terminale del sistema escretore, del quale dirò più oltre particolarmente (fig. 33, 41-43).

La vescicola terminale varia moltissimo di aspetto e figura secondo le contrazioni ed i movimenti del corpo: ora appare larga e raccorciata, ora ristretta ed allungata con calibro tubulare; ora più o meno ondulata (fig. 7, 15, 33), ora serpeggiante lungo la linea mediana del corpo (fig. 6). Nelle citate figure sono rappresentati alcuni degli aspetti che più comunemente assume, ma essa, naturalmente, come si può constatare a fresco e sul vivo, può deformarsi spostandosi in tanti e diversi modi nel mesenchima; ciò che maggiormente si constata nelle sezioni, per effetto della contrazione subìta dall'animale nell'atto della fissazione. Negli schizzi di A. Costa della *Macrurochaeta acalepharum* (= *C. setifera*), ho trovato appunto il disegno di un particolare aspetto (a rosario) assunto dalla detta vescicola per strozzamento avvenuto di tratto in tratto nella sua lunghezza; disegno che ho voluto, perchè assai caratteristico e peculiare, riprodurre nella fig. 44.

Nelle deformazioni della vescicola in parola fanno grande giuoco, come specialmente si può costatare nel caso del surriferito schizzo del Costa (fig. 44), le grosse sferule trasparenti di color verde che occupano l'interno della vescicola (fig. 6, 7, 15, 29, 33, 41, 42-44). Queste, sballozzolate dai movimenti dell'animale, si urtano a vicenda e si spingono reciprocamente fra di loro, e, l'una contro l'altra scivolando, battono contro le pareti della vescicola, mentre si muovono ritmicamente da dietro in avanti e viceversa; determinando così ernie, avvallamenti, costrizioni e dilata-

zioni, ondulazioni ed anse della vescicola, cui son dovuti gli aspetti più diversi da questa assunti. Le sferule in esame sono molto resistenti, e sotto forte pressione scoppiano in pezzi (d'ordinario cinque) nel modo rappresentato nella fig. 35. Come esse si presentano al taglio nelle sezioni di Cercaria si desume dalle fig. 69-70, 72, 77-82, 87-88, 93, nelle quali si vede che esse mostrano una parete esterna ed un raccolto nodulo centrale diffusamente colorato, di minor diametro del contorno esterno, dal quale è separato per un'area chiara od alone vuoto, e che contiene talvolta anche un qualche granulo più scuro: mentre il nodulo centrale ha contorno circolare (è sferoidale), la parete esterna ordinariamente si mostra deformata, o più o meno rattrappita, assumendo forme poliedriche irregolari.

La vescicola escretoria è rivestita da un tenuissimo epitetio sinciziale nucleato, come ben dimostrano le fig. 71, 72, 83; nelle quali, oltre i nuclei, si scorge l'esile straterello sinciziale di rivestimento che poggia sopra una sottile membranella basale che lo limita dal mesenchima. In una sezione mi è sembrato di potere riconoscere anche una tenue muscolatura longitudinale esterna della vescicola; ciò che si desume dalla fig. 83.

Richiamo alla mente, nella descrizione che segue, la fig. 33 per la disposizione e decorso dei grossi tronchi escretorii. Dal dorso della grande vescicola escretoria di cui innanzi è detto, verso la sua parte imbutiforme terminale, prima che essa metta capo nel bulbo terminale del sistema in esame, si diparte (o s'immette) un breve troncolino comune, di discreto calibro; dal quale presto si originano due tronchi disposti orizzontalmente, che potrebbero anche, inversamente, ritenersi, come costituenti un tronco unico trasversale dal mezzo del quale, infero-posteriormente, si diparte il già descritto breve tronco comune di sbocco nella vescicola escretoria (fig. 33-43). Quanto si osserva nelle preparazioni a fresco trova conferma nelle sezioni trasversali, in alcune delle quali mi è riuscito di colpire lo sbocco del tronco unico comune suddetto nella vescicola terminale, poco innanzi l'immettersi di questa nel sunnominato bulbo escretorio, nel modo come si vede disegnato nelle fig. 76-77.

I due tronchi orizzontali ora descritti, che rappresentano il tratto iniziale dei grossi canali escretori, ben presto, alla lor volta, si biforcano ciascuno in due altri dello stesso calibro: dei quali gli anteriori risalgono innanzi e costituiscono le braccia anteriori ascendenti dei grossi canali escretori laterali; mentre i posteriori, le braccia posteriori, si rivolgono verso dietro posteriormente e si risolvono in canali che non mi è riuscito di più oltre seguire in modo da ben completare il disegno (fig. 33-43); sembra pertanto che diminuendo di calibro questi si terminino direttamente in canalicoli ad imbuti cigliati. Le braccia anteriori raggiungono, con decorso ondulato e serpeggiante, l'altezza della ventosa anteriore e formano, ciascuno dal corrispondente lato del corpo, diminuendo di calibro, un'ansa che si rivolge posteriormente per continuarsi nel corrispondente tronco discendente dei canali anteriori di minore diametro dell'ascendente: questo tronco discendente va sempre ancora diminuendo di calibro a misura che tende a raggiungere la parte posteriore del corpo, dove finisce per ramificarsi in piccoli canalini terminali ad imbuti cigliati. Lungo tutto il decorso del braccio discendente, ora descritto, mettono capo troncolini minori che raccolgono i canalicoli ad imbuti cigliati delle varie parti del corpo dove essi si ramificano. Lungo i grossi tronchi anteriori ascendenti non di rado si osservano nel lume interno, ciò che ho

già ricordato nella nota preliminare del 1888, dei ciuffi, vibranti, come quelli che sono disegnati nelle fig. 38-39.

Come si presentano gli imbuti cigliati della *Cercaria setifera* si desume bene dalle fig. 36-37 ricavate da preparati a fresco, le quali dispensano, perciò, da particolare descrizione.

Nel decorso dei grossi canali escretori, esaminando a fresco, mi è occorso una volta di osservare, in uno di essi, come un' ernia laterale, che conteneva una piccola sferula simile a quelle della vescicola terminale innanzi descritte, ma più piccola e di colorito verdiccio assai sbiadito: dallo schizzo preso di questo reperto ho riprodotta la fig. 40.

Ho detto innanzi che la vescicola escretoria sbocca nel bulbo terminale: quest'organo assai caratteristico e peculiare di forma ovoidale, presenta, visto di fronte, la figura grossolana di una piccola botticella o di barilotto, perchè esso si mostra come fatto a spicchi, che ricordano all'aspetto le doghe di una botte, per la presenza di solcature meridiane convergenti ai poli dell'ovoide (fig. 42). Come esso si presenta nei preparati a fresco e visto di fronte — di sopra in sotto, o da sotto in sopra — chiaro appare dalle fig. 33, 41-43. Nella fig. 42 è ritratto l'aspetto del bulbo in questione visto da sopra in sotto che mostra al polo anteriore dell'ovoide, in mezzo al convergere dei solchi meridiani, lo sbocco della parte ristretta, imbutiforme, terminale della vescicola escretoria. Nella fig. 41, invece, si scorge l'estremo opposto dell'ovoide del bulbo escretorio col suo sbocco nel forame codale limitato da un cercine che ne circonda l'apertura circolare, che può dilatarsi e contrarsi, variando così il diametro dell'orifizio. La struttura di quest'organo si ricava ancora meglio nei suoi particolari dall'esame delle sezioni che ho rappresentate nelle fig. 63-69 e 75-76: nelle quali si vede che gli interspazii fra i solchi meridiani esterni (gli spicchi) corrispondono ad altrettante creste sporgenti nel lume interno del bulbo. Le pareti del bulbo sono costituite da un sincizio anucleato, cuticuloide che si continua attraverso il forame codale con quello esterno ectodermale del quale è rivestito l'infossamento posteriore del corpo (fig. 31, 33, 41, 43); mentre anteriormente passa e si continua nel rivestimento epiteliale della vescicola escretoria innanzi descritto (fig. 69, 77-78). Tutto intorno allo sbocco del bulbo terminale nel forame codale, che trovasi, come ho descritto nel fondo dell'infossamento ectodermico posteriore del corpo, si osserva una muscolatura radiale molto sviluppata, le cui fibre partono dall'orifizio escretore e seguendo la curva del detto infossamento, si continuano con la muscolatura del sacco somatico. Ciò chiaro si vede nelle preparazioni a fresco (fig. 41); mentre dalle sezioni vengono in luce maggiore le particolari disposizioni delle fibre muscolari che, riunite a fascetti nella loro inserzione intorno all'estremo terminale del bulbo nel forame codale, si sfioccano poco alla volta a ventaglio, a misura che le fibre muscolari si irraggiano contro le pareti dell'infossamento ectodermico, per sperdersi fra le fibre longitudinali del sacco muscolare cutaneo (fig. 64, 65, 73, 74).

4. — *Sistema nervoso.*

Ho già ricordato (1, p. 196), nelle sue linee generali, il sistema nervoso di questa Cercaria setifera: ora posso completare l'accenno allora dato con una particolare descrizione del suo modo di comportarsi, come sulla traccia delle osservazioni a fresco mi è riuscito di ricostruirlo da serie di sezioni; nelle quali la parte cerebrale del sistema nervoso si mostrava in modo differenziata da permettermi di rappresentarlo nello schema generale riassuntivo che si vede disegnato nella fig. 33. Basta, difatti, esaminare, per i rapporti topografici, le due sezioni di una serie, che ho rappresentate nelle fig. 84-85, per rendersi conto delle favorevoli condizioni di studio offerto dalle dette serie di sezioni; dalle quali si riconoscono ancora molto maggiori particolari che non sieno rappresentati nella fig. 33. In questa, pertanto, va osservato che, per la distensione dell'animale, il cervello si trova, nel disegno, alquanto spostato in avanti; mentre nelle sezioni, per la contrazione del corpo esso è, invece, più del normale spinto verso il faringe.

La commessura nervosa dei gangli anteriori non è larga, ma breve: essa si trova dorsalmente al prefaringe e si estende per un tratto in corrispondenza dell'inizio del faringe: i due gangli cerebrali sono relativamente grandetti, di figura approssimativamente piriforme disposti, per la base l'uno contro l'altro e, per questa, riuniti fra loro dalla descritta commessura dorsale. Essi, allogati dai due lati del faringe, si volgono verso il ventre per la loro parte ristretta e si ripiegano da sopra in sotto, da dietro in avanti per prolungarsi, gradatamente restringendosi, a formare il tratto comune iniziale dei nervi laterali ventrali (fig. 33-81). Tutto il cervello si presenta nelle sue linee generali come un ferro di cavallo che abbraccia obliquamente dal dorso al ventre e da sopra in sotto il prefaringe ed il faringe per continuarsi nel nervo principale laterale (ventrale) esterno (fig. 33, 84, 85, 92): questo grosso al suo inizio, presto si assottiglia e lo si può seguire per un certo tratto nel suo decorso ventrale nelle serie di sezioni. Da ciascuno dei due nervi principali ora descritti alla loro origine dalla parte ristretta del rispettivo ganglio, si diparte un altro nervo di minor calibro: il nervo ventrale laterale interno, che decorre, pel tratto che lo si può seguire, parallelamente quasi al nervo laterale esterno (fig. 33). Questa disposizione generale del sistema nervoso si uniforma a quella tipica fondamentale dei trematodi in genere, con le caratteristiche proprie che, nella serie di variazioni di maggiori o minori complicazioni del tipo comune, ciascuna specie presenta. Dalla parte anteriore del cervello, nella parte dei gangli più rigonfia, verso la commessura dorsale, si origina un primo nervo anteriore dorsale interno, che, isolandosi dalla massa ganglionare, si dirige in avanti verso la ventosa anteriore: un secondo nervo parte dal ganglio corrispondente alquanto esternamente al primo, dirigendosi obliquamente anch'esso innanzi, e rappresenta il nervo anteriore laterale esterno. Questi due nervi anteriori, nella loro origine e nel loro comportamento, sono schematizzati nella fig. 33 e si riconoscono nei loro reali rapporti coi rispettivi gangli nella fig. 84. In questa sezione (che la precedente e la seguente completano) si vede ancora come, oltre ai due nervi principali già descritti, lungo la superficie anteriore dei gangli ed esternamente ai primi, si dipartono altri piccoli nervini rivolti anch'essi innanzi: si nota,

inoltre, come da ciascun nervo anteriore interno si diramano esternamente dei nervini; mentre il detto nervo nel suo decorso in avanti ad un certo punto si biforca per dar origine a due piccoli nervi: si può infine anche scorgere che, verso la parte ristretta terminale di ciascun ganglio, dove esso si continua nel nervo ventrale principale, dalla superficie anteriore, parte un nervetto ricorrente che, curvandosi, risale in avanti (fig. 84).

Il cervello, come appare nelle sezioni, è circondato tutt'intorno dal pigmento giallastro descritto innanzi, che si trova ai due lati della parte anteriore del corpo, diffuso nel mesenchima, nella massa del quale sembra immerso: ciò è messo in evidenza dalle fig. 84, 85, 92; nelle quali si riconosce il comportarsi di detto pigmento fatto di piccoli granelli o di flocculi ora sparsi, ora aggruppati, ora raccolti insieme in masse o macchie a contorni irregolari (fig. 84, 85, 86, 92).

Ho accennato nella descrizione dell'aspetto esterno della Cercaria alla presenza di organi visivi in corrispondenza appunto delle dette macchie pigmentarie anteriori: questi in numero di due, uno per lato, sono rappresentati ciascuno da un corpo rifrangente (cristallino) situato dorsalmente, all'altezza del ganglio cerebrale del corrispondente lato del corpo. L'osservazione a fresco per compressione mi ha permesso di constatare che il corpo rifrangente, subsferico all'aspetto, è inglobato a metà in una capsula a coppa, calottiforme di pigmento bruno-scuro compatto e di tono di tinta molto più intenso delle macchie pigmentarie anteriori (fig. 14); le quali, talvolta, come in altro esemplare mi ha mostrato la osservazione a fresco per compressione, si raccolgono e si raddensano intorno ed ai lati del corpo rifrangente, che spicca netto, in chiaro, trasparente frammezzo le masse pigmentarie che lo circondano: ciò è messo in luce dalla fig. 13, riproduzione fedele di ciò che mi riuscì di constatare. Nelle sezioni si può meglio precisare la topografia del corpo rifrangente e del suo contorno pigmentato rispetto al cervello, al quale l'organo visivo sembra addossato e collegato per brevissimo e largo tratto peduncolare; ma nelle sezioni non si scorge la capsula pigmentaria così chiaramente come appare nel preparato in toto che è rappresentato nella fig. 14: per contro sulle sezioni si riconoscono nella parte di detto cristallino prossimale al cervello delle cellule nervose che lo investono da questo lato, costituendo, insieme raccolte, un piccolo ammasso cellulare nervoso che, come pare per la sua contiguità al corrispondente ganglio integrerebbe il tratto peduncolare di connessione dell'organo visivo col cervello che innanzi ho indicato. Questa struttura testè descritta dell'organo visivo trova riscontro ed una certa corrispondenza in quanto di recente (1910) ha osservato intorno agli occhi del *Polystomum integerrimum* l'André, che ha riassunta la letteratura dell'argomento degli occhi dei Platelminti.

5. — *Differenziazione sessuale.*

Nella maggior parte delle Cercarie che si raccolgono, ospiti di differenti animali pelagici che le albergano, non vi è traccia di organi genitali. Pertanto, non di rado, come ho innanzi ricordato, se ne rinvengono di quelle che presentano degli accenni di gonadi, che talvolta assumono uno sviluppo relativamente considerevole e mostrano una differenziazione sessuale già ben definita in testicoli ed ovario. In

questi esemplari si possono riconoscere più o meno distinti i condotti genitali rappresentati da cordoni cellulari pieni, ora più ora meno evidenti, che presentano soventi diverso grado di sviluppo l'uno dall'altro: questi cordoncini negl'individui molto innanzi nella differenziazione sessuale, cominciano anche a scavarsi di un canale (fig. 90).

Negl'individui nei quali tali cordoni sono ben delineati, s'intravvede lo sbocco esterno dei genitali, rappresentato dal punto dove i detti cordoni si terminano contro la parete del corpo, come si rileva da favorevoli preparati in toto (fig. 47); ma negli individui sezionati in serie non mi è riuscito, sui tagli, di riconoscere alcun infossamento corrispondente dell'ectoderma. Questo sbocco si trova verso sinistra della faccia ventrale, di poco innanzi la ventosa posteriore, come è dimostrato dalla fig. 47 (*apg*), nella quale, pertanto, va osservato che per errore del litografo il trattolino indicatore non raggiunge proprio il punto sopradescritto di attacco all'ectoderma dove si terminano i cordoni rudimentali dei condotti genitali: al che il lettore, in base alla descrizione, esaminando il disegno, può facilmente supplire.

Esaminando le fig. 46 e 47 si possono in esse facilmente riconoscere, visti di fronte e di sbieco, in due diversi individui che presentano appunto un considerevole sviluppo degli abbozzi dei genitali, il comportarsi di questi. Lungo i lati del corpo si delineano gli acini dei vitellogeni (*vtlg*) che si possono anche riconoscere nelle sezioni di altri individui in stadio corrispondente di sviluppo (fig. 62, 64-68, *vtlg*). Nel mezzo del corpo, fra le braccia intestinali, si scorgono i due testicoli, ed innanzi a questi l'ovario: tutte e tre le gonadi sono quasi equivalenti in grandezza (fig. 16, 47, *t*, *ov*): talvolta l'ovario sembra di poco maggiore. Nell'individuo rappresentato nella fig. 49 si vede dipartirsi dall'ovario il condotto genitale femminile, che risalendo in avanti va a terminarsi nel punto dello sbocco esterno dei genitali innanzi indicato. I cordoncini cellulari efferenti dei testicoli non si scorgono; ma di tratto in tratto possono riconoscersi evidenti le tracce del deferente come nel caso dell'individuo raffigurato nella fig. 46. Quanto rivelano le preparazioni in toto confermano e completano le serie di sezioni di individui con abbozzi di genitali meno o più differenziati che sieno (fig. 87-91, 94-95); ed in questi ultimi, naturalmente, meglio s'individualizza la differenza delle gonadi come dimostrano particolarmente le fig. 90, 94-95. In queste si può, difatti, vedere lo sviluppo raggiunto dall'abbozzo femminile integratosi in un vero ovario (fig. 94, 95, *ov*), nel quale ha cominciato anche ad iniziarsi la produzione delle uova: esso ha già assunto la sua tunica propria ed ha differenziato, all'origine dell'ovidotto dall'ovario (fig. 90, *ovd*), un ben distinto sfintere ovarico nei muscoli che lo costituiscono come chiaro si scorge nella fig. 94 (*sfo*). Nelle suddette figure è messo anche in evidenza in che modo si appalesano nelle sezioni le gonadi maschili anch'esse alquanto innanzi nel differenziamento istologico dei testicoli; mentre, in alcuni individui, il deferente appare nettamente distinto per essersi gia più o meno, e talvolta anche in maniera definitiva e concreta, individualizzato, nel cordone cellulare iniziale primitivo, il lume interno del deferente.

3. Biogenesi.

Come è detto nella introduzione, in altro mio studio, sui Distomi (**3**, p. 1, 2, nota), ho accennato di aver potuto seguire, nella Stazione Zoologica di Napoli, la biogenesi della *Cercaria setifera*, con la quale allora identificai le numerose Cercarie provenienti da Redie che infestavano il fegato di *Conus mediterraneus*: Redie che riferii, per tutte le caratteristiche loro, alla forma trovata dal De Filippi appunto nel detto Gasteropode (*Cercaria coni-mediterranei*), riconoscendo la corrispondenza delle Cercarie da me rinvenute in questa Redia — nella quale il De Filippi (**2**, p. 14, fig. 21) non trovò Cercarie perchè « malheureusement ne contenaint que des germes » —, con la *C. echinocerca* dello stesso De Filippi (del *Buccinum linnaei*); donde trassi la conclusione che le suddette due Cercarie del De Filippi fossero la stesa ed unica forma. Sul fatto di cui sopra richiamò la mia attenzione, nel corso del 1891, il Dott. P. Schiemenz, allora anch'esso nella Stazione Zoologica, per lo studio dei Gasteropodi marini del golfo di Napoli, che cortesemente mi offrì in esame il materiale che gli era capitato sotto mano. Occupato in altre ricerche per condurre a termine il primo contributo di osservazioni sui distomidi (**3**), presi non pochi appunti delle osservazioni fatte, ritrassi molti schizzi e figure ed approntai differenti preparazioni microscopiche conservando il resto del materiale in alcool per le ulteriori indagini; limitandomi, allora, per prender data, a riassumere solamente le mie osservazioni nella sopra ricordata nota a piè di pagina del citato studio sui Distomi.

Riprendendo dopo molti anni in esame il materiale raccolto, ho dovuto purtroppo constatare che molti dei preparati approntati nel 1891 erano sciupati, e la parte conservata in alcool non è più in favorevoli condizioni: ond'è che ho dovuto in gran parte rinunziare a quelle ulteriori e più particolari indagini sulla intima struttura delle Redie e delle Cercarie che in seguito mi proponevo condurre sul detto materiale per uno studio comparativo richiesto dalle recenti ricerche in proposito (v. p. e. Rossbach, Roewer). E non essendomi riuscito di procurarmi l'altro materiale fresco, devo, perciò, circoscrivere la esposizione dei fatti, per la maggior parte, alle osservazioni compiute nel 1891; che valgono, pertanto, per le figure che le accompagnano, ad integrare nelle sue linee generali, la morfogenesi della Cercaria in esame.

Dalle indagini fatte non mi riuscì di riconoscere che solamente Redie nel fegato dei *Conus mediterraneus* esaminati; ciò in conformità delle osservazioni del De Filippi (**2**, p. 14, fig. 21) che coincidono con le altre dello stesso autore per la *C. echinocerca* (**1**, p. 17, fig. 20) il che lascia ritenere una derivazione diretta delle Redie dal Miracidio. Di Redie ne ho osservate dalle piccolissime (giovani) ed in uno stadio primitivo di sviluppo, evidentemente da poco individuatesi, a quelle che potremo dire a termine; chè mostravano nell'interno le Cercarie, e queste così nello stato iniziale che in quello a termine e fornite di coda; pronte, perciò, a farsi libere: di tali Cercarie già fuoriuscite dalle Redie, se ne trovavano non poche frammiste alle Redie, evidentemente sul punto di abbandonare il Gasteropode per guadagnare il pelago.

Per non moltiplicare figure mi sono limitato a darne due solamente, fra quelle disegnate (fig. 23-24), che rappresentano l'insieme dell'aspetto esterno della Redia:

una molto giovane, ed un altra assai evoluta con dentro Cercarie in via di sviluppo. Da queste figure si ricava la forma caratteristica di tali Redie, a sacco allungato e terminante posteriormente ristretto a punta. Sacco a pareti di mutevolissimo contorno per le contrazioni e distensioni del corpo della Redia che fanno a questa assumere aspetti diversi. Il corpo di queste Redie più svelto, più allungato ed a punta terminale più ristretta nelle forme giovani (fig. 23), si sfianca, si rigonfia e si fa alquanto tozzo in quelle gestanti Cercarie (fig. 18). La superficie del corpo delle Redie si presenta forte striata trasversalmente come mostrano le figure 18-23: in esse si distingue bene l'ectoderma estern o come anche il sacco muscolare cutaneo bene sviluppato. La bocca, anteriore, terminale, mette capo in un faringe che è più appariscente, perchè molto grande rispetto alle dimensioni della Redia, in quelle giovani; meno grande nelle Redie a termine, dal corpo molto sviluppato (fig. 20, 23 e 18). Dal faringe, nel quale si continua la bocca, pende un sacco intestinale impari, a forma di pera allungata, come è raffigurato nelle fig. 18, 21, 23, che, ben distinto ed assai sviluppato nelle giovani Redie (fig. 18), si riduce di molto in quelle a termine (fig. 18, 21). La forma del sacco intestinale è mutevole nelle sue linee ed assume aspetto diverso secondo i movimenti del corpo della Redia: il collo della pera ora più, ora meno distinto dal resto del sacco intestinale, può considerarsi come il tratto esofageo. Nelle Redie giovani l' intestino trasparisce molto nettamente attraverso le pareti del corpo pel colorito scuriccio e l'aspetto granelloso dovuto, come pare, al contenuto: ciò che non si constata nel sacco intestinale delle Redie a termine, nelle quali esso è, perciò, meno appariscente. Osservando le fig. 19-23, scelte fra quelle che rappresentano alcuni degli aspetti caratteristici che assume il faringe nei movimenti di contrazione e distensione della Redie, si ricava come dalla forma ovoidale-globosa o sferoidale, che esso piglia quando il corpo si contrae, si va fino a quella allungata, subtubulare, nella sua grande distensione, rappresentata nella fig. 19. Più frequentemente il faringe assume la forma di coppa o calice, o ad imbuto molto slargato anteriormente: dalla bocca che, per questo allargarsi del faringe si fa ampia e beante, fuoriesce la parte anteriore di questo ripiegandosi a colletto contro le pareti esterne del corpo formando cercine, come una ciambella, intorno alla larga bocca, simulando così l'aspetto di ventosa che ne circondi l'orifizio (fig. 20, 23). La bocca si restringe, per contro, col contrarsi del faringe fino a ridursi ad un piccolo forame circolare, che quanto maggiore è il raccogliersi a palla del faringe, tanto diventa più piccolo (fig. 19, 21, 22): forame che può, nella massima contrazione del faringe, chiudersi affatto tirando seco in dentro la estremità anteriore del corpo che resta invaginata ad imbuto (fig. 18).

Seguendo lo sviluppo delle Cercarie nell'interno delle Redie nelle sue varie fasi, si possono colpire i diversi stadii attraverso i quali questa si va successivamente delineando a misura che si differenzia la figura della Cercaria dal primo ammasso cellulare che ne rappresenta l'inizio embrionale, con l'apparire, cioè, di una strozzatura all'incirca poco oltre la metà del corpo: costrizione che segna il limite fra la parte che si trasformerà gradualmente nella Cercaria e quella che diventerà, modificandosi successivamente, la coda. Nelle fig. 24-29 ho riassunto tutto lo sviluppo morfologico della Cercaria impersonato in un certo numero di stadii caratteristici, saltuariamente successivi, della intera serie, fino alla Cercaria quasi a termine; figure

che danno immagine delle principali fasi ontogenetiche che essa attraversa. Cosicchè la eloquenza delle figure mi dispensa da una particolare singola descrizione; tantoppiù che ciò corrisponde in genere a quanto ho già precedentemente descritto per altra Cercaria (*C. cymbuliae* Gräffe, 2, p. 81), e trova riscontro in analoghe osservazioni di altri autori antichi (p. e. La Valette St. George) e moderni (p. e. Pelsener). Dalle dette figure si rileva, difatti, il graduale individuarsi della coda da come essa dapprima si mostra nella fig. 24 — cioè già ben distinta dal corpo nello stadio successivo all'apparire della strozzatura che ne segna il differenziarsi iniziale — fino al momento in cui, col continuo allungarsi di essa (fig. 26-28), cominciano a comparire, lungo i lati, le prime paia di fasci di appendici laterali, le setole degli autori (fig. 29): questi, fasci dapprincipio radi si fanno più fitti fra loro per raggiungere poi, con il graduale successivo accrescimento della coda, il numero, le dimensioni, l'aspetto e figura che i fasci presentano, per l'insieme e la forma delle loro appendici, nella Cercarie a termine.

Esaminando in ordine progressivo numerico le suddette figure si può, d'altra parte, seguire il delinearsi della forma del corpo della Cercaria che si va gradatamente affermando: con l'aspetto cuticoloide che assume l'ectoderma esterno delimitante il corpo; con la comparsa della bocca e delle ventose (anteriore e posteriore) che dapprincipio appaiono come dei semplici bottoncini pieni sporgenti dalla superficie del corpo (fig. 26) ed acquistano in seguito la loro forma e struttura definitiva (fig. 28); infine con il manifestarsi di tutte le altre caratteristiche proprie per le quali si delinea la figura di Cercaria a termine con le macchie pigmentarie anteriori (fig. 29); mentre essa si va integrando nella interna organizzazione con il differenziarsi del tubo digerente, che appare già ben distinto nello stadio rappresentato dalla fig. 28, e dell'apparecchio escretore, la cui vescicola terminale assume l'aspetto che impersona subito la caratteristica vescicola della *C. setifera*, come si scorge nella fig. 29; che rappresenta appunto uno stadio più prossimo alle Cercarie a termine, cioè, pronte a farsi libere dall'ospitatore.

4. Etologia.

La *Cercaria setifera* quando non s'incontra liberamente nuotante nel plankton, il che, come ho detto innanzi, non è troppo frequente, si trova comunemente annidata nella massa del corpo di svariatissimi e diversi animali pelagici. Sarebbe, perciò, senza speciale importanza il redigere un elenco particolareggiato di tutti gli animali nei quali è stata finora constatata la presenza della *C. setifera*, sia da me personalmente (dal 1885 ad oggi), sia, prima, da altri (così per osservazioni dirette sulla detta Cercaria che sulle forme a questa identificate), come da coloro che, in seguito, hanno avuto agio di ritrovarla dopo la mia nota preliminare del 1888.

Celenterati [1]), Ctenofori [2]), Vermi [3]), Molluschi [4]) e Tunicati [5]) pelagici così

---

[1]) Idromeduse, Sifonofori, Scifozoi (Acalefi).

[2]) Tentacolati ed Euristomi.

[3]) Anellidi, Chetognati.

[4]) Gasteropodi (Eteropodi, Pteropodi, Nudibranchi) ed anche Cefalopodi pelagici (una volta l'ho rinvenuta sulla *Cirrotheuthis Verany* D'Orbigny (= *Doratopsis vermicularis* Jatta. Monografia dei Cefalopodi) forma rara nel nostro Golfo (v. Lo Bianco, 2, p. 645 e nota).

[5]) Salpe, Pirosomi.

adulti, che allo stato larvale, come pure le forme pelagiche larvali in genere [1]) che si pescano nel golfo di Napoli, ospitano questa Cercaria, che si può trovare anche nelle masse di uova pelagiche di Teleostei, come io stesso ho ricordato (**2**, p. 78) per aver trovate, nel 1885, delle *C. setifera* su di un gruppo di uova galleggianti probabilmente di *Scorpaena* sp. Che, anzi, in alcuni anni a periodi questa forma è così comune e frequente da infestare tutti gli animali pelagici del Golfo, tanto che il Lo Bianco (**1**, p. 480; **2**, p. 571) diceva «esservi talvolta epidemie» di Cercarie: mentre vi sono altri periodi di anni nei quali può, per contro, scarseggiare a segno di trovarne solo di rado degli esemplari, come ho già ricordato (**3**, p. **1**, nota **1**).

Caratteristica è la maniera di nuotare di questa Cercaria quando, emigrata dalle Redie generatrici, lascia il primo ospitatore, vagando liberamente nel plankton in cerca d'animali nei quali imbattersi: il che ho già altrove ricordato, per avere di proposito seguiti i movimenti di nuoto in alcune Cercarie caudate, messe in libertà in vaschette d'acqua (**2**, p. 79), a controllo di quanto avevo osservato su Cercarie liberamente nuotanti, pescate nel plankton.

Cogliendo un rapido istante di arresto nel nuoto si vede come la Cercaria cerca orientarsi verso una data direzione, che il corpo impone a sè stesso, contraendosi a forma di pera o di piccola palla, mentre la coda rapidamente dimenandosi con moto ondulatorio e vibratorio spinge innanzi la Cercaria. D'ordinario essa nuota parallelamente alla superficie dell'acqua: in questo caso la coda descrive delle semplici larghe e violente ondulazioni a ciascuna delle quali corrisponde un movimento delle appendici (setole) della coda che, per la loro medesima disposizione, aiutano il progredire della Cercaria, perchè sembra funzionino come piccoli remi automatici che accompagnano e secondano i movimenti della coda. Alle volte la Cercaria nuota, invece, in posizione verticale rispetto alla superficie dell'acqua, cioè col corpo in giù, che si contrae quasi a palla, e la coda in alto: questa allora descrive delle ondulazioni spirali assai strette, frequenti e veloci e turbina tanto rapidamente che l'animale pare giri vertiginosamente su stesso come una trottola e, così, ratto si sposta da un punto all'altro. Nel nuotare, il corpo della Cercaria, come si può osservare, resta passivo ai movimenti della coda: il corpo segna ed imprime solamente la direzione che l'animale vuol seguire spostandosi; ma le spinte gli vengono date dalla coda che, evidentemente, nel caso, è l'organo principale di nuoto: essa agisce come un propulsore che, vibrando a guisa di una frusta, imprime al corpo un movimento oscillatorio che si risolve nella linea retta che segue la Cercaria rapidamente filando nell'acqua. Il movimento nuotatorio, è nel caso, ancora intensificato dalla presenza delle appendici laterali della coda (setole) per i loro movimenti così attivi, che passivi.

La Cercaria quando incontra l'ospitatore pelagico, nel quale nuotando s'imbatte, vi penetra con l'estremità anteriore del corpo che, come una trivella, perfora la pelle dell'ospitatore facendosi strada fra i tessuti di questo.

La coda, come ho descritto (**2**), vien sempre perduta dalle Cercarie nell'atto di penetrare nell'ospitatore: ciò avviene per bruschi movimenti a tratti o strappi, quando

---

[1]) Come verbalmente mi informava il Dott. S. Lo Bianco (il compianto conservatore della Stazione zoologica di Napoli) per notizie desunte da suoi personali appunti.

la Cercaria, essendo già tutta penetrata nell'ospite, la coda ne resta fuori: talvolta, pertanto, le Cercarie la trasportano con sè e con essa si incapsulano. Infatti ho trovato nella massa gelatinosa del cappello di differenti meduse, Cercarie provviste ancora di coda; ed una volta, in un *Cestus veneris* Less. ho osservato delle Cercarie, e ne conservo i disegni, che nella capsula trasparente che si formano, se ne stavano con la coda in caratteristico modo ripiegata intorno al corpo; mentre nella maggior parte dei casi la Cercaria incapsulata è senza coda e più o meno contratta: per queste osservazioni sono stato indotto a dedurre che la coda quando non va perduta può anche semplicemente disfarsi od essere riassorbita durante il periodo d'incapsulamento. La coda quando si stacca dal corpo continua da sola a muoversi per alcun tempo, più o meno lungo, e ciò si può osservare tenendo in favorevoli condizioni una Cercaria sotto il microscopio. Dopo una lunga serie di sforzi, che consistono in allungamenti e contrazioni del corpo, ad ognuno dei quali corrisponde un forte tratto dato alla coda, questa comincia a staccarsi dal corpo: seguitando questo a dar tratti alla coda essa si stacca maggiormente, finchè la Cercaria, spingendosi con maggior violenza innanzi, con un brusco movimento a strappo se ne libera. Avvenuto il distacco tanto la Cercaria, quanto la coda restano, come sembra, in riposo: la Cercaria ripiglia subito a contrarsi e distendersi ritmicamente, mentre dall'altro canto la coda a muoversi vertiginosamente come prima, come se fosse ancora attaccata al corpo. Questi movimenti della coda durano così lungo tempo, che, una volta, ho potuto osservare una coda, già separata dalla Cercaria, i tessuti della quale erano mezzi disfatti nella parte posteriore di essa, che nella sua parte anteriore si muoveva ancora rapidamente.

I fasci di setole possono venire facilmente perduti, così quando la coda è attaccata ancora al corpo, come quando se ne è staccata; il che non rallenta il movimento della coda. La perdita delle setole sembra sia determinata da scatti troppo violenti della coda nei suoi movimenti di contrazione ed estensione non seguiti ed accompagnati subito da quelli delle appendici (setole), i cui fasci, per lo sforzo al quale, nel caso, non resistono si rompono alla base e si staccano.

La *C. setifera* può trovarsi isolata od in piccol numero di esemplari sporadici negli animali pelagici che infesta, oppure in grandissimo numero d'individui sparsi e diffusi per tutto il corpo dell'ospitatore: cosicchè questo, come ho osservato in certi casi, sembra punteggiato di macchioline bianche opache che sono appunto le Cercarie delle quali l'animale è cosparso. La Cercaria non ha, quindi, luogo di elezione nell'ospitatore, ma si annida nel punto dove è penetrata dall'esterno facendosi strada nella massa del corpo (p. e. Celenterati, Molluschi), o sotto la pelle a nello spessore di questa (p. e. Vermi, Tunicati). Evidentemente queste infezioni multiple si devono al fatto che gli ospitatori pelagici si sono imbattuti in un branco di Cercarie liberamente nuotanti che li hanno aggrediti per trovarvi albergo. Ciò facilmente lascia desumere il caso innanzi riferito delle numerose Cercarie che avevano, come sembrava, tutte insieme aggredita la capsula delle uova di *Scorpaena*; e mentre alcune senza coda erano già allogate nella massa capsulare, annidate tra uova ed uova, altre avevano ancora la coda fuori ed in atto di disfarsene, ed altre, infine, erano in via di penetrare nella membrana della capsula.

Non mi consta che nell'ospitatore si determini una vera e propria formazione di

cisti intorno alla Cercaria, la quale d'ordinario s'incastona nei tessuti dell'ospite: pertanto talvolta, mi è occorso di constatare che le Cercarie si trovano allogate in una sorta di cavità sferoidale, scavata nel tessuto dell'ospitatore nel punto dove sono in esso penetrate le Cercarie, le cui pareti sono rappresentate dalla superficie cicatriziale, dirò così, del tessuto stesso che ha reagito alla lesione limitando la cavità in esso prodotta dalla Cercaria: ciò ho potuto constatare, p. e., in alcune sezioni di pezzi di *Beroë ovata* D. Ch. di *Cestus veneris* Less. e di *Carmarina hastata* E. H., contenenti Cercarie incapsulate, a conforto delle osservazioni fatte in proposito a fresco e sul vivo. Di tanto ho data immagine nella fig. 5, che mostra appunto una Cercaria con la sua coda ravvolta e ripiegata su sè stessa racchiusa in questa sorta di capsula, o cisti, se pur si vuole così indicarla, scavata nel tessuto gelatinoso di una *Carmarina hastata* E. H. Secondo alcuni A. le Cercarie possono trovarsi anche nei canali gastrovascolari delle meduse e nell'asse dei Sifonofori (Vogt) in esso liberamente reptando.

La *C. setifera* spazia nel pelago nuotando indifferentemente dal fondo, donde si parte, fattasi libera dalle Redie viventi nei Gasteropodi, alla superficie, vagando alla ventura incontro all'ospitatore da infestare. Come è probabile le Cercarie, dapprima nuotano in branchi, se molte insieme iniziano la vita libera, il che spiega il loro numeroso infestare il primo ospitatore nel quale per caso s'imbattono: successivamente si spargono e disperdono nel plankton. Ciò è provato dal fatto che la *C. setifera* si trova indifferentemente in animali pelagici di differenti profondità: fra gli ospitatori, infatti, si riconoscono tanto forme di superficie, come di fondo; e cito ad es. l'*Olindias Müllerii* E. H. che di rado viene alla superficie (Lo Bianco).

Così dalle mie osservazioni personali, per più anni seguite, come da quelle condotte sul plankton per molti anni dal compianto amico Dott. S. Lo Bianco, si desume che le *C. setifera* in Novembre cominciano ad apparire libere nel plankton ed a trovarsi già frequentemente ospiti degli animali pelagici: esse, pertanto, si incontrano anche più frequenti in questi ospitatori nel decembre ed abbondantissime si constatano in generale in inverno: in alcuni anni specialmente, esse, come ho detto innanzi, sono numerosissime infestando un gran numero di animali pelagici, così che quasi tutti, più o meno, ne ospitano qualche individuo. Nella primavera l'invasione delle *C. setifera* diminuisce e dirada negli ospiti l'infezione, che cessa del tutto nella estate per ricominciare di nuovo la curva di frequenza nell'autunno seguente.

Questo ritmo biologico di comparsa nel plankton e di frequenza negli animali pelagici della *C. setifera* e susseguente scomparsa è in evidente corrispondenza con quello degli animali pelagici, in genere, suoi ospitatori abituali; i quali appunto dall'autunno alla primavera appariscono alla superficie (Lo Bianco, **1**, p. 452; **2**, p. 524-530).

Gli animali pelagici che le Cercarie infestano sono senza dubbio da considerarsi nella economia della specie come un mezzo di disseminazione nel pelago onde agevolare loro la via per giungere all'ospitatore definitivo; perchè le Cercarie, da essi ospitate e protette dagl'incerti e dalle contingenze della vita libera, possono in favorevoli condizioni, aspettare il loro fine ultimo, di raggiungere lo stato adulto. Questo deve, con ogni probabilità di certezza, compiersi in un predatore di animali pelagici e verosimilmente in un vertebrato (Pesce), che finora non mi è riuscito possibile di identificare, nel quale la Cercaria assolve, nella sua forma adulta, il compito di perpetuare la specie di distomide tuttora sconosciuta cui essa appartiene, e che rimarrà

finchè, più che altro, il caso per favorevoli contingenze non condurrà a riconoscerla. Difatti non potendo escludersi del tutto che il Distoma adulto di questa Cercaria possa anche essere una nuova specie, non torna, allo stato, nè opportuno, nè tanto meno facile lo ingolfarsi in una ricerca sulla possibile sua pertinanza ad una delle oramai già così numerose specie presentemente note di distomidi: ricerca difficile non poco, nella quale è prudenza andar più che mai cauti per evitare quei non conformi riferimenti (nei quali sono incorsi vari A., me compreso [1888] proprio per questa Cercaria) cui tale ricerca, malgrado larga conoscenza di forme di Distomidi, può condurre [1]).

La questione dell'ignoto ospitatore si connette evidentemente con quella della identificazione della specie cui appartiene la *C. setifera*, il cui ciclo biologico è certo in rapporto e relazione con la etologia dell'ospitatore, per la stagione, il modo, ed il tempo d'infezione di questo: nel che non poco gioca il ritmo di comparsa e scomparsa dalla superficie degli animali pelagici ospitatori intermedii in relazione alle condizioni etologiche e corologiche degli ospitatori definitivi che di quelli cibandosi possono infestarsi della *C. setifera*.

5. Identità e sinonimia della Cercaria setifera.

Jh. Müller nel 1850 (pag. 496) ricordando la *Cercaria inquieta* di O. Fr. Müller, trovata libera nel mare, scrive di aver osservata a Marsiglia liberamente nuotando nell'acqua del mare « eine eigenthümliche *Cercaria*, welche sich durch einen geringelten mit Borsten gefiederten Schwanz auszeichnete » e soggiunge « und ich sah auch das davon stammende *Distoma* nach dem Verlust des Schwanzes frei in Meerwasser erkennbar als identisch mit der *Cercaria* sowohl in der Form und Grösse des Korpers als noch mehr in den mit der *Cercaria* gemeinsamen beiden schwarzen Flecken auf dem vorderen Theil des Körpers ». Descrive poi in seguito brevemente così la suddetta *Cercaria* « Bei unserer Cercaria stehen die Borsten des Schwanzes in regelmässigen querreihen, 12 Bundeln auf jeder Seite der hinteren Hälfte des Schwanzes bildend, an andern Exemplaren waren nur die hintersten Bündeln erhalten ». Il Müller aggiunge di aver data notizia di questa Cercaria nel 1849 alla « Gesell. Naturfor. Freunden di Berlino » e che essa fu « gelentlich mit noch einigen andere larven von niedern Thieren abbilden ». Scrive inoltre il Müller, a pag. 497, che il *Distoma Beroes* Will — trovato dal Busch anche nel tubo digerente delle *Sagitta* — « ist uns bei Triest sehr haufig frei in Meerwasser vorgekommen und ganz in derselben Grösse und form wie Sie in der kleinen *Sagitta* lebt ».

È bene pertanto subito ricordare che questo *Distoma beroes* del Will (p. 343, tab. 10, fig. 10-13) = *D. papillosum* Diesing (1, p. 381) — trovato dal Busch

---

[1]) Durante la stampa del presente scritto, avendo avuta occasione di incontrarmi col collega Dott. Odhner a Monaco, nello scorso marzo 1913, in occasione dell'ultimo Congresso Zoologico internazionale, discorrendo di questa Cercaria del Müller (della quale gli mostrai i disegni qui riprodotti), egli mi espresse il dubbio che la Cercaria da me illustrata potesse riferirsi al *Distomum album* Stossich (p. 4, tav. 15, fig. 3); specie tipo del genere *Lepocreadium* Stossich, che appunto presenta, secondo i caratteri che Odhner riassume (1, p. 35), una grande vescicola terminale « nach vorn bis zum Pharynx reichend ». Ma così dall'esame del disegno originale di Stossich sopra citato, che ho voluto consultare, come da quello di esemplari della specie provenienti dalla collezione Stossich, che ho potuto fare, devo escludere la possibilità di un tal riferimento (Nota aggiunta).

(p. 99) a Trieste nell' intestino delle *Sagitta*, ed anche liberamente nuotante ed in diversi animali marini — al quale accenna il Müller è una forma giovane di *Apoblema* come ho dimostrato altrove (**3**, p. 123 e nota **1**): erronea è quindi l' identificazione del Müller della sua Cercaria del mar di Trieste con il distomide del Will: ciò che è provato di fatto dalla figura di questa Cercaria di Trieste data dallo stesso Müller (riportata dal La Valette St. George), che la rappresenta fornita di coda con setole laterali; figura dalla quale si rileva la nessuna corrispondenza di detta Cercaria col *Distoma beroes* Will.

In questo suo scritto Joh. Müller non illustra con figure le dette Cercarie di Marsiglia e di Trieste: ma gli schizzi ed i disegni da lui presi, come si rileva dal testo sopracitato, sono stati riprodotti dal La Valette St. George nella sua opera sulla evoluzione dei Trematodi. Difatti questo A. (p. 38) riporta nella tav. 2 tre figure di *Cercaria* riferite al Müller che sono evidentemente quelle disegnate dallo stesso Müller, come si deduce dal passo innanzi riportato. Secondo la spiegazione delle tavole di La Vallette St. George una di queste figure (fig. II) rappresenta la « *Cercaria setifera* Joh. Müller *ex mari prope Tergestum* », l'altra (fig. III) rappresenta la « *Cercaria elegans* Joh. Müller *ex mari prope Massiliam* », l'ultima (fig. IV) « *Eadem cauda dejecta* ».

Per meglio richiamare alla mente queste figure nella identificazione della Cercaria setifera di Joh. Müller riporto qui questi disegni del Müller editi dal La Valette St. George nella citata opera.

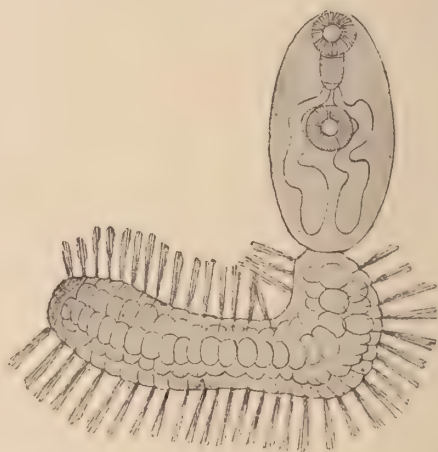



Fig. 1. — Riproduzione (rimpiccolita) delle figure delle due Cercarie di Joh. Müller (di Trieste e di Marsiglia) date da La Valette St. George.

Da essi si ricava che la Cercaria del golfo di Trieste (fig. II) per avere il corpo alquanto compresso lascia vedere il complesso della organizzazione interna: la coda evidentemente è molto contratta e perciò deformata e con i fasci di appendici (setole) fra loro ravvicinate. La fig. III-IV (Cercaria di Marsiglia) rappresentano i due aspetti diversi della stessa specie descritti dal Müller quello a corpo proteso fogliforme

fornito di coda e quello allungato e subterete senza coda: nell'individuo codato (fig. III) sono solamente accennati alcuni fascetti delle setole laterali ed è evidente — a giudicare dalla distanza intercedente fra i gruppi di setole, che l'A. si è limitato a disegnare, in rapporto alla lunghezza della coda — che molti di questi gruppi a coppie dovevano occupare, numerosi in serie, i lati della coda. Devo pertanto osservare che, per il numero dei fasci di setole della coda (12) assegnati dal Joh. Müller alla sua Cercaria (di Marsiglia), nessuna delle figure delle due Cercarie riprodotte dal La Valette, che presentano coda con setole (fig. II, III), corrisponderebbe, pel numero delle coppie di setole, alla descrizione del Müller.

Come si può facilmente constatare da quanto sopra ho esposto La Valette St. George ha indicato come *Cercaria setifera* quella che Joh. Müller ha trovata libera nel mar di Trieste, ed appone il nome di *Cercaria elegans* ai due disegni rappresentanti la Cercaria rinvenuta liberamente nuotante a Marsiglia; che è poi proprio quella, come chiaro si rileva dalla lettura del testo di Müller innanzi riportato, che egli particolarmente descrive come portante setole (setifera) nella coda. Il Müller, dunque, non ha dato nome alla Cercaria nuotante (mit Borsten gefiederte Schwanz) da lui trovata nel mar di Marsiglia, che ricorda poi di aver trovata pure nel Golfo di Trieste: la designazione di *C. setifera*, perciò, è del La Valette St. George, che ha attribuito questo nome, con la paternità del Joh. Müller, alla Cercaria di Trieste, ed ha apposto un altro nome (*C. elegans*) alla Cercaria di Marsiglia.

Il Diesing nella sua Revisione delle Cercarie (2) ha senz'altro seguito il La Valette St. George: difatti egli registra, fra le specie del genere, una *Cercaria* (*Gymnocephala*) *setifera* Joh. Müller (pag. 250) — alla quale riferisce la Cercaria trovata a Trieste da questo A., secondo il La Valette St. George (fig. II) —, e, fra le *Histrionella*, una *H. elegans* Diesing (attribuendosi il nome specifico, v. pag. 269), che riferisce alla *C. elegans* di La Valette St. George (fig. III-IV).

Dalla premessa esposizione storica dei fatti si ricava che La Valette St. George ha creato di fatto un equivoco intorno alla Cercaria che deve realmente impersonare la *Cercaria setifera* di Joh. Müller: equivoco che ha dato luogo, da parte di varii A., ad erronee identificazioni di Cercarie marine a coda fornita di setole, da essi studiate, con la *C. setifera*. E ciò sia per lo scambio facile a verificarsi fra le due Cercarie del Müller distinte dal La Valette con due nomi diversi sulle figure di questo A., stando, invece, alla descrizione originale del Müller (in base alla quale la *C. setifera* è evidentemente quella di Marsiglia), sia ancora per la identicità ammessa di fatto dagli A. fra le due Cercarie di Marsiglia e di Trieste del Müller ritenute distinte dal La Valette, ma non dal descrittore (Joh. Müller): identicità alla quale il testo del Müller lascia per vero facilmente adito.

Ciò posto a me pare, da quanto precede, di poter concludere — per ben stabilire i fatti e procedere oltre nella identificazione della Cercaria del golfo di Napoli — che il nome di *C. setifera* spetti senza dubbio a quella forma descritta da Joh. Müller fornita di setole alla coda, trovata nel golfo di Marsiglia, e non alla forma di Trieste (come vuole il La Valette); lasciando impregiudicata la questione se il nome specifico di *setifera*, non imposto dal Müller nel descrivere la specie di Marsiglia, come risulta dal testo, spetti proprio al Müller od invece al La Valette St. George, che, pubblicando il nome specifico di *setifera*, del

quale egli pel primo fa uso, ne sarebbe, in fondo, il vero autore. Conseguentemente il nome di *C.* (*Histrionella*) *elegans* attribuito dal La Valette St. George alla detta Cercaria di Marsiglia cade in sinomia di *C. setifera* [identificata come sopra].

Resta ora per conseguenza ad esaminare se la Cercaria trovata a Trieste da Joh. Müller e da lui non distinta dalla Cercaria di Marsiglia (*C. setifera* propriamente detta), ma ritenuta, invece, da questa differente dal La Valette St. George (che la distingue col nome di *C. setifera* Joh. Müller), è realmente una forma differente dalla vera *C. setifera*, e, nel caso, quale nome debba portare.

Nè della Cercaria di Marsiglia e tanto meno di quella di Trieste, solamente nominata, il Joh. Müller ha data alcuna notizia della interna organizzazione. Nelle figure (del Müller) riportate dal La Valette St. George è tracciata l'anatomia della sola Cercaria di Trieste (fig. II): dal che, pertanto, non potrebbe in fatto ricavarsi alcuna differenza essenziale dalla Cercaria di Marsiglia (v. fig. III-IV) della quale è ritratta la sola forma esterna: nè questa da sola potrebbe esser sufficiente a far ammettere una differenza fra le due Cercarie, perchè quanto di diverso presenta il disegno della Cercaria di Trieste si potrebbe facilmente interpetrare osservando che in esso, essendo l'animale schiacciato dalla compressione (ciò che spiega anche la differenza di forma del corpo), si scorge la interna organizzazione, che, per contro, non si può vedere nelle figure della Cercaria di Marsiglia che rappresentano l'animale in condizioni normali. Nè più valido argomento fornirebbe la coda della Cercaria di Trieste contratta e rattrappita e deformata dallo schiacciamento, pur presentando essa le caratteristiche essenziali della Cercaria di Marsiglia nei ciuffi di setole della coda: deformazione questa analoga a quelle, varie e diverse, che si possono constatare anche nella Cercaria di Marsiglia (*Cercaria setifera* propriamente detta), nello esame di numeroso materiale di questa. Infatti, indotto da tali considerazioni, ritenni nella mia nota preliminare del 1888 (p. 194) che le tre figure di Müller, riportate da La Valette St. George, dovessero riferirsi ad un'unica e sola forma: la *C. setifera*: nella quale rientrava, per conseguenza la *C. elegans* (*Histrionella elegans*). Naturalmente tralasciai per allora la questione che ho innanzi trattata: cioè, quale, delle due Cercarie, secondo il La Valette St. George dovesse propriamente impersonare la *C. setifera* di Müller (di Marsiglia). Questione d'altra parte nonchè inopportuna in una necessariamente breve nota preliminare, anche del tutto inutile, vista la conclusione cui era pervenuto, che si trattasse, cioè, di un'unica e sola specie e proprio di quella più comunemente nota come *C. setifera* di Joh. Müller, che avrebbe dovuto, a mio avviso, impersonare appunto la Cercaria di Marsiglia.

Alla *Cercaria setifera* (Müller) di La Valette St. George (fig. II) il Claparède (pag. 12) ritenne molto probabilmente identica una Cercaria liberamente nuotante da lui trovata nel golfo di St. Vaast ed identificata con quelle da lui rinvenute anche nelle meduse. Di questa Cercaria Claparède descrive la coda nello aspetto e struttura e disposizione dei fasci di setole che egli trova in nnmero di 19, mentre ricorda che questi sarebbero 12 secondo il Müller. Si badi però che questa osservazione di Müller riguarda la Cercaria di Marsiglia, la vera *C. setifera* c. s., non quella di Trieste—*C. setifera* secondo La Valette fig. II—alla quale, appunto, il Claparède rassomiglia la sua Cercaria. Il Claparède accenna al sistema escretore fatto di «zwei breite Aeste... die mittelst eine gemeinschäftlichen Stammes in eine die

Wurzel des Schwanzanhanges einnehmende Blase munden », del che non si trova traccia nella figura di Müller (*C. setifera* secondo La Valette St. George fig. II). Ricorda ancora il Claparède la presenza in questa sua Cercaria di un faringe che egli constata solo negli individui senza coda trovati in diverse meduse craspedote; ed osserva che « sehr constant war der Wurme rechts und links von hinteren Theile des gewaltgen Mundnapfes braunlich geflecht ». Ciò che non si osserva nel disegno della Cercaria di Trieste del Müller (*C. setifera* di La Valette St. George, fig. II); ma, invece, è evidente nelle due figure della Cercaria di Marsiglia (fig. III-IV, *C. elegans* del La Valette St. George).

Nella forma di Cercaria che ho trovata libera nelle acque del golfo di Napoli e su gli animali pelagici, descritta nelle precedenti pagine, ho riconosciuta, nel 1888, la Cercaria del Golfo di Marsiglia descritta dal Müller nel 1850 (p. 496) e figurata dal La Valette St. George (fig. III-IV) sotto il nome di *C. elegans*: di che possono facilmente far fede le figure che ne ho dato (fig. 1, 2, 3, 6, 7) se si comparano con le figure del Müller riprodotte dal La Valette St. George (e qui riportate). E riferendomi a quanto innanzi è esposto, ho ritenuto dovesse considerarsi la vera e tipica *Cercaria setifera* del Müller, ammettendo, inoltre, che la Cercaria di Trieste del Müller fosse la stessa cosa di quella di Marsiglia [*C. setifera* La Valette (Trieste) = *C. elegans* La Valette (Marsiglia)]. Lasciando per ora da parte la discussione di questa identificazione, sulla quale ritornerò più oltre, mi fermo alla costatazione di fatto, in base alle serie di indagini e deduzioni suesposte, che: la Cercaria del golfo di Napoli è identica a quella trovata a Marsiglia dal Müller e perciò, come ho dimostrato, essa è la legittima *C. setifera* di Joh. Müller 1850 (= *C. elegans* La Valette St. George, 1855, fig. III-IV).

La Cercaria marina da me così identificata nel 1888 (1, p. 193), perchè comunissima nel nostro Golfo, era già da molti anni nota agli studiosi, frequentatori della Stazione Zoologica di Napoli; ma non era stata bene identificata: essa era indicata comunemente, per comodo, come Cercaria pelagica, quand' io ne intrapresi lo studio nel 1886, come allora mi comunicava il compianto amico Dott. Salvatore Lo Bianco. Questi cortesemente volle procurarmi alcuni schizzi della Cercaria in parola precedentemente presi da altro studioso e rimasti inediti fra le carte della Stazione Zoologica, per darmi agio di constatare la corrispondenza della Cercaria che andavo esaminando con quella della quale era stata già da tempo constatata la frequenza sugli animali pelagici del Golfo.

Da questi disegni ho ricavata la riproduzione di due dei più caratteristici che qui riporto (*Fig. 2.*) a fine di permetterne il confronto con i disegni da me dati della *C. setifera*, a migliore conferma di quanto sopra affermo. Una delle figure più accuratamente disegnata rappresenta la Cercaria pelagica munita di coda con la grande vescicola escretoria ripiena delle sferule rifrangenti, in uno degli aspetti che questa può assumere, e con la ventosa anteriore invaginata: l'altra figura, alquanto schematizzata, raffigura la Cercaria priva di coda con beante ventosa boccale.

Ed è precisamente, come ho già dimostrato (1, p. 193), questa stessa Cercaria pelagica, che, identificata nel 1873 dal Lankester con la *C. echinocerca* di De Filippi, fu poi trovata nei Ctenofori del Golfo di Napoli nel 1880 dal Chun

(pag. 243, fig. 133), che la riferì, invece, alla *C. Thaumantiatis* del Graeffe; e, più tardi venne ritrovata anche dal Daday (1888), che la descrisse sotto il nome di *Histrionella setosicaudata* (p. 84, fig. 11, 13, figure per vero non molto conformi) su di un esemplare (preparato in toto) trovato liberamente nuotante nel plankton del Golfo di Napoli, ritenendola differente dalla *H. elegans* Müller, secondo La Valette St. George, non senza però far notare le rassomiglianze che la sua Cercaria presentava anche con la *C. setifera* Joh. Müller (secondo La Valette) e con la *C. echinocerea* di De Filippi.

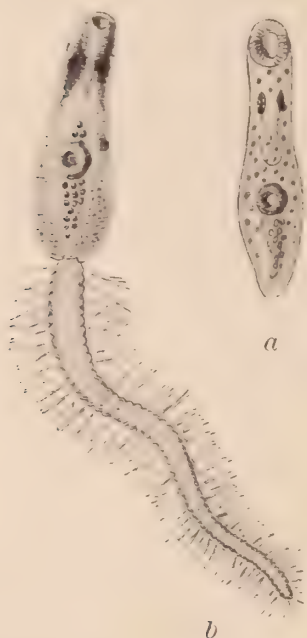



Fig. 2. — Riproduzione di due dei disegni della *C. setifera* esistenti nella Stazione zoologica di Napoli (rimpiccoliti): *a* con coda, *b* senza.

Dalle indagini e ricerche bibliografiche fatte sulle Cercarie marine per la identificazione della Cercaria pelagica del nostro Golfo fui condotto a riconoscere, dalla descrizione datane da A. Costa (1864), la corrispondenza della sua *Macrurochaeta acalepharum*, trovata sugli Acalefi del Golfo di Napoli, con la Cercaria che avevo in esame e, conseguentemente, a concludere che la specie pelagica del Costa doveva rientrare fra i sinonimi della *C. setifera* Müller (forma di Marsiglia).

Avendo avuto in seguito agio di esaminare i manoscritti del mio predecessore (A. Costa) nella cattedra di Napoli, che si conservano in questo Istituto Zoologico, ho rinvenuto un fascicolo di appunti e di molti schizzi e disegni inediti che servirono al Costa per la redazione della sua nota sulla *Macrurochaeta acalepharum*, dei quali ho già fatto cenno a pag. 11, a proposito della riproduzione di un disegno riguardante un peculiare aspetto assunto della vescicola terminale del sistema escretore. Da questi disegni tolgo, scegliendole fra le altre, le due figure che qui riproduco (*Fig. 3.*) rimpiccolite dall'originale, a maggior conforto della piena e completa conferma che essi mi hanno fornita delle mie precedenti conclusioni (1888) sulla identicità della *Macrurochaeta acalepharum* A. Costa con la *Cercaria setifera* Joh. Müller, mentre comprovano, nello stesso tempo, la corrispondenza della specie del Costa con le figure della Cercaria conosciuta come pelagica dagli studiosi della Stazione Zoologica. Una delle figure qui riprodotte rappresenta la *M. acalepharum* fornita di coda provvista delle caratteristiche setole, col corpo alquanto in distensione e con le ventose figurate forse

Fig. 3. — Riproduzione di due dei disegni inediti della *Macrurochaeta acalepharum* Costa (rimpiccoliti): *a* con coda, *b* senza.

un poco esageratamente beanti: da questa figura oltre a tutte le caratteristiche della *C. setifera* (identificata c. s.), risulta evidentissimo anche il particolare organo terminale del sistema escretore: il caratteristico bulbo, che sbocca nel forame codale innanzi descritto nella *C. setifera* (pag. 13), al quale mette capo, come chiaro si scorge nella figura del Costa, la vescicola terminale del sistema escretore contenente le grandi sferule rifrangenti. Nell' altra figura del Costa è rappresentata la *M. acalepharum* senza coda con la ventosa anteriore contratta e quella ventrale protrudente come talvolta si presenta in *C. setifera.*

Con la Cercaria del Golfo di Napoli (*C. setifera* Joh. Müller) ho pure identificata nel 1888 la *C. echinocerca* De Filippi proveniente da Redie del *Buccinum Linnaei* Payr. del Golfo di Genova che il De Filippi (1, 433, fig. 19-20) credeva possibile appartenesse al ciclo del *Dist. histrix* Dujard. della mucosa boccale dei Pleuronettidi, che, a sua volta, rappresentava, probabilmente, la forma incistata di un *D. appendiculatum.* Ora, per meglio stabilire l'affermata identicità delle due Cercarie, riproduco la figura (19) del De Filippi (*Fig. 4.*) dalla quale la corrispondenza della *C. echinocerca* con la *C. setifera* risalta evidente, specialmente per chiunque abbia familiarità con numerosi esemplari della Cercaria di Müller e ricordi tutti gli aspetti che essa assume: ciò dico specialmente per quanto riguarda la coda della *C. echinocerca* (v. figura), che è molto contratta e rattrappita e si presenta proprio come talvolta accade di osservarla in *C. setifera*; tenendo pur conto che il disegno della coda dato dal De Filippi non è molto curato, e succinta è la descrizione nei particolari di essa. Dalla comparazione della figura e della descrizione della *C. echinocerca* del De Filippi con le figure della *Cercaria setifera* da me date (fig. 1-4, 6-7, 15) risulta abbastanza evidente la dimostrazione della assunta identicità della *C. setifera* e *C. echinocerca*; nella quale si riscontrano, infatti, tutti i tratti caratteristici della prima, e fra questi, ad esempio, risalta quello che aveva colpito il De Filippi: cioè, la peculiarità delle macchie pigmentarie anteriori (con cristallino) ed il particolare aspetto e sviluppo della vescica terminale escretoria contenente « de grands globules fort refringents ». Nella figura di De Filippi dietro la ventosa posteriore si osservano due corpi sferici dei quali, pertanto, l'A. non fa parola nel testo: all'aspetto essi lascerebbero logicamente dedurre che possano rappresentare gli organi genitali (testicoli) che abbiano già fatta assai precoce comparsa, ma lo sviluppo dei detti corpi, non troppo conforme allo stadio della Cercaria, lasciano molto dubbio su questa possibile interpetrazione.

Fig. 4.—Riproduzione rimpiccolita della figura originale della *C. echinocerca* di De Filippi.

Non è fuori luogo, a questo proposito, tener conto, a conforto della conclusione di cui sopra, il riferimento innanzi ricordato, da parte del Lankester, della Cercaria pelagica di Napoli appunto alla *C. echinocerca* De Filippi.

Con la *C. echinocerca* più tardi (3, p. 2 nota) ho identificata anche la Cercaria proveniente dalle Redie trovate e descritte nel *Conus mediterraneus* dallo stesso De Filippi (*Cercaria? coni mediterranei*, 2, p. 14, fig. 21); forma riportata dal Diesing (3, p. 282) fra quelle insufficientemente note sotto il nome di *Cercariaeum Coni-mediterranei*: perchè, come ho detto, queste Redie, che rassomigliano a quelle di *Buccinum*, producono delle Cercarie che ho seguite nel loro sviluppo evolversi in *C. setifera*.

Alla detta Cercaria pelagica di Napoli corrisponde anche quella trovata liberamente nuotante dal Bütschli (ubi?) con coda fornita di setole, della quale questo A. descrive e disegna la sola coda (p. 400 nota, tav. 25, fig. 16); perchè per l'aspetto e comportamento e struttura questa rivela di appartenere alla *C. setifera*.

Sono ancora da identificarsi con la propriamente detta Cercaria setifera di Müller — come per molte di esse ho già da tempo affermato (1, 3) — le seguenti altre Cercarie marine con e senza coda (evidentemente perduta), nonchè alcune forme giovanili asessuate (del tutto?) di distomidei:

a) La *C. Thaumantiatis* trovata dal Graeffe a Nizza su di una *Thaumanthias* (*Eucope* secondo Odbner) e da lui descritta e figurata (pag. 49-51, tav. 10, fig. 10-12), a proposito della quale lo stesso Graeffe scrive: « Als sehr ähnliche unwollkommene distomum Arten betrachte ich: 1) die von Joh. Müller aus dem hohen meer beobachtete Cercarie (Mullers Archiv. 185, p. 496); 2) die von Kölliker aus *Pelagia noctiluca* [1]) und 3) die von C. Vogt in *Hippopodius luteus* gefundenen Entozoon ». Il che mostra come egli sia stato subito colpito dalla rassomiglianza con la Cercaria di Marsiglia del Joh. Müller, la sola delle due che questi descrive appunto alla pagina (496) citata dal Graeffe (l'accenno all'altra Cercaria, rinvenuta a Trieste trovasi, invece, a p. 497).

Confortano il mio assunto la comparazione delle figure di Graeffe che qui riproduco (*Fig. 5*) con quelle da me date della *C. setifera*, perchè la identicità delle due forme risulti evidente; per quanto la descrizione non sia troppo conforme per er-

[1]) Riferimento erroneo; perchè questa forma del Kölliker, come ho dimostrato (3, p. 123), deve riferirsi all'*Accacoelium calyptrocotyle* Montic. (cioè il Distoma della Beroe da me illustrato, 3). Secondo l'Odhner (3, p. 525, nota 22) « kann also keinen Zweifel unterliegen dass *Orthagoriscus* den Endwirt fur diese Form Angibt »: conclusione che, emendata nel riferimento della specie, è fondamentalmente conforme alla ipotesi da me messa innanzi nel 1888 (1, p. 198) che il Distoma delle Beroe raggiungesse appunto nell' *Orthagoriscus* la forma adulta che supposi allora potesse invece essere l'*Accacoelium contortum* Rud.; dal quale, come più tardi potetti dimostrare (3), differisce specificatamente il Distoma della Beroe (che distinsi, perciò, col nome di *Accacoelium calyptrocotyle*). A questo proposito la possibilità ammessa dall' Odhner (loc. citato) che il *Dist. foliatum* Linton (p. 522, 5 fig.) dell'*Orthagoriscus* possa rappresentare la forma adulta dell'*Acc. calyptrocotyle*, parmi non privo di fondamento; perchè analogo giudizio venne fatto di formulare anche a me, non appena esaminata la descrizione e le figure del Linton. Ma d' altra parte queste e quella, considerate comparativamente con *Acc. calyptrocotyle*, non permettono di escludere del tutto che il *D. foliatum* Linton possa essere una specie diversa dal primo per quanto molto affine. E per specie diversa dal *Acc. calyptrocotyle* la considera di fatto il Looss (2, p. 644) che, per le rassomiglianze di entrambi con il *D. divergens* Looss e *D. Planci* Stoss, esprime l'opinione che anch'essi possano incorporarsi nel n. genere *Orophocotyle* da lui creato per i due suddetti distomi (forma tipica *O. planci*).

ronea osservazione e le figure non molto curate: dalle quali, pertanto, conoscendo la organizzazione di *C. setifera* per esame di largo materiale, si rilevano le caratteristiche di questa Cercaria, come la struttura del tegumento, l'aspetto e disposizione delle macchie anteriori, il comportamento della coda, l'anatomica disposizione dell'apparato digerente, e la caratteristica vescicola terminale del sistema escretore contenente le grandi sferule rifrangenti. Caratteristiche tutte che hanno certamente indotto il Chun a riferire a questa Cercaria del Graeffe la Cercaria pelagica del Golfo di Napoli: fatto che, a mio avviso, è un argomento ancora a conforto dell'asserita identicità delle due forme (*C. Thaumantiatis* = *C. setifera*).

Fig. 5.—Riproduzione rimpiccolita della *C. Thaumantiatis* di Graeffe (fig. 10, 11).

L'Odhner (**2**, p. **115**, fig. 8) descrivendo il *Lecithostaphylus retroflexus* Molin scrive: «Die hierher gehörende Larvenform erkennt man auf den ersten Blick in der von Graeffe (1858, S. 47, T. X) beschreibenen borstenschwanztragenden *Cercaria thaumantiatis* aus der Scheibe einer Hydromeduse der Gattung *Eucope* (Nizza)». Non so rendermi conto come l'Odhner abbia così recisamente affermato questo riferimento: basta difatti esaminare la sua fig. 8, che rappresenta il *Lecithostaphylus retroflexus* Molin di *Belone acus* per convincersi che questo distoma nessun carattere manifestata della *C. thaumantiatis* (la pelle non presenta armatura cutanea di aculei; manca il tubo prefaringeo, le braccia intestinali sono più brevi, manca la caratteristica vescica escretoria). È pur vero, però, che lo stesso Odhner (**3**, p. 529) si rimangia, molto diplomaticamente, questo precipitato (voreilig) giudizio scrivendo « ich halte diesem Identität fur recht warscheinlich, auf die sehr primitive Figur von Graeffe kann doch nicht mehr als ein Vermuthung gebaut werden »: il che è ben lungi dall'apodittica affermazione sopra riportata. Ma le figure del Graeffe (qui riprodotte) non sono poi così primitive — come l'Odhner, a sua giustifica, le definisce — per appoggiare l'erroneo suo riferimento; perchè esse, per chi con modesto criterio di esame obbiettivo le esamina, sono sufficienti a provare, come ho sostenuto fin dal 1888 (l'Odhner lo ignorava forse), che la *C. Thaumantiatis* di Graeffe si identifica con la *C. setifera* del Müller.

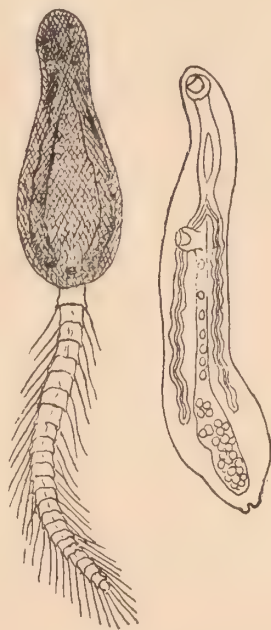
b) Il *Distomum hippopodii* Vogt, 1853 (pag. 91-98, tav. 15, fig. 13) trovato dal Vogt nei peduncoli dei gastrozoidi dell'*Hippopodius luteus* Quoy et Gaymard a Nizza; perchè così dalla descrizione, per quanto sommaria, come dalle figure alquanto primitive (qui riprodotte, *Fig. 6.*), si può, dalla presenza della grande vescicola escretoria ripiena delle sferule rifrangenti, che è un carattere saliente della *C. setifera*, con tutta probabilità di certezza, ritenere che questo distoma del Vogt sia proprio la *C. setifera*.

c) Quella forma giovanile di distoma sconosciuto del quale parla il Leuckart 1886 (p. 88 nota), da lui trovato incapsulato nella massa del corpo (in der Leibshöhle) della *Phyllirhöe bucephala*, come ho fatto già osservare (**1**, p. **195**): e ciò, oltrecchè per l'analogia di rinvenimento da parte mia della *C. setifera* sulle *Phyllirhöe* del Golfo di Napoli, anche per quello che posso dedurre da quanto scrive il Leuckart. Questi, difatti, la descrive « mit mächtig entwickeltem Pharynx zügehörig, der bis zum Darm schenkeln reicht (osservazione evidentemente inesatta circa l'estensione del faringe che per l'A. fa tutt'uno col prefaringe), zwei Augenflecke von so betrachtlicher Grosse ecc. ».

Fig. 6. — Riproduzione conforme della figura del Vogt del *Distomum hippopodii.*

Fig. 7. — Riproduzione conforme della figura del Distoma della Carinaria di Delle Chiaie.

d) Il Distoma della Carinaria descritto e figurato da Delle Chiaie 1841 (p. **139**, tav. 109, fig. 20), trovato nella *Carinaria mediterranea*, nella *Pterotrachea* sp. e nella *Cassiopea borbonica* (= *Cotylorhyza tubercolata*) del Golfo di Napoli. La descrizione di Delle Chiaie è molto primitiva ed incerta; ma nella figura qui riprodotta (*Fig.* 7.) si riconosce facilmente la Cercaria setifera in uno degli aspetti che assume — da me appunto rappresentato nella fig. **3** — come si può constatare comparando la figura di Delle Chiaie con la mia. Va pure ricordato, per analogia di rinvenimento, che anche io ho trovata la *C. setifera* nei suddetti animali elencati da Delle Chiaje.

e) La Cercaria « with Caudal Setae » descritta dal Fewkes (p. **134**, figura), da quanto credo poter dedurre dall'esame comparativo della descrizione e della figura data dal Fewkes nella quale campeggia la grande vescicola del sistema escretore della Cercaria setifera.

f) Il *Distomum physophorae* Philippi **1843** (p. **66**, tav. **5**, fig. **11**) della *P. tetrasticha*; perchè dalla figura, più che dalla brevissima ed insufficiente descrizione parmi si possa desumere che questa forma rappresenti la *C. setifera* del Müller in uno degli aspetti che questa assume, esaminata s'intende a piccolo ingrandimento [1].

g) Il *Distomum* ed il *Monostomum* — che come ho dimostrato (**3**, pag. **124**, nota **2**) è poi un Distoma — descritti da Leuckart e Pagenstecher (p. **591**,

[1]) Il Philippi ricorda pure un altro distoma da lui rinvenuto molto frequente nello stomaco di *Velella spirans* (p. 66-67, tav. 5, fig. 12): ma dalla descrizione e dalla figura sono indotto a concludere che si tratti di forma differente dalla *C. setifera* Müller e sarei, invece, quasi per avanzare il dubbio che, detto distoma, potesse riferirsi all'*Acc.* (= *Orophocotyle*) *calyptrocotyle* Montic. per l'aspetto generale e per la ventosa ventrale.

tav. 21, fig. 8-9) per averli rinvenuti ad Helgoland nella *Sagitta germanica* (*S. bipunctata* Quoy et Gaymard, secondo Grassi: I. Chetognati); perchè, data pure la primitività del disegno, parmi si abbiano sufficienti dati per identificare le dette due forme con la *C. setifera*. Tantoppiù che questi A. scrivono di avere uno di essi osservato delle forme, simili a quelle da loro descritte, negli Eteropodi, Salpe ed Acalefi del mediterraneo, che evidentemente non possono essere altro che la comunissima Cercaria pelagica del Mediterraneo: la *C. setifera* [1]).

Ma se da un canto un certo numero di forme sono da riferirsi, come risulta da quanto sopra, alla *C. setifera*, dall'altro ve ne sono di quelle, da questa differenti, che devono distrarsi dalla sinonimia della detta Cercaria. Nella mia nota preliminare ho dimostrato infatti (1, p. 194) che la *C. setifera* Villot (1875), proveniente da sporocisti trovate nella *Scrobicularia tenuis* dal Villot (pag. 33, tav. 10, fig. 1-8), è una forma diversa dalla *C. setifera* del Müller, come allora ho intesa la sinonimia di questa Cercaria (Cercaria di Marsiglia = *C. elegans* + Cercaria di Trieste = *C. setifera*, come è detto innanzi); tantoppiù che lo stesso Villot, mentre riferisce la sua Cercaria alla *C. setifera* Müller secondo La Valette St. George (fig. II), scrive: « Je serais tenté de croire que la *C. elegans* Müller (La Valette, fig. III) n'est qu'un *C. setifera* ayant perdu la grand partie de ses soies). Proposi perciò, conseguentemente, che la Cercaria del Villot portasse altro nome: quello di *C. Villoti*: nome accolto e riprodotto nei trattati. Difatti, comparando la *C. Villoti* con la *C. setifera* (come l'ho identificata in questo scritto) in base alle descrizioni ed ai disegni del Villot e miei, le differenze risultano evidenti: per ricordarne solo alcune noterò l'assenza di macchie pigmentarie, la mancanza della grande vescicola escretoria — molto diverso essendo il comportamento del sistema escretore [2]) — e la differente organizzazione dell'apparato digerente nella *C. Villoti*. Ancora si distingue questa Cercaria del Villot dalla setifera per la sua origine da Sporocisti.

Recentemente il Pelsener (1906) ha rinvenuto nella *Syndosmia alba* a Boulogne (p. 164, tav. 8, fig. 5-6) una Cercaria proveniente da Sporocisti che egli riferisce alla *C. setifera* di Müller (secondo La Valette, fig. II) trovata «libre en mer, à Trieste, Müller ».

Secondo il Pelsener, da una comparazione che egli istituisce con la *C. Villoti* Montic. (=*C. setifera* Villot) egli « doute donc qu'il n'y ait pas identité » fra le due Cercarie, quella da lui descritta e quella studiata dal Villot. Evidentemente, consultando la descrizione e comparando le figure del Pelsener, nulla vi è di comune fra la Cercaria da questo A. riferita alla *C. setifera* e la vera *C. setifera*, come risulta dalla descrizione che di questa ho dato nelle precedenti pagine. Come, d'altra parte, la Cercaria di Pelsener è differente da quella del Villot per molti caratteri: ricordo

[1]) Con le suddette forme di Distomi non hanno nulla di comune quelle trovate dal Bush nelle Sagitta *(S. cephaloptera)* a Trieste. Una di queste, da lui riferita al *D. Beroes* Will (p. 99), è perciò un *Apoblema* (v. innanzi a p. 23-24 ed il mio lavoro 3, p. 123); l'altra, *D. fimbriatum* (p. 99, tav. 15, fig. 12), non è possibile di ben identificare; la terza *D. crassicandatum* (p. 99, tav. 15, fig. 13) è con molta probabilità anch'essa un *Apoblema*.

[2]) Ricordando che, in ogni caso, è erronea l'osservazione del Villot che la vescicola escretoria si prolunghi nella coda.

ad esempio la disposizione dell'apparato escretore, la presenza di glandole (cistogene?) anteriori, disegnate (fig. 5) ma non illustrate dall'A. Cosicchè a mio avviso la Cercaria della *Syndosmia*, descritta dal Pelsener, dovrebbe rappresentare il tipo di una forma diversa e distinta oltrecchè dalla *C. setifera* Joh. Müller (La Vallette fig. III-IV), anche dalla *C. Villoti* che proporrei di indicare col nome di *C. Pelseneri.*

Non mi consta di riferimenti ulteriori, a quelli innanzi citati, o da ritenersi come tali — in conseguenza di questo mio scritto — di Cercarie marine con coda fornita di setole, e da questa diverse, alla *C. setifera* di Joh. Müller (quella trovata a Marsiglia) quale è stata da me identificata. Che se per avventura vi fossero delle forme sfuggitemi nello spoglio della letteratura delle Cercarie marine, non sarà difficile, allo stato, per i dati che fornisco con la presente memoria, di procedere ad una identificazione di tali forme con la *C. setifera*, o, per contro, alla distrazione delle medesime dalla sinonimia di questa Cercaria.

Mi tocca ora di esaminare la questione innanzi posta se, cioè, la Cercaria di Trieste del Müller è la stessa cosa della Cercaria di Marsiglia: differenza che non avevo ammessa nel 1888 ritenendo, come ho ricordato innanzi, che le due forme rappresentassero entrambe un'unica e sola specie: la *C. setifera* Joh. Müller.

Su questa conclusione m' induce ora a ritornare, per ulteriore disamina, lo studio più particolareggiato che sono venuto facendo e la migliore identificazione, che la esposizione della storia di queste Cercarie del Müller, qui riassunta, mi ha permesso della tipica Cercaria setifera del Müller quale essa risulta individuata nel suo aspetto, organizzazione e biogenesi. Da tale studio, difatti, sono condotto a concludere che, mentre il Müller 1850, p. 497, riferiva alla Cercaria setifera di Marsiglia anche quella da lui ritrovata a Trieste, negli schizzi di questa ultima, diseguandone l'anatomia interna a più forte ingrandimento (ciò che non fa per quella di Marsiglia), mette in rilievo delle caratteristiche che rivelano differente la Cercaria di Trieste da quella di Marsiglia. Tali differenze come esse mi risultano dallo studio di questa forma, in base alle identificazioni della Cercaria pelagica del Golfo di Napoli con la Cercaria setifera, diremo vera e propria di Joh. Müller, giustificano la differenza riconosciuta dal La Valette St. George fra le due Cercarie di Marsiglia e di Trieste errando solo nell'invertire l'attribuzione dei nomi del Müller, come ho cercato di provare da quanto innanzi è detto. Perchè, considerando il disegno della Cercaria di Trieste, dato da La Valette St. George (fig. II), comparativamente con quelli della organizzazione di *C. setifera* quale risulta dalle mie indagini, emergono alcune differenze che mi sembrano sufficienti a distinguere la Cercaria di Trieste da quella di Marsiglia: differenze che acquistano maggior valore anche pel fatto che, le maggiori conoscenze che ora si possiedono sulle Cercarie marine, hanno dimostrato come vi possono essere più forme di Cercarie con setole alla coda (per es. *C. Villoti*, *C. myocercoides*, *C. pectinata* Pels.), ma che presentano organizzazione diversa dalla *C. setifera* di Müller; la forma, pel passato, più nota fra le Cercarie, che

presentava tale carattere; alla quale perciò si era proclivi a riferir quelle con la coda fornita nello stesso modo di setole. Secondo il disegno (fig. II) riprodotto da La Valette St. George, che non è poi così sommario come vorrebbe il Pelsener (il quale non so sopra di che fondi il suo sospetto che cioè «tube digestif et organe excreteur ont eté confondus en unseul appareil ») si rileva, difatti: *a)* che mancano le macchie pigmentarie anteriori, la cui assenza anche in altre Cercarie codate con setole (p. e. *C. pectinata* Pels.) escludono il dubbio che m'era sorto, che queste fossero state possibilmente dimenticate nel disegno di Müller, o ad arte soppresse per mettere in evidenza la organizzazione interna; *b)* che il comportamento del tubo digerente è diverso, perchè non risulta la presenza del tubo prefaringeo di *C. setifera* — nè potrebbe ritenersi questo fatto dovuto alla contrazione del corpo, che avrebbe determinato il ravvicinamento del faringe alla ventosa boccale — e sembra anche diverso l'aspetto che presentano le braccia intestinali; *c)* l' assenza della grande vescicola escretoria della Cercaria setifera, che non poteva sfuggire alla osservazione e che pur manca in altre Cercarie marine con setole alla coda, nelle quali tale vescicola si comporta, invece, diversamente, come si rileva dalle figure che ne hanno date gli studiosi di queste Cercarie: a meno che il Müller avesse a bello studio omesso di disegnarla, cosa poco probabile ad ammettersi. Ad ogni modo pur non potendo giudicare di questa Cercaria di Trieste, indicata solamente dal Müller, da altro elemento che da come essa è stata disegnata dal Müller senza alcuna illustrazione o dichiarazione scritta che l'accompagni, credo che si possa, in base a questo solo dato, per le progredite conoscenze della organizzazione di altre Cercarie marine a coda setoluta, ritenere che questa Cercaria di Trieste rappresenti una forma diversa dalla vera *C. setifera* Müller in questo scritto illustrata: forma che, per distinguerla, ad evitare ulteriori equivoci di nomenclatura, confusioni di specie, o scambi di denominazione, proporrei di distinguere con un nuovo nome, che potrebbe essere quello di *C. Mülleri* [1]).

Ciò posto possono forse identificarsi con questa *Cercaria Mülleri* la *Cercaria Villoti* e la *Cercaria Pelseneri*, riferite entrambe dai rispettivi due Autori alla forma di Cercaria trovata da Müller a Trieste (*C. Mülleri*)?

Da quanto ho innanzi detto per ciascuna di queste due Cercarie nei loro rapporti reciproci, e per quanto risulta dalla comparazione della *C. Villoti* con la figura riprodotta dal La Valette della *C. Mülleri*, mantengo per questa Cercaria la mia precedente conclusione, che ora estendo, per conseguenza, anche alla *C. Pelseneri*. Esse sono forme distinte così dalla *C. setifera*, come dalla *C. Mülleri* e vanno ad ingrossare con la *C. myocercoides* Pels. e la *C. pectinata* Pels. il numero delle Cercarie marine a coda fornita da appendici (setole).

L'Odhner (2, pag. 108) mette innanzi la congettura (Vermuthung) che «die von Joh. Müller bei Trieste gefischte freischwimmende *Cercaria setifera*, wovon La Valette (1855, Tab. 11, fig. II) eine Abbildung ohne Beschreibung veröffentlicht hat auf *Proctaeces maculatus* Looss zu beziehn ist», ed espone le considerazioni che

---

[1]) La sinonimia di questa Cercaria risulterebbe quindi la seguente: *C. Mülleri* Monticelli (n. nov.) = *C.* di Trieste di Joh. Müller 1850, p. 497 = *C. setifera* Joh. Müller secondo La Valette St. George, p. 38, tav. 2, fig. II = *C. (Gymnocercaria) setifera* Diesing, 2, 1855, p. 250 = *C. setifera* Monticelli, 1888, p. 193, 195 = *C. setifera* Braun 1913.

confortano tale sua congettura. Poichè nel detto lavoro dell'Odhner non è raffigurata la specie del Looss, ho voluto consultare la memoria originale (1, p. 402, fig. 3, *Distoma maculatum* n. sp.) per rendermi conto del suddetto riferimento. Per vero dalla comparazione della figura della *C. Mülleri* (*setifera* La Valette fig. II) con l'immagine data dal Looss del *D. maculatum*, non so rendermi conto della surriferita congettura dell'Odhner; non foss'altro, per non dire di tutto l'insieme dell'aspetto e della organizzazione, pel fatto del grande sviluppo della ventosa posteriore quasi il doppio dell'anteriore che non trova riscontro nella ventosa posteriore di *C. Mülleri*, nella quale, da quanto si ricava dal disegno riportato da La Valette — che rappresenta, allo stato, il solo elemento di giudizio — le due ventose sono uguali. Son certo che anche per questo riferimento, che parmi non meno corrivo dell'altro riguardante la *C. Thaumantiatis*, l'Odhner sarà per ricredersi in altra occasione. Per quanto si abbia larga conoscenza di forme è consigliabile essere molto cauti nel riferimento a Distomi delle Cercarie, delle quali solo da poco si è intrapreso di proposito una particolareggiata illustrazione (v. ad es. gli studii di Pelsener, Labour ecc) che possa permettere di meglio identificarle.

In una nota (16) a piè di pagina della sopra ricordata opera (2) lo stesso Odhner, a proposito della da lui citata *C. setifera* Müller di Trieste (che è poi come si vede la *C. Mülleri* come ora va distinta), riassumendone sommariamente la storia, scrive: « Von späteren Verfasseren (Claparède 1863, Villot 1879, Monticelli 1888) ist dieser name dann für eine andere borstens schwanzhagende Cercarie verwendet worden » e spiega perchè queste Cercarie si distinguono dalla *C. setifera* (= *C. Mülleri*) di Müller. In questa osservazione, in effetti, le cose innanzi dette gli danno in parte ragione: perchè, se si eccettua la Cercaria di Claparède che, come si è visto, entra nei sinonimi di *C. setifera* Müller, tanto la Cercaria da me nel 1888 riferita alla Cercaria di Trieste del Müller (*C. setifera* = *C. Mülleri*)—per averla identificata con quella di Marsiglia (la *C. setifera* di Joh. Müller propriamente detta)— quanto quella del Villot sono forme diverse dalla *C. Mülleri*: pertanto l'Odhner poteva ricordare che, quanto alla Cercaria del Villot, la differenza di questa dalla forma di Müller era stata già da tempo da me dimostrata.

Da quanto sono venuto esponendo risulta che la sinonimia della Cercaria setifera di Joh. Müller, come l'ho identificata per le ragioni esposte nelle precedenti pagine, può comporsi nel modo seguente [1]:

Cercaria setifera Joh. Müller 1850 [2])

(La Valette St. George, tav. 2, fig. III-IV)

1841. *Distoma Carinariae* Delle Chiaie, p. 139, tav. 109, fig. 20.
1843. *Distomum Physophorae* Philippi, p. 66, tav. 5, fig. 11.
1850. *Cercaria* con setole (*setifera?*) Joh. Müller, 1850, p. 496.
1850. *Distomum geniculatum* Diesing, **1**, p. 373.
1853. *Distomum hippopodii* Vogt, p. 97, tav. 15, fig. 3.
1855. *Cercaria elegans* (Joh. Müller) De La Valette St. George, p. 38, tav. 2, fig. 3-4.
1855. *Cercaria echinocerca* De Filippi, **1**, p. 433 (Estratto p. 17), fig. 19-20.
1855. *Histrionella echinocerca* Diesing, **2**, 267.
1855. *Histrionella elegans* Diesing, **2**, p. 269.
1857. *Cercaria? coni-mediterranei* De Filippi, **2**, p. 212 (Estratto p. 14), fig. 21.
1858. *Cercaria Thaumantiatis* Gräffe, p. 49, tav. 10, fig. 10-11.
1858. *Cercariarum coni-mediterranei* Diesing, **3**, p. 282.
1858. *Distoma* (della *Sagitta*) Leuckart-Pagenstecker, p. 599, tav. 21, fig. 9.
1858. *Monostoma* (della *Sagitta*) Leuckart-Pagenstecker, p. 599, tav. 21, fig. 8.
1863. *Cercaria setifera* (Joh. Müller, secondo La Valette St. George) Claparède, p. 12.
1864. *Macrourochaeta acalepharum* Costa, p. 86.
1873. *Cercaria echinocerca* Lankester, p. 95.
1880. *Cercaria Thaumantiatis* (Gräffe) Chun, p. 243, fig. 133.
1882. *Cercaria* (with Caudal Setae) Fewkes, p. 134, con figura.
1885. *Distomum carinariae* Carus, p. 133.
1885. *Cercaria elegans* Carus, p. 133.

---

[1]) Fissata così, come ora risulta, la sinonimia della Cercaria setifera, ad evitare equivoci d'interpetrazione nel riferimento, alla detta Cercaria, di altre forme larvali o giovanili di Distomidi trovate su animali pelagici, e che appartengono invece ad altre specie o rappresentano forme distinte, ricorderò che:

a) Il *Distoma beröes* Will 1844 (pag. 12) della *Beröe rufescens* (= *Beröe forskalii* secondo Chun) = *Distoma papillosum* Diesing (**1**, p. 381), come ho innanzi detto (v. p. 23-24), è una forma giovane di Distoma appendicolato (*Apoblema*).

b) Il *Distoma Velellae* Philippi 1843 (p. 66, tav. 5, fig. 12) della *Velella* = *D. megacotyle* Diesing (**1**, p. 379); il *Distoma Rhizophysae* Studer della *Rhizophysa conifera* (p. 12, tav. 1, fig. 7), ed il *Distoma pelagiae* Kolliker 1849 (p. 53, tav. 2, fig. 5-6) = *D. Pelagiae* Diesing (**1**, p. 395) = *D. köllikerii* Cobbold (p. 30), come ho dimostrato (**3**, p. 123), corrispondono all'*Accacoelium calyptrocotyle* Monticelli; e se non proprio tutte le dette forme a questa specie, certo esse appartengono al genere *Accacoelium.* Difatti secondo Odhner (**3**, p. 525, nota 22) il *Distoma Rhizophysae* Studer, in base alle sue indagini, sarebbe la forma immatura di *Acc. macrocotyle* Diesing.

c) Il *Distoma Cesti-veneris* Vogt (1 Bd. pag. 299, citato dal Linstow, p. 333) come ho già espresso il dubbio (**3**, p. 124, nota 2), può, forse, anch'esso riferirsi all'*Acc. calyptrocotyle*; col quale dovrebbe, forse, anche identificarsi il *Distoma* della *Velella* di Philippi (come ho accennato a p. 32).

[2]) Per una strana coincidenza di nome specifico e di omonimia del descrittore, che voglio qui ricordare per notizia storica, esiste nella letteratura una *C. setifera* O. Fr. Müller 1786, che questo autore descrive a pag. 27 e raffigura nelle fig. 14-16, tav. 19 della sua opera (*Animalcula infusoria* ecc.). Evidentemente non si tratta di una Cercaria, ma di un Protozoo che non mi è riuscito di identificare. Nell'Ehrenberg (Die Infusionthierchen ecc.) non trovo fatto cenno di questa forma fra tutte le specie del O. Fr. Müller che egli riporta; sia da riferirsi ai Protozoi, che da escludersi da questi.

1885. *Cercaria* (*Histrionella*) *echinocerca* Carus, p. 133.
1885. *Cercaria Thaumantiatis* Carus, p. 133.
1885. *Cercaria* (delle Redie in *Cono-mediterraneo* De Filippi) Carus, p. 134.
1886. *Distoma* sp. (della *Phyllirhöe*) Leuckart, p. 88.
1888. *Histrionella setosicaudata* Daday, p. 84, tav. 3, fig. 11, 13.
1888-93. *Cercaria setifera* Monticelli, **1**, p. 195; **2**, p. 78-80; **3**, p. 1 nota, p. 122-125.
1898. *Cercaria elegans* Braun, p. 831.

Questo elenco cronologico delle varie forme di Cercarie marine, con coda fornita di setole, liberamente nuotanti (pelagiche), come di quelle, con o senza coda, ospiti di animali pelagici, ed ancora delle forme giovanili di distomidi, o ritenute per tali dagli A. che le hanno rinvenute su animali pelagici, da riferirsi ed identificarsi — per le ragioni esposte in questo studio — alla *C. setifera* di Joh. Müller, come questa dalle presenti ricerche deve essere intesa ed individuata, non rappresenta una vera e propria enumerazione sinonimica dal punto di vista della sistematica agli effetti della legge di priorità del nome che, per le identificazioni fatte, spetterebbe alla Cercaria marina di Joh. Müller. L'elenco suddetto, non va, quindi, diversamente inteso che come un indice, per ordine di data di ritrovamento e di descrizione, di tutte le forme note, prima e dopo la individualizzazione della Cercaria setifera, fatta da Joh. Müller, che a questa si possono riferire e con essa identificare: ciò allo scopo di comporre una lista di tutte le dette forme che attualmente registra la sistematica dei distomidi. Che se pure alcune delle identificazioni di cui sopra, per la incompleta illustrazione delle forme in esame da parte degli A. (specialmente antichi), possono sembrare non del tutto pienamente giustificate, vagliando questa condizione stessa di cose, in rapporto al fatto che dette forme non sono state più ritrovate appunto per la insufficienza medesima del modo di riconoscerle — cosicchè la loro identificazione riesce assai difficile, se non del tutto impossibile —, a me pare che le rassomiglianze, anche talvolta superficiali ed incerte, che queste forme lasciano riconoscere od intravedere con la *C. setifera* (la meglio nota di tutte), sieno elemento sufficiente a permettere, confortandola, la identificazione con la detta Cercaria; tenuto pur conto del vantaggio, che dalla loro eliminazione può derivare alla sistematica, della quale continuerebbero sempre a costituire una ingombrante zavorra.

Dal passo innanzi citato di Joh. Müller (v. p. 23), si rileva come questi, nel descrivere la Cercaria liberamente nuotante da lui trovata nelle acque di Marsiglia, ricorresse con la mente ad un altro, analogo, assai antico, precedente rinvenimento di una Cercaria caudata liberamente nuotante nel mare (in Danimarca), dovuto ad O. Fr. Müller; ricordando, egli, appunto, come fa, la *Cercaria inquieta* da questo A. trovata « *in aqua marina semel et unicum exemplar* » e descritta e figurata nel **1786** nella sua opera « *Animalcula Infusoria* ecc. » a pag. **121**, tav. **18**, fig. **3-7**. Ciò mi ha fatto nascere il dubbio ed il sospetto che il Joh. Müller avesse potuto pensare, rievocando la detta *Cercaria inquieta*, non solo alla analogia del caso, ma fors'anco ad una possibilità di corrispondenza delle due forme di Cercaria; tantopiù che egli non si ferma a rilevare le differenze della sua Cercaria con coda fornita di setole da quella

di O. Fr. Müller, nè distingue, individualizzandola con un nome proprio, come innanzi ho messo in rilievo, la sua Cercaria di Marsiglia (ciò che ha fatto poi La Valette). Ho voluto, perciò, rendermi conto *de visu* della possibilità, o meno, del dubbio sortomi ed ho consultata la descrizione ed esaminate le figure della *C. inquieta* di O. Fr. Müller. Per vero se non fosse l'assenza di appendici alla coda (setole) che non si riconoscono nelle figure date da questo A., e non sembra verosimile sieno esse per avventura sfuggite all'osservazione del Müller, questa Cercaria nel suo insieme per la forma del corpo e per le macchie oculari ricorda molto (nelle fig. 6-7), a prima giunta, la Cercaria setifera, come questa si presenta a piccolo ingrandimento. E debbo ancora dire che le fig. 3-4, che evidentemente rappresentano la *C. inquieta* nell'atto di nuotare, mi hanno forte colpito per la completa rassomiglianza che in esse ho riconosciuto con quanto ho osservato nella *C. setifera* circa il modo come questa si comporta nei movimenti del nuoto; ciò che la breve ed incisiva descrizione di O. Fr. Müller dei cambiamenti di forma del corpo e dell'agitarsi della coda in moto di *C. inquieta* mi ha confermato.

Questa *Cercaria inquieta* di O. Fr. Müller, che io mi sappia, e per quanto a conferma rilevo da particolari indici bibliografici (Stiles-Hassal, p. 128) non è stata più da altri rinvenuta, nè meglio identificata e descritta da Autori posteriori. Diesing (1, p. 300) enumera la detta Cercaria fra le specie inquirende del genere *Histrionella* Bory (1823) — erroneamente attribuendo al Bory de St. Vincent la specie (*H. inquieta* Bory), che, invece, va rivendicata nel suo nome specifico ad O. Fr. Müller — riportando in sinonimia notizia degli A. che avevano ricordata nelle loro opere la *C. inquieta* di O. Fr. Müller. Lo stesso Diesing registra ancora questa Cercaria così nella Revisione delle Cercarie, come nel Supplemento di questa (3, p. 268), fra le *formae minus cognitae* del genere *Histrionella*: e talora col nome di *C. inquieta*, tal altra con quel di *H. inquieta* tale Cercaria è stata, in seguito, ricordata, o citata dagli Autori posteriori al Diesing.

Come si vede, di questa Cercaria non si ha perciò altra conoscenza che da quanto si ricava dalla descrizione e dalle figure originali di O. Fr. Müller: le quali, come ho accennato, se non confermano il dubbio, certo non escludono del tutto il sospetto (infirmato validamente solo dall'assenza di appendici, o setole alla coda) che la *Cercaria inquieta* di O. Fr. Müller possa essere *unum et idem* con la Cercaria trovata a Marsiglia da Joh. Müller (*C. setifera*); e ciò per le grandi rassomiglianze sopra notate, che difatti non sfuggirono a quest'A., come si legge fra le linee del suo scritto.

La *C. inquieta*, evidentemente, è una di quelle forme che ingombrano la sistematica, e che sarà molto difficile se non del tutto impossibile di identificare, finchè il caso, non presentatosi finora, non farà ritrovare una Cercaria marina liberamente nuotante che corrisponda in tutto e senza lasciar dubbio di altre rassomiglianze alla descrizione ed alle figure di O. Fr. Müller. Ma ciò non è facile per la semplicità, del resto conforme al tempo, della succinta illustrazione di questa Cercaria che non esclude del tutto il dubbio possa essere incompleta, come innanzi accennavo, nella osservazione mancata di appendici alla coda; che è poi il solo carattere che può lasciar dubbio sulla possibile identificazione di *C. inquieta* con *C. setifera*, o meglio, inversamente, di questa con quella in ordine di precedenza per la priorità del nome specifico.

Allo stato, dunque, resta pur troppo, per la epurazione della sistematica delle Cercarie, una questione ancora aperta: se, cioè, la *C. inquieta* di O. Fr. Müller sia una forma propria e distinta dalle altre, o per avventura, sia, invece, da identificarsi con altre; ed in questo caso presumibilmente, per quanto ho detto, con la Cercaria di Marsiglia di Joh. Müller (*C. setifera*, 1850) che passerebbe, per conseguenza, in sinonima di *C. inquieta* O. Fr. Müller (1786).

Napoli, Istituto Zoologico, R. Università.

OPERE CONSULTATE

1910. André J., *Zur Kenntniss des Nervensystems und der Augen von* Polystomun integerrimum: Zeit. Wiss. Z. 95 Bd. p. 191, con figure.

1889-1898. Braun M., *Vermes. Abtheilung Trematoda*; Bronn's Klassen u. Ordnungen d. Tierreich., 4 Bd. Leipzig.

1851. Busch W., *Beobachtungen über Anatomie und Entwicklung einiger wirbellosen Seethiere*: Berlin.

1876. Bütschli O., *Untersuchungen über freilebenden Nematoden und die Gattung* Chaetonotus: Zeit. Wiss. Z. 26 Bd. p. 363, Taf. 23-26.

1885. Carus J. V., *Prodromus Faunae Mediterraneae*: Vol. I, Stuttgart.

1880. Chun C., *Die Ctenophoren des Golfes von Neapel*: Fauna u. Flora d. Golfes Neapel, I. Monographie, Leipzig (Parasiten, p. 243).

1863. Claparède E., *Beobachtungen über Anatomie und Entwicklungsgeschichte Wirbelloser Thiere an der Küste von Normandie angestellt*: Leipzig, 1863.

1859. Cobbold T. S., *Synopsis of Distomidae*: Journ. Linn. Soc. Vol. 13, p. 1, Plt. 10 (estratto).

1864. Costa A., *Di alcuni crostacei degli Acalefi e di un Distomideo parassita*: Rend. Accad. Sc. Napoli, Anno 3, p. 86.

1888. Daday E., *Eine neue Cercaria-form aus dem Golf von Neapel*: Természetrajzi Füzetek, Magyar Nemzeti Museum, Vol. 11, N. 2, p. 84, Taf. 3.

1841. Delle Chiaie S., *Descrizione e Notomia degli animali invertebrati della Sicilia citeriore*: Tomo 3, Napoli.

1855. De Filippi F., **1.** *Deuxième mémoire pour servir à l'histoire génétique des Trématodes*: Mem. Accad. Sc. Torino (2) Tomo 16, p. 419, 2 Tav. (Estratto, 26 pp. 2 tav.) [1].

1857. — **2.** *Troisieme mémoire pour servir à l'histoire génétique des Trématodes*: Mem. Accad. Sc. Torino (2) Tomo 18, p. 201, 3 tav. (Estratto, 26 pp., 2 tav.).

1850. Diesing. C. M., **1.** *Systema Helminthum*: Vindobonae, Vol. I.

1855. — **2.** *Revision der Cercarie*: Sitzungsb. Akad. Wien, 15 Bd. p. 239.

1858. — **3.** *Berichtigungen und Zusätze zur Revision der Cercarien*: Sitzungsb. Akad. Wien, 31 Bd. p. 269.

1858. — **4.** *Revision der Mhyzhelminthen-Abtheilung Trematoden*: Sitzungsb. Akad. Wien, 32 Bd. p. 307, 2 Taf.

1859. — **5.** *Nachtrage und Verbesserungen zur Revision der Myzhelminthen*: Sitzungsb. Akad. Wien, 35 Bd. p. 421.

1882. Fewkes J. W., *A Cercaria with Caudal Setae*: Amer. Journ. Sc. (3) Vol. 23, p. 134, con figura.

[1]) NB. Nel testo la citazione delle pagine di queste due memorie del De Filippi si riferisce agli estratti, che hanno paginazione propria.

1858. Graeffe E., *Beobachtungen über Radiaten und Würmer in Nizza*: Denk. Schweiz. Natur. Ges. Zurich, 17 Bd. (Estratto, 59 pp., 10 Taf.).

1849. Kölliker A., *Zwei neue Distomen*: Distoma pelagiae *und* D. Okenii: Bericht. Z. Zool. Anst. Würzburg, 1847-48, p. 52, Taf. 2, fig. 5-6.

1855. La Valette St. George A., *Symbole ad Trematodum evolutionis historiam*: Berolini.

1873. Lankster E. Ray, *Summary of Zoologicals observations made at Naples in the winter 1871-72*: Ann. Mag. Nat. Hist. (4) Vol. 11, p. 81.

1911. Lebour Marie V., *A review of the british Marine Cercarie*: Parasitology, Vol. 4, N. 4, p. 416, Plt. 25-29.

1886. Leuckart R., *Die Parasiten des Menschen*: Zweite Auflag. 2 Bd. (Trematoden), 3 Lief. Leipzig.

1858. Leuckart R. — Pagenstecher A., *Untersuchungen über niedere Seethiere*: Muller's Arch. Anat. Phys., p. 558, Taf. 18-23.

1878. Linstow O., *Compendium der Helminthologie*: Hannover.

1898. Linton Ed., *Notes on Trematode parasites of Fishes*: Proc. U. S. Nat. Museum, Vol. 20, p. 507, Plt. 40-54.

1899. Lo Bianco S., 1. *Notizie biologiche riguardanti specialmente il periodo di maturità sessuale degli animali del Golfo di Napoli*: Mitth. Z. Stat. Neapel, 13 Bd. p. 448.

1909. — 2. *Idem*: Ibid., 19 Bd. p. 513.

1901. Looss A., 1. *Ueber einiger Distomen der Labriden des Triester Hafens*: Centralbl. Bakt. Parasit. Orig. 29 Bd., p. 398.

1902. — 2. *Zur Kenntniss der Trematodenfauna des Triester Hafens. — I. Ueber die Gattung* Orophocotyle *n. g.*: Centralbl. Bakt. Parasit. Orig. 31 Bd. p. 637, 4 fig.

1888. Monticelli Fr. Sav., 1. *Sulla* Cercaria setifera *Müller.—Breve nota preliminare*: Boll. Soc. Nat. Napoli, Vol. 2, p. 193.

1898. — 2. *Saggio di una Morfologia dei Trematodi. Tesi di privata docenza*: Napoli Stamperia Fll. Ferrante.

1893. — 3. *Studii su i Trematodi endoparassiti.—Primo contributo di osservazioni sui Distomidi*: Z. Jahrb. Suppl. 3., 230 pp., 8 Tav.

1850. Müller Jh., *Ueber eine eigenthümliche Würmlarve aus der Classe der Turbellarien und aus der Familie der Planarien*: Arch. Anat. Phys. Jahrg. 1850, p. 485.

1786. Müller O. Fr., *Animalcula infusoria, fluviatilia et marina, quae detexit, systematice descripsit et ad vivum delineari curavit. Opus posth.*: Hafniae et Lipsiae, 1786. (V. pure: Journal de l'Institut, 1852, p. 62).

1905. Odhner T., 1. *Die Trematoden des Arktischen Gebietes*: Fauna Artica, 4 Bd., 2 Lief. Fischer, Jena.

1911. — 2. *Zum naturlichen System der digenen Trematoden III.*: Z. Anz. 38 Bd., p. 97.

1911. — 3. *Zum naturlichen System der digenen Trematoden IV.*: Z. Anz. 38 Bd., p. 513.

1906. Pelsner P., *Trematodes parasites des Mollusques marins*: Bull. Sc. France Belgique, Tome 40, p. 161, Plc. 8-12.

1843. Philippi ..., *Ueber den Bau der Physophoren und eine neue Art derselben* (Physophora tetrasticha): Muller's Arch. Anat. Phys. Jahrg. 1843, p. 58, Taf. 5.

1909. Pratt S., *The cuticula and subcuticula of the Trematodes and Cestodes*: Amer. Natur., Vol. 43, p. 705.

1906. Roewer C. Fr., *Beiträge zur Histogenese von* Cercariaeum helicis: Jena Zeit. Naturwiss. 41 Bd. p. 185, Taf. 14-15.

1906. Rosbach E., *Beiträge zur Anatomie und Entwicklungsgeschichte der Redien*: Zeit. Wiss. Z., 84 Bd. p. 361, Taf. 16-19.

1885. Schwarze W., *Die postembrionale Entwicklung der Trematoden*: Zeit. Wiss. Z., 43 Bd. p. 41, Taf. 3.

1904. Sinitzin Th., *Ueber einige neue und wenig bekannte Organe der digenetischen Trematoden*: Z. Anz. 27 Bd., p. 767.

1908. Stiles C. — Hassal A., *Index Catalogue of Medical and Veterinary Zoology. — Trematoda and Trematoda disease*: Hygienic Lab., Bull. N. 37, U. S. A. Treasury Department, Washington, 1908.

1890. Stossich M., *Brani di Elmintologia tergestina*: Boll. Soc. Adriatica Sc. Nat. Vol. 12 (Estratto 9 pp., Tav. 15-16).

1878. Studer T., *Ueber Siphonophoren des Tiefen Wasser*: Zeit. Wiss. Z., 31 Bd. p. 1, Taf. 1-3.

1875. Villot A., *Trematodes endoparasites marins*: Ann. Sc. Nat. (6) Tome 8, 40 pp., Plt. 5-10.

1853. Vogt C., *Recherches sur les animaux inferieurs de la Mediterrance*: I. Memoire.— *Sur les Siphonophores de la mer de Nice*: Mem. Inst. Genevois, Tome 1, 163 pp., Plc. 21.

1848. — *Ocean und Mittelmeer-Reisebriefe*: 2 Bd., Frankfurt a/M [1]).

1844. Will J., *Ueber* Distoma beröes: Arch. Naturg., 10 Jahr. 1 Bd. p. 343, Taf. 10.

---

[1]) Cito dal Linstow perchè non ho potuto procurarmi questa opera.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE 1-5

Lettere comune a tutte le figure delle tavole.

ac, aculei.
acd, attacco della coda.
ai, arco dell'intestino.
apg, apertura genitale.
b, bocca.
bi, braccia intestinali.
btse, bulbo terminale del sistema escretore.
c, cervello.
cd, coda della Cercaria.
cead, anse discendenti dei grossi canali escretori laterali.
ceba, braccia anteriori » » » » »
cebp, braccia posteriori » » » » »
cer, Cercarie in via di sviluppo.
cesb, sbocco del tratto impari dei tronchi comuni dei grossi canali escretori nella vescicola terminale.
cetc, tronchi comuni dei grossi canali escretori.
ceti, tratto impari dei tronchi comuni dei grossi canali escretori.
cmn, commessura nervosa.
cn, cellule nervose.
cp, corpo della Cercaria.
cpc, capsula pigmentaria del cristallino.
cr, cristallino.
cse, canalicoli del sistema escretore.
cst, ciuffo di setole.
df, deferente.
e, esofago.
ec, ectoderma.
epe, epitelio di rivestimento della vescicola terminale del sistema escretore.
epi, epitelio intestinale.
f, faringe.
fc, forame codale.
fv, fiamma di ciglia vibratili.
glc, gangli laterali del cervello.
iep, infossamento ectodermico posteriore del corpo in fondo al quale si apre il forame codale.
ibv, imbuto terminale a fiocco di ciglia vibranti dei canalicoli del sistema escretore.
m, mesenchima.
mc, muscoli circolari.

mdv, muscoli dorso-ventrali.
miep, muscoli raggianti dell'infossamento ectodermico posteriore del corpo.
ml, muscoli longitudinali.
mbe, membrana basale dell'ectoderma.
mpa, macchia pigmentaria anteriore.
mr, muscoli radiali.
n, nuclei.
nai, nervi anteriori.
nlc, nervi laterali anteriori ricorrenti.
nlve, nervi posteriori laterali ventrali esterni.
nlvi, nervi » » » interni.
ov, ovario.
ovd, ovidutto.
pf, prefaringe.
pg, pigmento.
sfo, sfintere ovarico.
sfr, sferule rifrangenti.
sir, sacco intestinale delle Redie.
t, testicoli.
Va, ventosa anteriore.
vtse, vescicola terminale del sistema escretore.
Vp, ventosa posteriore.
vtlg, vitellogeni.

Tutte le figure — eccetto le Fig. 1, 6, 8, 33, 36, 39, 44, 50, 53 eseguite a mano libera — sono state ritratte con la camera chiara Abbe: tavolino di disegno all'altezza di quello del Microscopio. Sistemi adoperati: Zeiss e Koristka.

Gl'ingrandimenti apposti alle figure sono quelli reali approssimativamente calcolati.

Tavola 1.

Fig. 1-4. Diversi aspetti, ritratti dal vivo, a luce diretta della *Cercaria setifera* con e senza coda: questi ultimi (Fig. 2-4) in diverso stato di distensione o contrazione. del corpo. $\times$ 12 circa.

Fig. 5. Mostra una *Cercaria setifera* ospite di *Carmarina hastata* racchiusa in una sorta di capsula o cisti: dal vivo, alquanto ingrandita.

Fig. 6. Figura d'insieme della *Cercaria setifera* senza coda, in distensione: ritratta dal vivo col microscopio. $\times$ 50.

Fig. 7. Figura d'insieme di altro individuo con coda, ma in contrazione: ritratta come la precedente. $\times$ 50.

In entrambe le figure 6 e 7 si scorge per trasparenza tutta la organizzazione generale della *Cercaria setifera* nelle sue caratteristiche proprie.

Fig. 8. Estremità anteriore di un individuo alquanto schiacchiato: dal vivo. $\times$ 200.

Fig. 9. Sezione ottica longitudinale del rivestimento cutaneo ritratto a fresco da individuo schiacciato col compressore. $\times$ 600.

Fig. 10. Aspetto del rivestimento cutaneo visto di superficie da un preparato a fresco per schiacciamento. $\times$ 600.

Fig. 11. Porzione basale di attacco alla coda di un ciuffo delle appendici (setole) codali. $\times$ 200.

Fig. 12. Una setola isolata distaccata dalla base. $\times$ 180.

Fig. 13. Ammasso di pigmento delle macchie oculari laterali anteriori che circondano il corpo rifrangente (cristallino): da un preparato a fresco per schiacciamento. $\times$ 180.

Fig. 14. Cristallino circondato dalla capsula di pigmento: da un preparato a fresco per schiacciamento. × 395.

Fig. 15. Figura d'insieme di tutta la organizzazione della *Cercaria setifera:* da un individuo preparato in toto (colorazione col carminio boracico). × 120.

Fig. 16. Un tratto marginale di coda esaminato a fresco, da un preparato per schiacciamento, per lasciar vedere come i ciuffi di setole s'impiantano lungo i lati di essa. Si scorge distinta la striatura trasversale della coda, quale si vede nelle Fig. 7 e 17. × 150.

Fig. 17. Estremità posteriore di un individuo preparato in toto, visto dal ventre, che lascia scorgere il modo come la coda si inserisce dorsalmente al corpo della Cercaria (colorazione con carminio boracico). × 120.

Fig. 18. Una *Redia* della *Cercaria setifera* proveniente da *Conus mediterraneus* contenente Cercarie in formazione: ritratta dal vivo da un preparato a fresco. × 70.

Fig. 19-22. Diversi aspetti che assume la estremità anteriore delle dette Redie ritratti da preparati a fresco (Fig. 19. × 70, Fig. 20-22. × 140).

Fig. 23. Altra *Redia* molto giovane nella quale non si è ancora iniziata la produzione delle Cercarie. × 70.

Fig. 24-27. Quattro stadii diversi dello sviluppo di una Cercaria: in essi si segue il modo come si va gradualmente disegnando ed individualizzando la coda: figure ritratte dal vivo. × 300 circa.

Fig. 28. Uno stadio più avanzato dei precedenti nello sviluppo della Cercaria nel quale si scorgono già bene appariscenti le ventose e l'apparato digerente nel suo disegno generale: la coda incomincia ad allungarsi, ma non ha ancora acquistato i ciuffi di setole. × 350.

Fig. 29. Una giovane *Cercaria setifera* al completo nella organizzazione generale e nell'aspetto della coda, in via di raggiungere le ordinarie dimensioni ed il definitivo aspetto organico dello stadîo di Cercaria a termine che rivelano le Fig. 6-7. Figura ritratta anche essa dal vivo da un preparato leggermente schiacciato. × 400 circa.

Fig. 30. Alcune setole della coda del medesimo individuo isolate, staccatesi dalla base del proprio ciuffo: a fresco, fortemente ingrandite.

Tavola 2.

Fig. 31. Sezione longitudinale, dorso-ventrale di una Cercaria (colorazione col paracarminio). × 200.

Fig. 32. Faringe ritratta da un esemplare preparato a fresco per schiacciamento. × 350.

Fig. 33. Figura d'insieme di tutta la organizzazione della *Cercaria setifera* ricavata da varii preparati a fresco e dal vivo; ricostruita sullo schema di un esemplare esaminato a fresco moltissimo compresso, nel quale si scorgeva il comportamento del sistema escretore nel suo aspetto generale. Questo è stato completato, nella figura, da osservazioni singole e parziali desunte da altri individui anch'essi esaminati a fresco sotto forte compressione. La disposizione del sistema nervoso è in massima parte la ricostruzione di ciò che si ricava dalle sezioni (Tav. 5, fig. 84, 85, 92). × 150.

Fig. 34. Estremità anteriore di altro individuo: da un preparato a fresco. × 120.

Fig. 35. Modo come scoppiano, sotto compressione, le sferule rifrangenti contenute nella vescicola terminale del sistema escretore. × 400.

Fig. 36-37. Due gruppi di canalicoli terminali ad imbuti cigliati: visti a molto forte ingrandimento da un preparato a fresco moltissimo compresso.

Fig. 38-39. Due tratti di uno dei grossi canali del sistema escretore, con ciuffi vibranti lungo le pareti, fortemente ingranditi.

Fig. 40. Un tratto di grosso canale del sistema escretore che presenta un ernia laterale contenente una sferula rifrangente, ritratto a fresco: fortemente ingrandita.

Fig. 41. Parte terminale dell'apparato escretore e suo sbocco all'esterno nella estremità posteriore del corpo: vista dal ventre e spostata verso il dorso per la compressione: da un preparato a fresco. × 35.

Fig. 42. Altro aspetto della suddetta parte, vista dal dorso e spostata verso il ventre: ritratta come sopra. × 300.

Fig. 43. Estremità posteriore del corpo di un individuo esaminato dal dorso, a fresco, per compressione, che lascia vedere la parte terminale dell'apparecchio escretore in posizione normale: si scorge ben distinto l'infossamento ectodermico, nel quale si apre il forame codale, lo sbocco in questo del bulbo terminale, e come in esso mette capo la estremità della vescicola terminale, nonchè l'immissione (dal dorso), nella detta vescicola, del tronco impari, derivante dai tronchi comuni dei grossi canali laterali del sistema escretore. × 300.

Fig. 44. Aspetto caratteristico, per stiramento, assunto dalla vescicola codale di un individuo in grande estensione (da uno schizzo inedito del Prof. A. Costa). × 300.

Fig. 45. Un tratto di un braccio intestinale esaminato a fresco da un preparato molto compresso. × 375 circa.

Fig. 46. Metà posteriore del corpo di un individuo visto di sbieco da preparato in toto: si scorgono già distinti gli abbozzi degli organi genitali e dei condotti escretori di questi (colorazione con carminio boracico). × 180.

Fig. 47. Metà posteriore del corpo di altro esemplare visto di fronte: gli abbozzi dei genitali sono meglio definiti e si è integrato del tutto il condotto genitale (ovidutto) femminile, che raggiunge il punto del suo sbocco all'esterno (colorazione c. s.). × 180.

Tavola 3.

Fig. 48. Sezione trasversale della parte periferica del corpo e del rivestimento cutaneo (trattamento con ematosillina ferrica). × 700.

Fig. 49. Sezione ottica longitudinale del rivestimento cutaneo di un esemplare preparato in toto (colorazione con carminio boracico). × 700.

Fig. 50. Sezione ottica del faringe di un esemplare esaminato a fresco per schiacciamento. × 230.

Fig. 51. Mostra come si attacca al corpo la coda nella sua inserzione dorsale, da un preparato in toto colorato con paracarminio. × 360.

Fig. 52. Sezione tangenziale dell'ectoderma sfiorante la superficie, alquanto obliqua (trattamento con ematosillina ferrica). × 1220.

Fig. 53. Alcune cellule del mesenchima fortemente ingrandite, come si mostrano in un preparato a fresco per schiacciamento.

Fig. 54. Sezione obliqua subtangenziale di una delle braccia intestinali (trattamento con ematosillina ferrica). × 670.

Fig. 55. Sezione longitudinale (frontale) della coda sfiorante la muscolatura (trattamento c. s.). × 900.

Fig. 56. Altra sezione della coda come sopra (trattamento c. s.). × 900.

Fig. 57. Una fibra muscolare di quelle rappresentate delle figure precedenti fortemente ingrandita.

Fig. 58. Sezioni trasversali ed oblique delle dette fibre a molto forte ingrandimento.

Fig. 59. Un altra sezione, frontale obliqua della coda per lasciar vedere il comportamento generale della muscolatura (colorazione con paracarminio). × 360.

Fig. 60. Altra sezione come sopra della coda (trattamento con ematosillina ferrica). × 550.

Fig. 61. Un tratto di coda ritratto da un preparato in toto per mostrare il decorso della muscolatura (colorazione con paracarminio). × 500.

Fig. 62. Sezione dorso-ventrale di un esemplare alquanto contratto (trattamento con ematosillina ferrica). × 330.

TAVOLA 4.

Fig. 63-70. Una serie successiva quasi continua (mancano solo una o due sezioni fra ciascuna di quelle disegnate) dell'estremità posteriore del corpo per lasciar vedere la caratteristica struttura del bulbo terminale del sistema escretore e la origine da questo della vescicola escretoria terminale (colorazione con emallume). × 600.

Fig. 71. Sezione trasverso-obliqua di una Cercaria, che taglia quasi tangenzialmente la vescicola escretoria terminale. × 360.

Fig. 72. Altra sezione come la precedente che la completa e conforta nel dimostrare la fine struttura di detta vescicola (colorazione con paracarminio). × 360.

Fig. 73. Sezione trasversa obliqua della estremità posteriore che taglia di sbieco, subtangenzialmente l'infossamento ectodermico posteriore del corpo (trattamento con l'ematosillina ferrica). × 600.

Fig. 74. Altra sezione alquanto più in alto verso il fondo del bulbo terminale (colorazione con emallume). × 600.

Fig. 75-79. Una serie consecutiva di sezioni che valgono a dimostrare l'originarsi della vescicola escretoria dal bulbo terminale e lo sbocco dorsalmente alla vescicola, poco oltre la sua origine dal bulbo, del tratto impari dei tronchi comuni dei grossi canali del sistema escretore (colorazione con emallume). × 600.

Fig. 80-82. Sezioni trasversali della stessa serie che tagliano più in alto la vescicola escretoria terminale (colorazione c. s.). × 600.

Fig. 83. Sezione longitudinale della vescicola escretoria terminale (colorazione con paracarminio). × 600.

TAVOLA 5.

Fig. 84. Sezione latero-frontale della parte anteriore del corpo di una Cercaria che interessa il cervello e dimostra l'origine dei nervi che da esso si spiccano (colorazione con emallume). × 600.

Fig. 85. Sezione trasversale all'altezza del faringe che interessa il sistema nervoso centrale (cervello) nel suo tratto che abbraccia dorsalmente il faringe (trattamento con ematosillina ferrica). × 500.

Fig. 86. Parte dorso-laterale di una sezione trasversale condotta all'altezza del faringe che mette in mostra la lente cristallina (colorazione con emallume). × 560.

Fig. 87-91. Sezioni trasverso-oblique condotte dorso-ventralmente all'altezza dei genitali (colorazione con paracarminio). × 200.

Fig. 92. Sezione frontale della parte anteriore del corpo che interessa i gangli laterali del sistema nervoso (colorazione con carminio boracico). × 280.

Fig. 93. Sezione trasversale all'altezza della ventosa posteriore (colorazione con carminio boracico). × 310.

Fig. 94-95. Parte di sezioni trasversali che interessano l'ovario, i testicoli ed i condotti genitali, ritratte a maggiore ingrandimento (colorazione con paracarminio). × 600.

finito di stampare il dì 24 Gennaio 1914

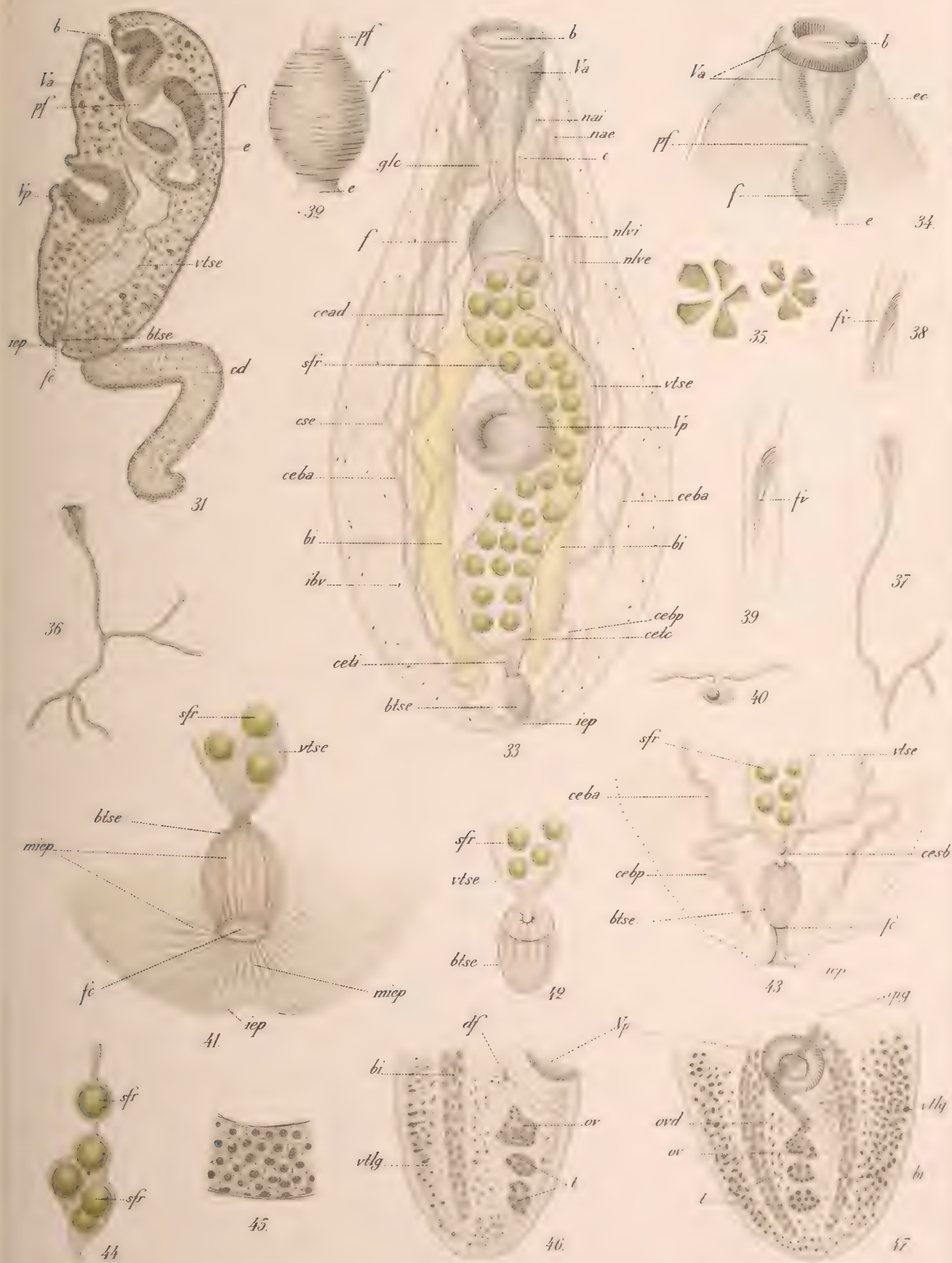
ERRATA-CORRIGE

p. 2, linea 1,	(essendo	, essendo
» » » 20,	che, invece	ed invece
» » » 39,	(**2**, p. 2, nota)	(**3**, p. 2, nota)
» 3, » 3,	(**2**, p. 1 e p. 124, nota)	(**3**, p. 1 e p. 124, nota)
» 8, » 3,	la coda si elevano	dalla coda si elevano
» 15, » 37,	dell'argomento	sull'argomento
» 17, » 26,	l'altro materiale	altro materiale
» 22, » 22,	*Olindias Müllerii*	*Olindias Mülleri*
» 23, » 31,	Beroes	Beröes
» 30, » 10	della nota, non privo	non priva
» 35, » 5,	en unseul	en un seul
» 35, » 4	della nota, *C. setifera* Monticelli, 1888, p. 193, 195 = *C.*	1888, p. 193, 195, p. p. = *C.*
» 37, » 17,	*Cercariarum*	*Cercariaeum*

Lit. Tacchinardi e Ferrari Pavia

Lit. Zacchinardi e Ferrari, Parma

Lit. Tocchinardi e Ferrari Parma

Lit. Tacchinardi e Ferrari Pavia

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

APPENDICE
ALLA MINERALOGIA VESUVIANA

MEMORIA

del s. c. FERRUCCIO ZAMBONINI

presentata nell' adunanza del dì 6 Luglio 1912

Il Monte Somma ed il Vesuvio riserbano continue e gradite sorprese al mineralista che con amore studia i loro prodotti. Grazie alla cortese benevolenza del mio amico e collega Prof. Eugenio Scacchi, io ho potuto, anche dopo la mia partenza da Napoli, continuare ad osservare, ad intervalli, i minerali vesuviani che pervengono al Museo Mineralogico della R. Università di Napoli, e mi è stato, così, possibile di aumentare in modo notevole le conoscenze che si possedevano intorno ad alcuni di essi, e nello stesso tempo trovarne anche di nuovi per il nostro vulcano. È così che nella presente Appendice alla mia *Mineralogia vesuviana*, io dimostro per la prima volta l'esistenza, al Monte Somma od al Vesuvio, di ben cinque minerali, e, cioè, la baddeleyite, l'idrargillite, la cancrinite, la perowskite e l'alunite, e faccio conoscere un nuovo ed importante minerale, la rivaite, che ho dedicato ad un caro e valoroso scomparso, Carlo Riva, che amò intensamente ed illustrò da par suo questa terra, mirabile per la sua singolare bellezza e per la grandiosità e l'importanza dei fenomeni che offre allo studioso della Natura.

Prima di passare ad occuparmi partitamente dei singoli minerali vesuviani che hanno più specialmente richiamato la mia attenzione in questi ultimi due anni, credo opportuno intrattenermi alquanto su un notevole blocco di sanidinite, che offre un certo interesse per lo studio della genesi di alcuni minerali del Monte Somma.

Nella sanidinite in questione si osservano parecchi inclusi, due dei quali sono rappresentati dalle Fig. 1 e 2, che riproducono appunto due frammenti del blocco di sanidinite. Che si tratti effettivamente di inclusi e non di segregazioni della sanidinite, risulta in modo evidente dal semplice esame delle figure, le quali fanno vedere

come questi inclusi si presentino con contorno nettamente delimitato, e talvolta anche in parte distaccati dalla sanidinite involgente, in modo perfettamente identico agli inclusi di calcare metamorfizzato che si rinvengono nel tufo campano. Tra gli inclusi e la sanidinite è avvenuta senza dubbio una reazione, come risulta dal

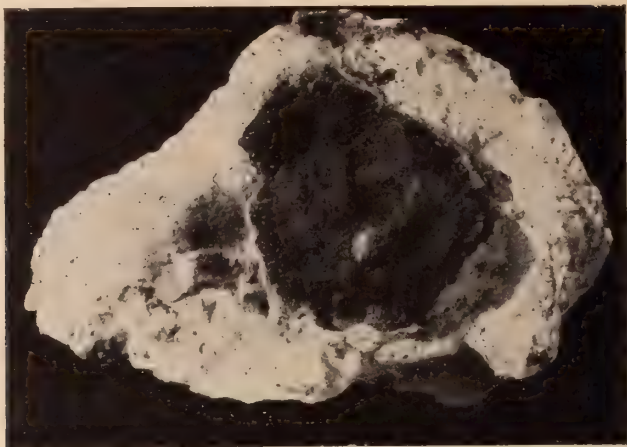



Fig. 1.

fatto che, in vicinanza degli inclusi stessi, la sanidinite presenta caratteri molto diversi da quelli normali, perchè la struttura, infatti, cambia, diventando assai più minuta e distintamente conformata a palizzata, ed inoltre in quest'orlo a palizzata,

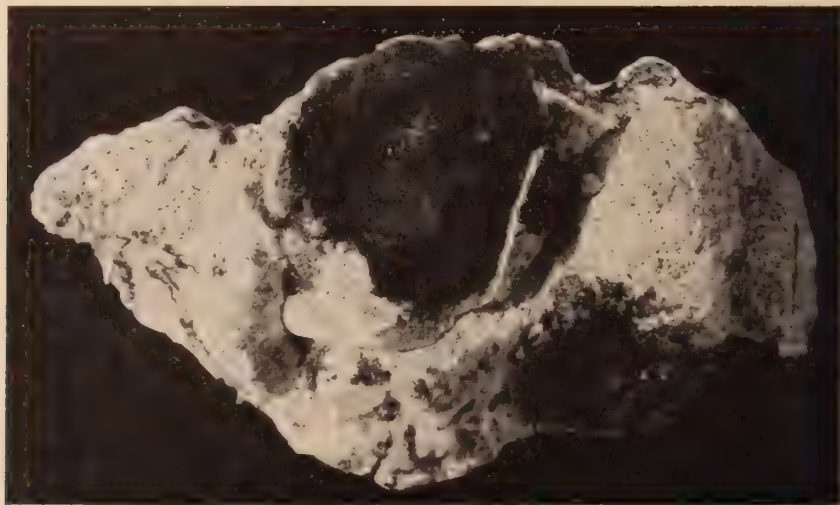



Fig. 2.

che ha uno spessore variabile da 3 a 4 mm., ma che può estendersi anche molto di più, si rinviene dell'augite verdastra, della mica ed anche, in qualche punto, dell'idocrasio.

La parte degli inclusi che giunge in contatto con la sanidinite è formata da

augite verdastra, ora quasi sola, ora commista prevalentemente ad un po' di idocrasio, talvolta in forma di nitidi cristalli: la massa interna dell'incluso si compone principalmente di mica, nella quale si trovano dei cristallini di anfibolo nero, alcuni dei quali misurano fino 6-7 mm. secondo l'asse *c*. In uno degli inclusi, di piccole dimensioni, l'orlo pirossenico è più esteso del solito, e nella sua parte centrale è occupato dal sanidino.

Gli inclusi descritti somigliano moltissimo a dei riempimenti geodici dei blocchi calcarei: specialmente notevole, sotto questo punto di vista, è la zona pirossenica che li circonda, perfettamente corrispondente a quella che costituisce la parete delle geodi dei blocchi calcarei. È certo che, trovando quegli inclusi isolati nei tufi del Somma, li si riferirebbero senz'altro ai noti riempimenti di geodi dei blocchi calcarei, divenuti liberi per essere stato disciolto il carbonato di calcio. Le osservazioni riferite mostrano, invece, che essi possono essere del tutto indipendenti dai blocchi calcarei, e trovarsi, invece, legati alle sanidiniti.

FLUORITE

L'unica forma osservata da A. Scacchi e da me in questo minerale è l'ottaedro }111{. In alcuni punti del blocco di sanidinite nel quale ho rinvenuto la baddeleyite (vedasi a pag. 5) ho trovato dei cristallini di fluorite presentanti la combinazione }111{ }100{. L'ottaedro domina fortemente, mentre il cubo ha piccole facce, in alcuni cristalli conformate a tramoggia, in altri, invece, piane e regolari.

CLOROCALCITE

Nella *Mineralogia vesuviana* (pag. 50) io ho mostrato che la clorocalcite è un composto definito $KCaCl_3$ e non, come generalmente si trova indicato nella letteratura, in base agli studî di Arcangelo Scacchi, cloruro di calcio od una soluzione solida di questo con i cloruri alcalini.

Lo scorso anno i miei risultati furono confermati da O. Menge [1], il quale, mediante l'analisi termica del sistema $KCl — CaCl_2$, accertò l'esistenza del composto $KCaCl_3$. Nei suoi preparati, però, il Menge trovò i cristalli di $KCaCl_3$ costantemente birifrangenti, mentre la clorocalcite è stata rinvenuta in forme apparentemente cubiche, con sfaldatura secondo tre direzioni normali tra loro. L'anisotropia della clorocalcite è stata constatata anche da O. Renner [2]) nel materiale della salina Desdemona.

Già nella *Mineralogia vesuviana* io avevo osservato che il cristallo analizzato presentava un habitus rombico assai spiccato, ma i pochi frammentini che potei esaminare al microscopio, e che con grandissima rapidità si trasformarono in goccioline, data la loro igroscopicità, mi sembrarono sensibilmente isotropi. Nella colle-

---

[1]) Zeitsch. für anorg. Chemie, 1911, LXXII, 197.

[2]) Centralbl. für. Min. Geol. etc., 1912, pag. 106. Il Renner, ignorando le mie ricerche, aveva creduto di avere a che a fare con un nuovo minerale, che egli propose di chiamare baeumlerite, ma io ho già dimostrato (Centralblatt für Min. Geol. etc., 1912, pag. 270) l'identità della baeumlerite con la clorocalcite.

zione mineralogica della Università di Palermo io ho trovato un campione di clorocalcite, donato da A. Scacchi, conservato in un tubo chiuso. Con questo materiale io ho eseguito alcune nuove osservazioni, che comunico qui brevemente.

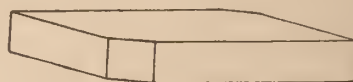
I cristalli di clorocalcite ora studiati si distinguono nettamente da quelli che ebbi occasione di esaminare quando compilai la *Mineralogia vesuviana*, non soltanto per le loro dimensioni minori (non superano, in genere, i 3 millimetri), ma anche per il fatto che essi sono, per lo più, bianchi ed opachi, mentre i primi erano di colore roseo o gialliccio chiarissimo, e semitrasparenti. Una gran parte dei cristalli rinvenuti qui a Palermo ha il solito aspetto cubico, già descritto da A. Scacchi, mentre altri sono allungati secondo un asse quaternario, in modo da simulare la combinazione tetragonale }100{ }001{.

In alcuni cristallini molto rari ho osservato qualche faccia di }110{, e questi sono veramente interessanti, perchè il loro habitus è ben diverso da quello dei cristalli appartenenti al sistema cubico. Due di questi cristalli sono rappresentati dalle Fig. 3-4. Il primo potrebbe essere considerato come la combinazione rombica }100{ }010{ }011{ e l'altro come la combinazione }001{ }110{ }100{.

Fig. 3.

Questi due cristallini sono stati protetti contro l'umidità dell'aria mediante una soluzione etereo-acetonica di gomma gutta, e misurati. I valori angolari trovati concordano perfettamente con quelli teorici del sistema cubico, sicchè è certo che se la clorocalcite non è cubica, le sue costanti cristallografiche non possono differire che di pochissimo da quelle dei cristalli cubici.

Fig. 4.

Frantumando dei cristallini fra due porta-oggetti, ed esaminando al microscopio polarizzatore le lamine di sfaldatura ottenute, si scorge subito come esse non presentino struttura omogenea: al contrario, vi sono parti a birifrazione debole, associate ad altre a birifrazione notevolmente più forte. Estinzione completa della lamina non si ha mai, e le parti più debolmente birifrangenti presentano estinzione ondulata ed imperfetta.

In molte lamine si vedono, specialmente verso l'orlo esterno, plaghe pressochè isotrope. Benchè raramente, capita anche di rinvenire dei frammentini del minerale quasi isotropi. La fortissima igroscopicità della clorocalcite rende pressochè impossibili osservazioni precise, perchè le laminette si coprono di goccioline con grande rapidità. Estinzione parallela rispetto agli spigoli del pseudocubo non ne ho mai osservata: invece, spesso ho potuto constatare che le direzioni di massima estinzione sono fortemente inclinate sugli spigoli anzidetti.

Siccome erano ancora in mio possesso due cristalli identici a quello analizzato, ma meno puri, ho creduto opportuno di eseguire su di essi qualche osservazione. Ho, così, potuto notare che le tre direzioni di sfaldatura perpendicolari tra loro non possiedono lo stesso grado di perfezione, ma, al contrario, una di esse è notevolmente più facile e perfetta delle altre due. Se si frantumano dei pezzetti del minerale fra due vetrini, e si esaminano i frammentini sottili al microscopio, se ne scor-

gono parecchi che si comportano come una sostanza isotropa: esaminando, invece, delle lamine di sfaldatura più spesse, l'anisotropia della clorocalcite risulta evidentissima in tutti i casi. Con debole ingrandimento, in tutte le lamine di sfaldatura ho osservato una parte centrale, molto estesa, a struttura apparentemente omogenea, che presenta estinzione netta, parallelamente agli spigoli del pseudocubo, mentre tutta la parte esterna possiede una struttura polisintetica finissima, molto somigliante a quella della leucite vesuviana del 1855, tagliata parallelamente ad una faccia di cubo, ed illustrata da Hans Hauswaldt nella Fig. 2, Tav. 49 della nuova serie delle sue *Interferenz-Erscheinungen im polarisirten Licht* (Magdeburg 1904). Le linee di contatto delle varie lamelle polisintetiche sono sempre parallele ad uno degli spigoli del pseudocubo. L'omogeneità della parte centrale delle sezioni è, però, soltanto apparente: con ingrandimento più forte, si scorge subito, a nicol incrociati, la sua struttura polisintetica.

In luce convergente è facile riconoscere che la clorocalcite è biassica: sembra che il piano degli assi ottici sia parallelo ad una delle facce del pseudocubo. La mancanza di sufficiente materiale e la sua igroscopicità non ha permesso altre osservazioni più precise.

La clorocalcite è, in base a quanto si è detto, da considerarsi come un minerale spiccatamente pseudocubico, probabilmente appartenente al sistema rombico.

BROOKITE

H. J. L. Vogt (Zeitsch. für pr. Geologie, 1895, III, 483) ha posto tra i prodotti diretti di sublimazione e gli altri che hanno origine pneumatolitica più complessa, particolarmente studiati al Vesuvio, anche la brookite. Questo minerale, però, non è stato, finora, trovato nè al Vesuvio, nè al Monte Somma: probabilmente per una svista, il Vogt ha citato la brookite invece della pseudobrookite, rinvenuta effettivamente al Vesuvio dal Krenner.

BADDELEYITE

Questo raro ed interessante minerale, che costituisce la fase monoclina, naturale del biossido di zirconio, è stato da me osservato per la prima volta in una sanidinite del Monte Somma lo scorso anno [1]. Il rinvenimento della baddeleyite in una sanidinite presenta una notevole importanza, non soltanto perchè finora quel minerale non era stato mai trovato nei blocchi rigettati dai vulcani, ma anche perchè, come costituente di rocce, sembrava limitato ai magmi poveri in silicio, mentre invece le sanidiniti sono molto ricche in questo elemento. Finora, infatti, la baddeleyite si era osservata nelle sabbie provenienti dal disfacimento della jacupirangite del fiume Jacupiranga (E. Hussak) [2], in quelle, ricche in pietre preziose, di Rakvana nell'isola di Ceylon (L. Fletcher) [3], nelle segregazioni oli-

---

[1]) Una breve Nota preliminare in proposito comparve nei Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, 1911, 2° sem. pag. 129.

[2]) Tschermak's min. petr. Mitth., 1895, XIV, 395.

[3]) Mineral. Magaz., 1894, X, 148.

vino-magnetitiche della sienite eleolitica di Alnö (E. Hussak) [1]), e, finalmente, pochi mesi or sono, in una sienite corindonifera con aspetto gneissico, dello stato di Montana (A. F. Rogers) [2]).

La sanidinite del Monte Somma nella quale si è trovata la baddeleyite presenta dei caratteri particolari, che la fanno facilmente distinguere dalle altre che spesso si rinvengono nei tufi del Monte Somma. La sanidinite in questione, composta di sanidino abbondantissimo, di nefelina tipica col suo solito aspetto, di anfibolo, di biotite, di fluorite, di ortite, è particolarmente ricca in magnetite ed in zircone, che non ha il solito colore azzurrastro, che è quasi costante nello zircone vesuviano, ma si presenta, invece, quasi sempre di colore verde chiaro o giallo-verdastro. Nella sanidinite si aprono numerose geodi, con le pareti tappezzate da cristalli bellissimi dei minerali ricordati, ed anche di baddeleyite e di pirrite.

La baddaleyite si rinviene sotto forma di cristallini tabulari molto piccoli, isolati ovvero raggruppati in fascettini, impiantati, di solito, sui cristalli di sanidino, quasi esclusivamente sulle facce del pinacoide }010{, e solo molto raramente su quelli di magnetite. I cristallini di baddeleyite sono, per lo più, attaccati a quelli di sanidino per una estremità dell'asse *c*, più di rado, invece, essi sono adagiati sulle facce }010{ del sanidino per mezzo dello spigolo [(110):$(\bar{1}10)$] o dell'altro [$(1\bar{1}0)$:$(\bar{1}\bar{1}0)$], e penetrano alquanto nell'interno del cristallo di sanidino sul quale riposano.

I cristallini di baddeleyite sono sempre allungati nella direzione dell'asse *c*, nella quale possono eccezionalmente raggiungere i 3 mm: il pinacoide }100{ è sempre tanto dominante, che i cristalli si presentano costantemente come tavolette esilissime. Le forme da me osservate sono le seguenti: *a*}100{, *c*}001{, *m*}110{, *r*}$\bar{1}01${, *d*}021{, *o*}$\bar{2}21${, seguendo l'orientazione di Hussak. Accettando, invece, l'orientazione proposta da Groth, che mette meglio in luce il carattere pseudocubico del minerale, le forme indicate acquistano i simboli *a*}100{, *c*}001{, *m*}110{, *r*}102{, *d*}011{, *o*}$\bar{1}11${. Di queste forme *o* è nuova per la baddeleyite.

Sempre presenti in tutti i cristalli sono *a*, *m* e *c* o *d*: rarissime volte manca *c*, meno di rado, invece, *d*: anche *o* è molto frequente. La grandezza relativa di *c* e di *d* è variabilissima: da cristalli nei quali *c* manca del tutto, si va, per gradi successivi, a quelli nei quali, al contrario, è *d* che è assente. Non di rado le due facce di *d* presenti all'estremità libera del cristallo hanno grandezza assai diversa: *o* possiede sempre faccette piuttosto sottili, *r* è stata riscontrata in un solo cristallo, con un'unica faccetta, esile, ma splendente e piana. Le Fig. 5-9 danno un'idea dei differenti aspetti osservati nei cristalli studiati.

Molto frequenti sono i geminati di contatto secondo la legge: asse di geminazione la normale a }100{. Anche questi geminati sono fortemente tabulari secondo }100{, come si vede dalla Fig. 7. Non di rado su una faccia di }100{ di uno dei geminati descritti si trova impiantato un altro geminato secondo la stessa legge, di solito di dimensioni più piccole, in modo che le sue facce di }100{ risultino quasi normali a quella di }100{ dalla quale si ederge. Le misure hanno dato, per gli an-

---

[1]) Neues Jahrbuch für Min. Geol. u. s. w., 1898, II, 228.

[2]) Amer. Journal Science, 1911, XXXIII, 54.

goli tra le facce di }100{ dei due geminati, dei valori di 91°30′ e 88°30′ circa. Ciò dimostra che i due cristalli sono geminati, alla loro volta, l'uno rispetto all'altro, secondo la legge: asse di geminazione la normale ad una faccia di }110{. Infatti, in base alle costanti di **Hussak** [1], i valori teorici per gli angoli anzidetti sono 91°25′ e 88°35′. Non mancano i geminati di contatto che ubbidiscono alla seconda legge ora enunciata, ma sono molto più rari degli altri. Essi possono essere costituiti sia da due individui unici, sia da due geminati con }100{ come piano di geminazione.

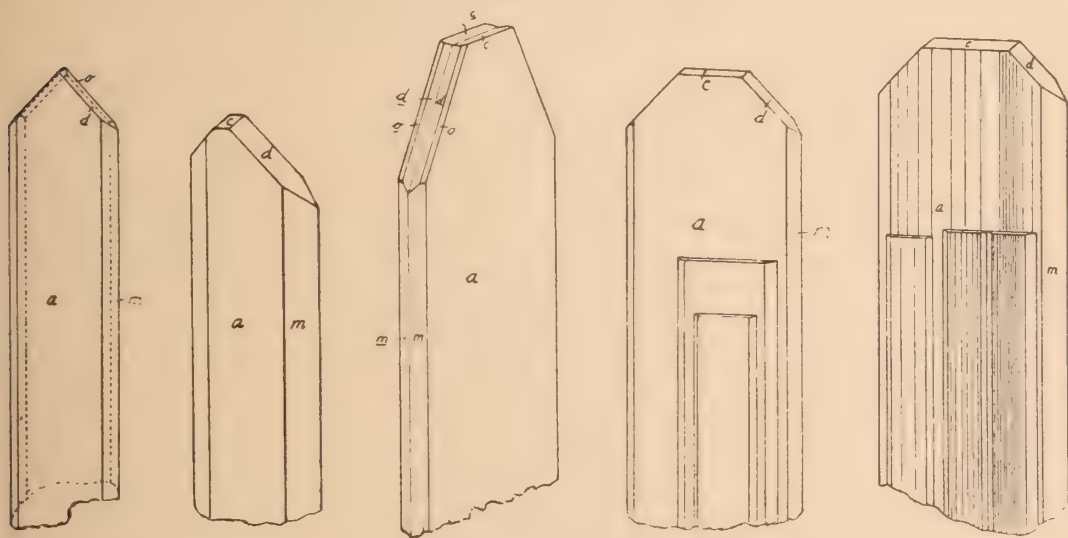



Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9.

Le due leggi di geminazione ricordate sono frequentissime sia nella baddeleyite del Brasile, che in quella di Alnö. Frequente è, anche nella baddeleyite del Monte Somma, una struttura polisintetica secondo l'una o l'altra od ambedue quelle leggi: specialmente frequenti sono le lamelle di geminazione che seguono la prima di esse.

Questa struttura complessa fa sì che le facce dei cristalli della nostra baddeleyite sieno spesso ondulate, profondamente striate, ecc. Ciò si verifica specialmente in quelle della zona [001], e particolarmente in quelle di }100{. Esaminando al microscopio delle tavolette di baddeleyite poggiate su una delle due facce di }100{, si vede come queste costantemente presentino una striatura più o meno fitta, più o meno profonda, che corre parallelamente all'asse *c*. Molto di rado, oltre questa striatura se ne osserva anche un'altra, parallela all'asse *b* (Fig. 10).

Fig. 10.

Frequentissime sono le associazioni parallele tra numerosi cristallini di baddeleyite. In esse si possono distinguere essenzialmente due tipi: in uno di essi si ha che le diverse tavolette di baddeleyite, generalmente di dimensioni sempre più piccole, sono collocate l'una sull'altra (Fig. 8), mentre nell'altro tipo di associazione parallela accade, invece, che su una delle due facce di }100{ di un cristallo più grande ne sono impiantati parecchi,

---

[1]) $a : b : c = 0{,}9871 : 1 : 0{,}5114$; $\beta = 98°45\,^1/_2{}'$.

più piccoli, isorientati e posti l'uno accanto all'altro (Fig. 9). È notevole il fatto che, mentre il cristallo più grande, sul quale sono cresciuti gli altri, presenta sempre *d*{021}, questa forma manca nei cristallini isorientati sul primo. Una sola volta ho osservato un altro esempio, pure interessante, di accrescimento parallelo: un'esilissima tavoletta di baddeleyite, limitata dalle forme *a c m*, era inclusa in un cristallo più grande, offrente la combinazione *a m d o*.

Alcuni dei cristalli studiati hanno dato delle misure abbastanza precise e concordanti, alquanto diverse, specialmente per i due angoli (001) : (100) e (100) : (021), dai valori calcolati da Hussak per la baddeleyite del Brasile, tanto che io mi proponevo di calcolare delle nuove costanti per il minerale, visto che due degli angoli fondamentali di Hussak [(100) : (110) e (001) : (100)] oscillavano entro limiti abbastanza forti [1]. Ulteriori misure e l'esame approfondito dei risultati ottenuti, mi hanno, però, presto mostrato che i cristalli di baddeleyite del Monte Somma non si prestano per determinare le costanti del minerale, poichè presentano in grado eminente quelle perturbazioni geometriche, così note e frequenti in altri minerali pneumatolitici e dei blocchi rigettati. Così, per esempio, in un geminato secondo la legge: asse di geminazione la normale a (100), ho misurato:

$$(001):(021) = 45^{0}4'$$
$$(001):(0\bar{2}1) \quad 45\ 18$$
$$\underline{(00\bar{1})}:\underline{(0\bar{2}\bar{1})} \quad 45\ \ 5$$
$$\underline{(00\bar{1})}:\underline{(02\bar{1})} \quad 45\ 16$$

Ad onta delle anomalie angolari constatate, si hanno delle differenze così nette specialmente per certi angoli, tra la baddeleyite del Monte Somma e quella del Brasile, da rendere necessario, per la prima, il calcolo di costanti apposite, per quanto soltanto approssimative. Quelle che io propongo sono le seguenti:

$$a : b : c = 0,9872 : 1 : 0,5097$$

$$\beta = 99^{0}7\ ^{1}/_{2}{}' .$$

Nella tabella che segue ho riunito gli angoli misurati e quelli calcolati sia con le costanti mie, che con quelle di Hussak

$$a : b : c = 0,9871 : 1 : 0,5114$$

$$\beta = 98^{0}45\ ^{1}/_{2}{}'$$

---

[1]) (100) : (110) tra $44^{0}9'$ e $44^{0}36'$; (001) : (100) tra $80^{0}56\ ^{1}/_{2}{}'$ e $81^{0}42'$.

Angoli	Limiti delle misure	Media	Calcolati	
			Zambonini	Hussak
$(100):(110)$	44°9′ — 44°19′	44°16′	44°16′	44°17 ¹/₂′
$(110):(1\bar{1}0)$	88 27 — 88 36	88 32	88 32	88 35
$(001):(100)$	80 51 — 80 54	80 52 ¹/₂	80 52 ¹/₂	81 14
$(001):(021)$	45 4 — 45 18	45 11	45 11	45 18 ¹/₃
$(100):(021)$	83 21 — 83 37	83 29	83 35 ¹/₄	83 51
$(110):(021)$	— —	55 10	54 52 ¹/₂	55 2
$(\bar{1}10):(021)$	65 23 — 65 24	65 23 ¹/₂	65 28	65 10 ¹/₂
$(100):(10\bar{1})$	— —	70 4	70 5	69 41
$(\bar{1}00):(\bar{2}21)$	57 58 — 58 17	58 7	58 12	57 59
$(001):\underline{(00\bar{1})}$	— —	18 16	18 15	17 31
$(021):\underline{(0\bar{2}\bar{1})}$	12 54 — 13 1	12 57 ¹/₂	12 49 ¹/₂	12 18

Uno sguardo su questa tabella mostra subito che gli angoli della zona [001] hanno sensibilmente gli stessi valori nella baddeleyite del Monte Somma ed in quella brasiliana, mentre lo stesso accordo non si verifica nelle altre zone. Specialmente gli angoli (001) : (100) e (100) : (021) differiscono in modo considerevole nei cristalli dei due giacimenti. Questo fatto, però, è di carattere generale. Così, nella baddeleyite di Alnö, H u s s a k ha trovato per $(110):(\bar{1}10)$ 91°18′ (calc. per la baddeleyite del Brasile 91°25′), mentre (001) : (100) scende molto al di sotto dei valori osservati nei cristalli del Monte Somma, e, cioè, a 80°30′.

Mediante alcune misure eseguite in due cristallini di baddeleyite di Jacupiranga ho potuto accertarmi dell'esattezza delle costanti proposte per loro da H u s s a k. In due cristallini, infatti, io ho ottenuto:

$(110):(1\bar{1}0)$ = 88°36′ e 88°41′	mis.	88°35′	calc. Hussak
$(001):(\bar{1}11)$ 37 51 e 38 4	»	37 59 ¹/₂	»
$(001):(110)$ 83 41 ¹/₂ e 83 40	»	83 41 ¹/₂	»
$(\bar{1}00):(\bar{1}11)$ 71 47	»	71 45 ¹/₂	»

Ambedue i cristallini presentavano numerose lamelle polisintetiche secondo (100) e (110), come si osservano, del resto, anche nella baddeleyite del Monte Somma. Non possono, perciò, ascriversi alla struttura polisintetica le differenze osservate nei valori angolari tra la baddeleyite del Monte Somma e quella del Jacupiranga: si ha, piuttosto, a che fare con lo stesso fenomeno già osservato nella titanite, nell'anfibolo, ed in altri minerali, nei quali pare che le costanti cristallografiche sieno alquanto diverse a seconda delle condizioni di formazione e di giacitura.

La baddeleyite del Monte Somma è di colore bruno-verdastro chiarissimo: delle tavolette molto esili appaiono di colore verdolino debolissimo. Rari sono i cristalli di colore verde scuro.

Al microscopio, la maggior parte dei cristallini, poggiati su una faccia di }100{, si mostrano pressochè incolori, ed il pleocroismo è quasi insensibile. In quelli più

intensamente colorati il pleocroismo è netto, e si ha:

‖ *c* verde olio

‖ *b* bruno rossiccio.

Invece, nei cristalli del Brasile, Hussak ha osservato, sempre su (100):

‖ *c* bruno rossiccio scuro

‖ *b* verde olio

ossia i colori degli assi appaiono invertiti rispetto alla baddeleyite del Monte Somma. Mediante l'esame di alcuni cristallini di Jacupiranga ho potuto perfettamente confermare le osservazioni di Hussak. Lo stesso Hussak, però, nella baddeleyite di Alnö ha trovato, su (100), il pleocroismo come segue:

‖ *c* verde olio

‖ *b* bruno rossiccio

precisamente come nei cristalli del Monte Somma.

Sembra, perciò, che nella baddeleyite i colori degli assi possano scambiarsi, come accade, del resto, in qualche altro minerale. Devo notare, però, che i cristallini del Monte Somma con pleocroismo ben distinto oltre all'essere rari non erano ben misurabili, e si presentavano riuniti in fascetti, sicchè non si può escludere in modo assoluto un errore di orientazione. Bisognerebbe, però, ammettere che essi, contrariamente a quanto accade costantemente nella baddeleyite del Monte Somma da me studiata, fossero stati allungati secondo *b*, anzichè nella direzione di *c*, cosa poco probabile. Anche Hussak dovrebbe, poi, aver sbagliato le sue osservazioni nei cristalli di Alnö.

Su (100) si ha sempre estinzione parallela alla direzione di allungamento, che è negativa. Frequente è la struttura zonata, a zone alterne pressochè incolore e torbidiccie in alcuni cristalli, quasi incolore e verdognole in altri. La birifrazione è forte.

La sfaldatura è discretamente pronunciata secondo }001{, meno parallelamente a }010{.

La durezza è 6: il peso specifico superiore a quello dello ioduro di metilene.

La baddeleyite del Monte Somma al cannello non fonde: i cristallini intieri sono attaccati dall'acido solforico concentrato, a caldo, con difficoltà estrema, poichè soltanto con l'azione prolungata si riescono ad ottenere delle minute figure di corrosione. La polvere del minerale, che è bianca, si scioglie mediante fusione col bisolfato potassico. Con la reazione di Ruer ho potuto riconoscere la presenza del zirconio nel minerale.

Tutti i caratteri indicati combinano perfettamente con quelli della baddeleyite.

È notevole il fatto che l'habitus cristallografico della baddeleyite è abbastanza variabile. I cristalli brasiliani e di Alnö sono tabulari secondo il pinacoide }100{ ed

allungati quasi costantemente nella direzione dell'asse *b*: quelli del Monte Somma, invece, pur essendo tabulari per il grande predominio di {100}, sono allungati secondo *c*.

Parecchi anni or sono, il Rinne [1]) richiamò l'attenzione degli studiosi sulle interessanti relazioni cristallografiche che esistono tra certi metalli e gli ossidi, solfuri, idrati e composti alogenati che ne derivano. Sembrò al Rinne di poter dedurre dalle sue osservazioni che in quei composti si ritrova la forma cristallina del metallo in essi contenuto, e propose di distinguere col nome di isotipia il ripetersi di taluni determinati tipi cristallini.

Le idee del Rinne non ebbero fortuna. In realtà, alcuni degli avvicinamenti cristallografici da lui tentati erano veramente artificiosi, ed il Retgers [2]) mostrò, poi, che i fatti constatati dal Rinne, quando non rappresentavano delle semplici casualità, si potevano spiegare facilmente con quella che egli, il Retgers, chiamò legge della semplicità cristallochimica, e che si identifica, in fondo, con la cosiddetta legge di Buy-Ballot.

Più recentemente, il Rinne [3]) ha preso occasione dalla scoperta della chalmersite $Cu_2S.Fe_6S_7$, che offre strette relazioni cristallografiche con la calcocite e con la pirrotina, per ritornare sulla sua isotipia, definita come il fatto spesso osservabile, del ripetersi di forme cristalline «tipiche», che si trovano negli elementi, specialmente nelle sostanze con composizione semplice e talvolta anche in quelle chimicamente più complesse. Non va, per altro, taciuto che l'esempio della chalmersite non parla davvero molto in favore dell'isotipia, perchè quel minerale si può considerare come un sale doppio, ed allora diventano naturali le sue somiglianze cristallografiche con la calcocite e la pirrotina, perchè è noto da tempo che i sali doppî presentano relazioni morfotropiche spiccate con almeno uno dei loro componenti.

In relazione con l'isotipia di Rinne, intesa, però, in un senso più preciso, come ripetizione dello stesso tipo cristallino in diversi derivati di un elemento o di un composto, sta un fatto notevole, che non mi sembra sia stato già da altri reso di pubblica ragione, e che consiste nella grandissima somiglianza cristallografica che passa fra la baddeleyite e parecchi minerali che contengono lo zirconio come elemento essenziale, quali la låvenite, la wöhlerite, la hiortdahlite. La låvenite e la wöhlerite sono, come la baddeleyite, monocline. Quanto alla hiortdahlite, triclina, è noto [4]) che presenta intimissime relazioni cristallografiche con la wöhlerite. I cristalli di tutti i minerali indicati sono spesso tabulari secondo un pinacoide, al quale si dà il simbolo {100}: frequentissima nella baddeleyite, nella låvenite e nella wöhlerite è la geminazione polisintetica, che ubbidisce alla legge: piano di geminazione e di unione (100). Anche nella hiortdahlite triclina si ha struttura polisintetica, ma principalmente secondo la legge: asse di geminazione [001], piano di unione parallelo a (100).

---

[1]) Neues Jahrbuch für Min. Geol. u. s. w., 1894, I, 1.
[2]) Zeitsch. für phys. Chemie, 1894, XIV, 1; XV, 579.
[3]) Centralblatt für Min. Geol. u. s. w., 1902, 207.
[4]) Cfr. W. C. Brögger, Zeitsch. für Kryst., 1890, XVI, 370.

Nella zona [001] l' isogonismo è quasi perfetto, come risulta dalla seguente tabella:

Baddeleyite	Hiortdahlite	Låvenite	Wöhlerite
(100):(110) = 44°17 1/2'	(100):(110) = 44°54' (100):(1$\bar{1}$0) 44 59 1/2	(100):(110) = 45°48'	(100):(110) = 44°53'
(100):(120) 62 52	(100):(120) 63 18 1/2 (100):(1$\bar{2}$0) 63 25	—	(100):(120) 63 21

Somiglianze notevolissime si verificano anche in altre zone, quantunque meno spiccate di quelle ora viste. Interessante è il fatto che i due angoli ($\bar{1}$00) : ($\bar{1}$01) e ($\bar{1}$00) : ($\bar{1}$11) della baddeleyite concordano moltissimo con gli angoli (100) : (001) e (100) : (011) della låvenite e della wöhlerite, come pure con i due (100 : (101) e (100) : (111) della hiortdahlite.

Si ha, infatti:

Baddeleyite	Hiortdahlite	Låvenite	Wöhlerite
($\bar{1}$00):($\bar{1}$01) = 69°41'	(100):(101) = 70°4'	(100):(001) = 69°42 1/2'	(100):(001) = 70°45'
($\bar{1}$00):($\bar{1}$11) 71 45 1/2	(100):(111) 71 1 1/2	(100):(011) 73 16	(100):(011) 74 6

Per rendere ben paragonabili fra loro le costanti di questi quattro minerali, è conveniente prendere nella baddeleyite {$\bar{1}$01} e {$\bar{1}$11} rispettivamente come {001} e {011}, ed accettare per la hiortdahlite l'orientazione somigliante a quella della wöhlerite, proposta dal Brögger. Si ha, allora:

	$a : b : c$	β	α	γ
Baddeleyite	1,0403 : 1 : 0,5114	110°19'	90° 0'	90°0'
Hiortdahlite	1,0583 : 1 : 0,7048	108 49 1/2	90 29	90 8
Låvenite	1,0964 : 1 : 0,7152	110 17 2/3	90 0	90 0
Wöhlerite	1,0549 : 1 : 0,7091	109 15	90 0	90 0

Come si vede, nei quattro minerali i tre assi cristallografici formano fra loro angoli pochissimo differenti, e pressochè identici sono i valori del rapporto $a : b$. Soltanto per $c : b$ si ha una netta distinzione fra la baddeleyite e gli altri tre minerali.

Anche fra la baddeleyite ed il zircone esistono delle somiglianze nei valori angolari di alcune zone, ma meno notevoli di quelle ora illustrate. È degno di attenzione il fatto che molti dei minerali, nei quali il zirconio è un elemento essenziale, sono o pseudocubici (come la hiortdahlite, la wöhlerite, la låvenite, ecc.) o esagonali e ipoesagonali (come la catapleite, l'elpidite, ecc.). Orbene, delle modificazioni del biossido di zirconio una, la baddeleyite, è pseudocubica ed intimamente legata cristallograficamente ai minerali di zirconio pseudocubici: un'altra, ottenuta artificialmente da Michel-Lévy, è esagonale. Di quest'ultima, però, non sono note le costanti, e non si può, quindi, sapere se presenti relazioni cristallografiche con la catapleite.

ZIRCONE

Nella sanidinite con baddeleyite, ortite, ecc. è molto abbondante il zircone, in bei cristalli che raggiungono, benchè di rado, fino 5 mm. nella loro maggiore dimensione. Da questi cristalli di grandezza eccezionale si va a quelli piccolissimi, quasi microscopici. I cristalli più comuni non misurano che circa un millimetro, frequenti sono anche quelli che raggiungono i 2 mm. Il colore è quasi sempre il verde-giallastro chiaro: rari sono i cristallini grigio-bluastri. Alcuni sono quasi incolori, con una punta leggerissima nel giallognolo o nell'azzurrastro. I cristalli di vario colore sono intimamente associati insieme: da uno verdastro ne ho visto sporgere uno grigio-azzurrastro.

L'habitus cristallografico comune è il solito bipiramidale del zircone vesuviano. I cristalli presentano la bipiramide }111{, alla quale spesso si associano le facce del prisma }110{ esilissime, ed in qualche caso quelle ancora più esili di }331{. In alcuni rari cristalli il prisma }110{ acquista uno sviluppo alquanto maggiore, e si ha allora l'habitus della Fig. 1 del *System of Mineralogy* di E. Dana (6th ed. 1892, pag. 483).

Rarissimi sono, poi, dei cristalli nei quali le facce di }110{ sono ancora più estese, e veramente eccezionale è un cristallo che offre la combinazione }110{ }100{ }111{ }311{, che ha l'abitus della Fig. 3 del Dana [1]).

Le facce della bipiramide }111{ sono pressochè costantemente spezzate in due che formano fra loro uno spigolo parallelo all'asse della zona [(111) : (110)] ed analoghe, sicchè nelle misure si hanno sempre almeno due immagini, a distanza variabile l'una dall'altra. Le misure danno, perciò, valori molto oscillanti.

Il zircone, oltre che nella massa della sanidinite, si rinviene spesso nelle geodine, ed i suoi cristalli, specialmente quelli nei quali }110{ è più esteso, sono sovente impiantati sulle tavolette di sanidino.

IDRARGILLITE

Questo minerale non era stato finora osservato nè al Monte Somma, nè al Vesuvio: io l'ho rinvenuto per la prima volta insieme alla bassanite di alcune fumarole del cratere, nell'estate del 1911 [2]).

L'idrargillite formava in mezzo alla bassanite dei minuscoli aggregati fibro-lamellari, di colore bianco, dotati di birifrangenza abbastanza forte, con potere rifrangente, invece, debole. Molto più spesso, però, la idrargillite era rappresentata da cristallini tabulari, a contorno esagonale, con le proprietà ottiche caratteristiche del minerale: l'angolo degli assi ottici appariva molto piccolo. Frequentemente le laminette di idrargillite erano riunite insieme in un certo numero, e si trovavano

---

[1]) Un cristallo di zircone allungato secondo [001] è stato già figurato da Monticelli e Covelli nel *Prodromo* (Fig. 29).

[2]) Per i dettagli sulle condizioni di giacitura vedasi alla bassanite. Una breve comunicazione intorno al rinvenimento della idrargillite al Vesuvio fu inserita nel processo verbale della seduta del 4 novembre 1911 della R. Accademia delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli.

impiantate sui fascetti di bassanite, sicchè pare certo che si sieno formate dopo questo minerale.

Per mezzo del tetrabromuro di acetilene diluito col toluolo ho potuto isolare dalla bassanite alquanta idrargillite. Il suo peso specifico è risultato oscillante tra 2,39 e 2,42: per l'idrargillite della Nuova Caledonia Lacroix [1]) dà 2,397 e per quella di Arö Brogger [2]) 2,420. Nel tubo chiuso si è avuto svolgimento di acqua: con nitrato di cobalto, sul carbone, si è ottenuta la colorazione azzurra dell'allumina. Il minerale era solubile nell'acido solforico. Tutti questi caratteri, e la analisi quantitativa delle miscele di bassanite e di idrargillite, tolgono ogni dubbio sulla natura del minerale studiato.

L'idrargillite vesuviana descritta è, evidentemente, un prodotto di alterazione dei feldspati e della leucite, che sono costituenti essenziali dei materiali dai quali è formato il gran cono vesuviano. È noto, che la idrargillite si rinvenne spesso nella laterite, come prodotto di alterazione dei feldspati: mentre, però, nella laterizzazione si ha a che fare con trasformazioni atmosferiche di roccie di paesi tropicali, nel nostro caso l'azione prevalente, se non esclusiva, è dovuta ai gas delle fumarole.

CALCITE

I cristalli nitidi di calcite sono, come è noto, molto rari nelle geodi dei blocchi del Monte Somma. Recentemente, io ne ho veduti alcuni, che raggiungevano i 4-5 mm. nella loro maggiore dimensione, nelle geodi di un blocco calcareo, ricco in solfuri metallici, specialmente blenda ed anche galena. Uno di essi, meglio conformato, fu distaccato e misurato. Fu trovato, così, che è schiacciato secondo la base, e presenta la combinazione $c\{111\}$ dominante, $r\{100\}$ grande, $f\{11\bar{1}\}$ meno estesa. Ottime misure dettero:

$(111):(11\bar{1}) = 63°5'$ mis.	$63°7'$	calc.
$:(100)$ 44 40 »	44 36 ½	»

LITIDIONITE e NEOCIANITE

Questi due minerali erano stati da me posti, nella *Mineralogia vesuviana* (pag. 354), tra quelli imperfettamente definiti. Non avevo mancato fin da allora di notare che fra la neocianite e la litidionite esisteva una certa analogia, ma il fatto che della prima era ignota la composizione chimica anche qualitativa, e per la seconda mancava ogni notizia intorno alle proprietà cristallografiche ed ottiche, mi impedì di giungere a conclusioni precise, quantunque le osservazioni che avevo avuto agio di fare, e che non ritenni opportuno di pubblicare perchè troppo incomplete, mi avessero convinto della probabile identità dei due minerali.

Avendo, in seguito, il Prof. E. Scacchi messo a mia disposizione tutto il materiale di litidionite esistente nel Museo, ho potuto completare le mie ricerche, e stabilire in modo sicuro la identità della litidionite e della neocianite.

---

[1]) *Minéralogie de la France et de ses colonies,* 1901, III, 363.

[2]) Zeitsch. für Kryst., 1890, XVI, 48.

Come è noto, il nome di litidionite fu dato da E. Scacchi a dei lapilli di colore azzurro, rinvenuti sul cratere del Vesuvio nel mese di giugno 1873, costituiti da opale, ricoperta da una incrostazione vitrea o smaltoidea azzurra, che è appunto la litidionite.

In realtà, però, la litidionite non rappresenta un «vetro», come è detto in varî punti della descrizione pubblicata da E. Scacchi, ma, al contrario, una sostanza nettamente cristallina, birifrangente, biassica, come si scorge esaminandone dei frammenti al microscopio polarizzatore. In un campioncino ho potuto anche ritrovare alcuni dei piccoli cristallini, già ricordati da E. Scacchi. Essi sono molto mal conformati ed imperfetti, e fortemente tabulari secondo un pinacoide.

Queste tavolette al microscopio appaiono limitate da quattro spigoli, due a due paralleli, e costantemente allungate secondo una delle due coppie di spigoli. Una direzione di massima estinzione, positiva, forma con gli spigoli più lunghi un angolo variabile da 18° a 24° nell'angolo acuto determinato dagli spigoli che limitano le tavolette di litidionite, e che misura da 64° a 67°. In luce convergente si ha emersione di un asse ottico all'orlo del campo. Il pleocroismo è pressochè insensibile. Se si confrontano queste proprietà della litidionite con quelle che ho già descritto, a pag. 355 della *Mineralogia vesuviana*, per la neocianite, è facile porre in luce l'identità dei due minerali. In ambedue, i cristalli sono fortemente tabulari secondo la stessa coppia di facce (}010{ nella neocianite), ed allungati secondo la stessa direzione ([001] nella neocianite). L'altro spigolo più breve delle tavolette di litidionite corrisponde a quello che nella neocianite si è preso come [100]. Anche la orientazione ottica è la medesima nei due minerali. L'unica differenza da me notata, è che, mentre le tavolette di neocianite appaiono costantemente delimitate, oltre che da [001], da due coppie di spigoli che si considerarono come [100] e [101], nella litidionite si osserva generalmente soltanto [001] e [100], e solo eccezionalmente anche [101]. Sulle tavolette di litidionite si scorgono, al microscopio, anche le tracce di una sfaldatura abbastanza facile secondo una forma appartenente alla zona [001], e che è, probabilmente, }110{. Di questa sfaldatura io non mi accorsi quando esaminai la neocianite, il che si spiega facilmente con la piccolezza estrema dei cristallini di questo minerale.

In alcuni frammentini di litidionite ho potuto misurare qualche angolo, ottenendo, per altro, dei valori oscillanti, e puramente approssimativi.

Nella zona [001] io non ho potuto osservare, oltre }010{, che una sola faccia, alla quale ho dato il simbolo (110): in un solo cristallo ne ho trovato due, (110) e ($\bar{1}$10), ugualmente inclinate su (010). Infatti, le misure dettero:

$$(010):(110) = 67°1'$$
$$(010):(\bar{1}10) \quad 66\ 57\ .$$

Sembra, perciò, che la litidionite sia davvero monoclina, come aveva ritenuto A. Scacchi per la neocianite. Va, però, ricordato che di facce terminali io ne ho rinvenuta sempre una sola, formante con la faccia più vicina di }010{ un angolo di circa 70°, ed alla quale ho assegnato il simbolo (0$\bar{1}$1), il che farebbe pensare piuttosto al sistema triclino, a meno di ritenere la litidionite come monoclina sfe-

noidica. Il materiale del quale ho potuto disporre non mi ha permesso di approfondire e di risolvere la questione. Gli angoli misurati in diversi cristalli sono i seguenti:

$(010):(110)$	$=66°57'$, $67°\ 1'$, $67°58'$, $68°35'$	Media	$67°38'$
$(0\bar{1}0):(0\bar{1}1)$	68 21 , 69 10 , 69 52 , 71 3 , 71°18′	»	69 57
$(0\bar{1}1):(\bar{1}\bar{1}0)$		»	102 55 .

Supponendo la litidionite monoclina, dalle medie riferite seguono le costanti:

$$a:b:c = 0{,}4506:1:0{,}3997$$

$$\beta = 114°3'$$

che vanno ritenute come soltanto approssimative.

Per β le misure di angoli piani avevano dato $118°$ nella neocianite, ma la differenza è ben naturale, se si pensa che sia il valore di β calcolato, che quello direttamente trovato nella neocianite non sono esatti. D'altra parte, i cristallini di neocianite sono così piccoli, che le misure degli angoli piani, che si devono eseguire con ingrandimenti piuttosto forti, riescono necessariamente imprecise, e danno risultati un po' oscillanti, a causa anche della cattiva conformazione dei cristallini. Il valore calcolato di β si avvicina a quello da me trovato per l'angolo piano [001]:[101] nella neocianite, ma la coincidenza è puramente causale.

Alcuni cristallini di litidionite di colore azzurro intenso mi hanno dato, per il peso specifico, determinato col metodo della sospensione, 2,56: E. Scacchi aveva trovato un valore molto prossimo, e, cioè, 2,535.

Il nome di litidionite è più antico di quello di neocianite, sicchè quest'ultimo deve passare in sinonimia.

RIVAITE

Nel lapillo, in vicinanza della strada delle Due Fave, è stato rinvenuto lo scorso anno un minerale di colore azzurro pallido, sotto forma di una specie di nodulo rotto, irregolare, del peso di circa 50 grammi. Per il suo aspetto, questo minerale si distingueva nettamente da tutte le altre produzioni del Vesuvio e del Monte Somma che avevo avuto occasione fino allora di vedere. Tentai invano, però, di rintracciarne altri frammenti, sicchè quello che mi accingo a descrivere è rimasto, finora, unico.

Il minerale in questione forma, come si è detto, una specie di arnione irregolare, è nettamente cristallino, e possiede struttura fibro-raggiata: i singoli ciuffi di fibre si intersecano fra loro in tutti i sensi. Gli aghetti del minerale sono esilissimi: cristallini alquanto più spessi si rinvengono nella parte superficiale del minerale, che essendo stata esposta all'azione degli agenti atmosferici è imbianchita, un po' alterata ed alquanto corrosa.

Il colore del minerale varia dall'azzurro di lavanda pallido all'azzurro più cupo, sempre che lo si osservi in massa.

Gli aghetti sono di colore chiarissimo, e non mancano nemmeno degli aghetti

o delle scaglie quasi incolori o biancastri. Nelle sezioni sottili, il minerale appare azzurro chiarissimo, e non presenta pleocroismo sensibile. Gli aghetti estinguono parallelamente alla loro direzione di allungamento: in generale, domina in essi una faccettina sulle altre, ed esaminando i cristallini poggiati su questa faccia, si ha che la direzione di allungamento è positiva. In luce convergente si osserva emergenza di un asse ottico all'orlo del campo. Molto probabilmente i cristallini sono monoclini ed allungati nella direzione dell'asse *b*. Anche nelle sezioni sottili degli aggregati fibro-raggiati la direzione di allungamento dei singoli aghetti è positiva, e soltanto molto di rado negativa. La birifrangenza è debole [1]).

Durezza 5: peso specifico (determinato col metodo della sospensione) 2,55-2,56 (a + 20°).

Al cannello, il minerale fonde facilmente, in un vetro alquanto bolloso, colorando la fiamma intensamente in giallo. Dall'acido cloridrico non è attaccato, almeno completamente. La polvere è di colore bianco-celestognolo.

La composizione chimica è la seguente:

		Rapporti molecolari		
SiO_2	66,38	1,100	1,101	2,02
TiO_2	0,10	0,001		
Al_2O_3	0,79	0,008		
FeO	0,30	0,004	0,546	1
CoO	0,38	0,005		
NiO	tr.	—		
MnO	tr.	—		
CaO	18,45	0,329		
MgO	0,74	0,018		
Na_2O	10,96	0,177		
K_2O	1,20	0,013		
H_2O	1,39	0,077		
	100,69			

La presenza nel minerale di tracce di nichelio addirittura minime fu accertata col reattivo di Tschugaeff. Il ferro è stato considerato tutto come esistente allo stato ferroso. Con H_2O è indicata la perdita di peso a 950°: la polvere riscaldata a quella temperatura fu trovata fusa, sotto forma di un vetro molto spugnoso, di colore azzurro-celeste pallido.

Dall'analisi surriferita si calcola la formola $(Ca, Na_2) Si_2 O_5$: una piccola quantità del calcio è sostituita dal ferro ferroso, dal cobalto, dal magnesio, ed alquanto sodio dal potassio. L'acqua non appartiene alla costituzione del minerale, e viene espulsa in gran parte già a temperature relativamente basse.

La formula $(Ca, Na_2) Si_2 O_5$ richiede, ammettendo che CaO e Na_2O si trovino

[1]) Per mancanza di mezzi adatti non ho potuto eseguire altre determinazioni ottiche.

nel rapporto di $\frac{2}{3}$ Ca O per $\frac{1}{3}$ Na_2O, i valori seguenti

SiO_2	67,51
CaO	20,92
Na_2O	11,57
	100,00

i quali sono in buon accordo con i risultati dell'analisi, qualora si riuniscano insieme FeO, CoO, CaO, MgO da un lato, Na_2O e K_2O dall'altro.

Sull'ufficio dell'alluminio nel minerale è difficile farsi un giudizio sicuro. Si può, tuttavia, con un certo grado di probabilità, ammettere che si trovi disciolto nel silicato $(Ca, Na_2)Si_2O_5$, che costituisce la quasi totalità del minerale, allo stato di Al_2SiO_5. Come è noto, Groth [1]) ritiene che le titaniti contenenti elementi trivalenti sieno delle soluzioni solide dei due composti $CaTiSiO_5$ e $(Al, Fe, Y)_2(Si, Ti)O_5$. Composti analoghi si rinvengono nella uhligite di O. Hauser [2]), che ha la formula $3,3\,Ca(Ti, Zr)_2O_5 . Al_2TiO_5$.

Per la titanite, le analisi non suffragano, come ho mostrato altra volta, le idee di Groth, ma diverso è il caso nel minerale vesuviano studiato. In esso, infatti, trascurando l'alluminio, il rapporto $RO : SiO_2$ è uguale a $1 : 2,02$, il che mostra la presenza di un leggero eccesso di silice: togliendo, però, dalla quantità totale di quest'ultima, quella necessaria per formare con l'allumina il silicato Al_2SiO_5, il rapporto $RO : SiO_2$ diventa esattamente $1 : 2$.

Non è stato ancora descritto, che io sappia, un minerale con la composizione e le proprietà di quello vesuviano ora studiato. Si tratta, perciò, di un minerale nuovo, per il quale io propongo il nome di Rivaite, in segno di mesto omaggio alla memoria di Carlo Riva, il giovane e valorosissimo mineralista e petrografo che il fato avverso ha tolto tanto presto agli studî nei quali primeggiava.

Sono assai pochi, finora, i minerali che si possono considerare con certezza come sali di calcio o di sodio (o di ambedue questi metalli), degli acidi $H_2Si_2O_5$, $H_2Ti_2O_5$, $H_2Zr_2O_5$ ed analoghi. Qualora la titanite dovesse davvero considerarsi come il sale di calcio di un acido $H_2(Si, Ti)_2O_5$, la rivaite verrebbe a collocarsi naturalmente presso la titanite, della quale rappresenterebbe il composto analogo puramente silicico, con una parte notevole del calcio sostituita dal sodio. D'accordo con questo avvicinamento starebbe anche il fatto che la rivaite è molto probabilmente monoclina. Una decisione in proposito potrà prendersi, però, soltanto quando nuove ricerche avranno stabilito quale, fra le varie ipotesi avanzate intorno alla costituzione della titanite, è la più verosimile.

Il nodulo di rivaite è stato rinvenuto libero, nel lapillo profondamente tormentato dalle lave di fango dopo l'eruzione dell'aprile 1906. Non si può, perciò, nulla dire intorno alla sua origine. Non è, però, da tacersi che analoghi aggregati cristallini, costituiti da sola wollastonite, e rappresentanti il riempimento, divenuto poi libero, di geodi di blocchi calcarei, si trovano non di rado nei tufi del Monte Somma, sicchè non appare improbabile un'origine analoga per la rivaite descritta.

---

[1]) *Tableau systématique des minéraux*, 1904, pag. 160.

[2]) Zeitsch. für anorg. Chemie 1909, XLIII, 340.

LEUCITE

P. Franco (Bollettino Società Naturalisti di Napoli 1896, X, 410) ha studiato, nei cristalli della lava del 1895, la struttura lamellare della leucite, giungendo alla conclusione che i pseudoicositetraedri del minerale sono costituiti da lamelle tricline, geminate secondo leggi di ordine superiore [1].

Come è noto, la leucite si rinviene nelle geodi dei blocchi calcarei del Monte Somma in due varietà ben distinte: una grigia, opaca, ricca in inclusioni vetrose, con scarso splendore piuttosto grasso, l'altra bianca od incolora, con splendore vitreo. Specialmente la prima varietà si presenta spesso con un aspetto tale, da far pensare che abbia subito almeno un principio di fusione. Per stabilire se la fusione era davvero avvenuta, io ho pensato di determinare l'indice di rifrazione di leuciti con l'aspetto che possiamo dire normale, e di quelle che sembrano fuse: se queste ultime fossero davvero tali, dovrebbero presentare, per l'indice di rifrazione, dei valori ben diversi da quelli delle prime.

La ricerca presentava anche un certo interesse, per il fatto che, finora, non si conosce che una sola determinazione dell'indice di rifrazione della leucite vesuviana quella, cioè, eseguita da Zimányi, che dette $n_{Na} = 1,5086$.

Io ho studiato quattro leuciti provenienti da geodi di blocchi calcarei, e cioè:

a) leucite grigia accompagnante la meionite;

b) leucite in piccoli cristallini incolori;

c) leucite grigia di apparenza fusa;

d) leucite in cristalli affumicati, quasi neri in alcuni punti, associati con leuciti grigiastre. Questa varietà è molto rara.

I risultati ottenuti impiegando dei prismi con angolo rifrangente di circa 44°, sono i seguenti:

	Li	Na	Tl	Cu [2]	$n_{Cu} - n_{Li}$
a) Leucite grigia accompagnante la meionite	1,5043	1,5076	— [3]	1,5143	0,0100
b) Leucite incolora	1,5045	1,5078	1,5101	1,5147	0,0102
c) Leucite grigia di apparenza fusa	1,5050	1,5080	1,5107	1,5143	0,0093
d) Leucite affumicata	1,5061	1,5091	1,5119	1,5156	0,0095

Come si vede, la leucite grigia che sembra aver subito un processo di fusione ha, per le varie lunghezze d'onda, un indice di rifrazione pressoche identico a quello della leucite incolora in netti cristallini. Ciò dimostra senz'altro che l'aspetto particolare della leucite grigia in questione non può dipendere da fusione, ma da altre cause. È molto probabile, esclusa la fusione, che esso sia dovuto a fenomeni di soluzione, per i quali, in seguito all'arrotondamento degli spigoli ed alla scomparsa delle originarie faccie piane dei cristalli, è risultata quell'apparenza speciale

---

[1]) Di questo lavoro del Franco mi ero dimenticato, quando compilai la *Mineralogia vesuviana*.

[2]) Soluzione di solfato di cuprammonio.

[3]) Causa la minore trasparenza del prisma, l'immagine rifratta per la luce del tallio non si è potuta puntare con esattezza.

di certe leuciti grigie, che, come in quella studiata, fa pensare naturalmente, a prima vista, ad una fusione, per lo meno parziale. Anche per il peso specifico queste leuciti grigie particolari non si distinguono da quelle normali, il che conferma che non sono fuse, perchè il Douglas ha osservato che il vetro della leucite possiede, come del resto accade di solito, un peso specifico nettamente inferiore a quello della fase cristallina.

Le tre leuciti *a*, *b* e *c* hanno per l'indice di rifrazione dei valori così prossimi, da far pensare che la composizione chimica deve essere sensibilmente la stessa in tutte e tre. La leucite affumicata *d* presenta, invece, dei valori nettamente più elevati di quelli delle altre tre leuciti, e la differenza può dipendere sia dalla sostanza disciolta nella leucite *d* ed alla quale questa deve il suo colore, sia da un diverso tenore in sodio, o da ambedue le cause.

La soluzione della questione l'ho ricercata in una leucite bianca, trovata nella collezione di Napoli in cristalli isolati {211} {110}. Questa leucite, esaminata in lamine sottili, appare più birifrangente delle quattro prima studiate, e presenta la solita complicata struttura lamellare. L'immagine rifratta da un prisma di circa 29°30′ (angolo vero) non è, però, sdoppiabile. Le determinazioni sono state eseguite con la luce del sodio e con alcuni dei filtri di Wratten e Wainwright, e si è avuto il seguente risultato:

	λ 667	Na	λ 533	λ 453
$n=$	1,5067	1,5098	1,5120	1,5178

Questa leucite contiene, secondo una determinazione eseguita dal Dr. F. Stella-Starrabba, 19,34 % K_2O e 1,62 % Na_2O. Le altre leuciti studiate hanno lasciato scorgere, con i saggi microchimici, soltanto quantità sempre più piccole di sodio, man mano che diminuiva il valore dell'indice di rifrazione, sicchè sembra che dalle mie esperienze possa dedursi che l'indice di rifrazione della leucite del Monte Somma va aumentando col tenore in sodio.

Valori molto prossimi ai miei sono stati ottenuti nella leucite dei tufi della Campagna romana da F. Rinne e R. Kolb [1]).

GRUPPO NEFELINA

In una Nota presentata alla R. Accademia delle Scienze di Torino il 29 dicembre 1867, G. Strüver descrisse un cristallo di nefelina del Monte Somma presentante la combinazione {0001} {10$\bar{1}$0} {11$\bar{2}$0} {21$\bar{3}$0} {10$\bar{1}$2} {11$\bar{2}$2} (orientazione della nefelina).

Lo Strüver scrisse in un'epoca nella quale tutti i minerali del complesso gruppo nefelina che si trovano al monte Somma venivano considerati come «nefelina» senz'altro. Mancando ogni notizia sulla presenza o meno della sfaldatura secondo il prisma {10$\bar{1}$0} non può, ora, sapersi a quale minerale del gruppo nefelina è da riferirsi il cristallo studiato dallo Strüver. Nella speranza di poterlo esaminare, e di risolvere, così, la que-

[1]) Neues Jahrbuch für Miner. etc., 1910, II, 156.

stione, non parlai delle osservazioni dello Strüver nella *Mineralogia vesuviana:* lo faccio ora che ogni speranza è perduta, perchè quel cristallo, come mi ha cortesemente comunicato il Prof. Sacco, non si e potuto rinvenire nè nella collezione mineralogica generale, nè in quella speciale vesuviana del R. Politecnico di Torino, dove si trovava nel 1867. È probabile che il cristallo in questione sia stato di davyna-microsommite, come sembra possa dedursi dal fatto che l'unico $\{h0\bar{h}l\}$ esistente era $\{10\bar{1}2\}$, e dall'habitus del cristallo, molto somigliante a quello di certi cristallini di davyna con facies cavolinitica del Monte Somma che io ho descritto nella *Mineralogia vesuviana.*

CALIOFILITE

Finora, soltanto Covelli e Breithaupt avevano avuto a loro disposizione cristalli di caliofilite con facce di bipiramide esagonale adatte per misure precise. Io, all'epoca della pubblicazione della mia *Mineralogia vesuviana*, non potei studiare che cristalli molto imperfetti, che mi permisero di confermare l'omeomorfismo della caliofilite con la nefelina, già posto fuori di dubbio dalle misure del Covelli, ma non di eseguire misure esatte, tanto che per il calcolo del rapporto assiale fui costretto a servirmi del valore trovato nel 1826 dal Covelli per l'angolo $(0001):(10\bar{1}1)$. In questo stato di cose, appariva vivamente desiderabile il controllare, su materiale adatto, le misure del Covelli e del Breithaupt, tanto più che la rarità estrema dei cristalli ben conformati di caliofilite poteva far sorgere il dubbio che quelli misurati dai due studiosi ricordati fossero stati di nefelina, ma la verifica mi è stata possibile solamente negli ultimi tempi. Il Prof. E. Scacchi ebbe occasione di rinvenire alcuni antichi esemplari dimenticati, non facienti parte della collezione vesuviana, e me li affidò per lo studio. Potei, così, identificare con la caliofilite alcuni fascetti di cristalli e degli aghetti isolati, che Arcangelo Scacchi aveva interrogativamente riferito alla humboldtilite: due di essi presentarono facce nettissime e perfettamente misurabili della bipiramide $\{10\bar{1}1\}$. Questa forma fu osservata in ambedue i casi con una parte soltanto delle faccette richieste dalla simmetria della classe alla quale appartiene la caliofilite: erano, inoltre, molto subordinate rispetto alla base.

Uno dei due cristalli (I) non misurava che circa 2 mm. nella direzione dell'asse principale, ed è rappresentato, completato, nella Fig. 11. L'altro (II) è più grande, poichè raggiunge quasi i 5 mm. nella stessa direzione, ma si compone di due individui accollati in posizione parallela, ciascuno con l'habitus della Fig. 11. Come di solito accade nella caliofilite, le facce del prisma $\{10\bar{1}0\}$ sono in combinazione oscillatoria. Nei due cristalli si poterono misurare esattamente i seguenti angoli:

Fig. 11.

I	$(0001):(10\bar{1}1) = 44°4'$		da cui $a:c = 1:0{,}83826$	
II	$(10\bar{1}0):(10\bar{1}1)$	45 58	» » »	$1:0{,}83729$
»	$(01\bar{1}0):(01\bar{1}1)$	45 54 ½	» » »	$1:0{,}83899$.

Come valore medio si ha, perciò, $a:c = 1:0{,}8382$ e $(0001):(10\bar{1}1) = 44°4'$ calc. Dalle misure di Covelli si deduce, per questo angolo, 44°5' e da quelle di Breithaupt 44°4'.

Le mie nuove costanti sono, forse, data la precisione delle misure e la loro concordanza, da preferirsi a quelle che ho calcolato in base all'angolo fondamentale di Covelli: resta pur sempre veramente degna di ammirazione l'esattezza che seppe raggiungere il Covelli già nel 1826, nella prima ricerca cristallografica eseguita in Italia col goniometro a riflessione.

Il nuovo materiale rinvenuto ha permesso anche di eseguire delle ricerche più complete sulla sfaldatura basale della caliofilite. Avendo io osservato che questa sfaldatura nella pseudonefelina di Capo di Bove non esiste, emisi già il dubbio (*Mineralogia vesuviana*, pag. 180) che quella riscontrata nella caliofilite rappresenti, più che una vera sfaldatura, una direzione di scorrimento.

I risultati delle nuove indagini possono riassumersi nel modo seguente. In parecchi lunghi aghetti isolati, costituiti da pochi individui in accrescimento parallelo, ho potuto constatare l'esistenza di una sfaldatura basale abbastanza nitida. In molti grossi fasci di cristalli, invece, questa sfaldatura può dirsi assolutamente mancante, poichè le superficie di rottura perpendicolari all'asse principale sono irregolarissime. In altri fasci, invece, essa appare, ma molto imperfetta.

Finalmente, in alcuni fasci appaiono assai evidenti quelle specie di fenditure incipienti, che furono già descritte dal Covelli col nome di giunte: sulle facce di $\{10\bar{1}0\}$ esse sono sensibilmente parallele agli spigoli di combinazione con la base, ma il loro decorso non è molto regolare, e se si provoca la rottura in corrispondenza di quelle giunture, si ottengono delle superficie piuttosto irregolari. Quanto si è detto, dimostra che si ha a che fare non con una vera sfaldatura, ma con una direzione di scorrimento, ora più, ora meno pronunciata, e che può anche non essere manifesta.

Le osservazioni che precedono sono state eseguite sulla caliofilite tipica, leggermente giallognola, corrispondente al materiale originale di Covelli, di E. Scacchi, di Mierisch. Di aspetto molto diverso è la caliofilite che si rinviene in alcune geodi di blocchi calcarei, come prodotto di trasformazione della leucite.

La trasformazione della leucite in caliofilite è stata da me già descritta nella *Mineralogia vesuviana* (pag. 134), ma non avendo io potuto, per l'insufficienza del materiale disponibile, determinare nè la composizione chimica quantitativa, nè, mediante le figure di corrosione, la classe cristallina del minerale formatosi a spese della leucite, poteva tuttora sussistere il dubbio che, invece di vera e propria caliofilite, si fosse trattato di un minerale della serie davyna-microsommite, che presenta termini tanto svariati. Grazie a nuovi studî che sono stati resi possibili dal recente rinvenimento di materiale più abbondante, sono ora in grado di pienamente confermare quanto avevo esposto nella *Mineralogia vesuviana*.

Lo scorso anno è stato, infatti, trovato un blocco calcareo, una grande geode del quale era occupata da grossi noduli di leucite grigio-scura, bucherellati e corrosi, trasformati, nelle parti superficiali, in un minerale bianco, con splendore setaceo, dello stesso aspetto di quello già da me descritto, e somigliante, senza dubbio, assai, alle varietà a facies cavolinitica della serie davyna-microsommite, ma che fu riconosciuto appartenere alla caliofilite.

In vicinanza delle masserelle più abbondanti di quest'ultima, la leucite prende spesso un colore nerastro, e si arricchisce in cristallini di augite verde nerastra che

si rinvengono abbondantemente nelle masserelle di caliofilite. Rara è la meionite, in gruppi di cristallini per lo più freschi e splendentissimi, avvolti dalla caliofilite. In tutta la massa dei noduli di leucite si vedono, poi, aghetti e ciuffettini di caliofilite intimamente legata alla leucite, ed è possibile seguire la trasformazione in tutti i suoi dettagli.

La caliofilite si presenta in masserelle di colore bianco, con splendore setaceo pronunciato, costituite da fascetti di cristallini aghiformi confusamente intrecciati.

I singoli fascetti risultano talvolta formati da cristallini riuniti in associazione più o meno esattamente parallela, ma più spesso, invece, si ha una disposizione a covone o a fibre divergenti da un punto.

Qua e là, specialmente nelle minute cavità delle quali è cosparsa la leucite, si osservano anche dei cristalli isolati di caliofilite, incolori e trasparenti. Gli aghetti che costituiscono i fascetti raramente superano i 5-6 mm. di lunghezza: il loro spessore è veramente minimo.

Esaminando al microscopio gli aghetti liberi, o quelli che si possono facilmente isolare dai fascetti, che si suddividono per la semplice pressione delle dita, si vede come essi non presentino traccia di sfaldatura prismatica, ma, invece, non di rado quelle fenditure corrispondenti alla separazione basale, che abbiamo visto occorrere spesso nella caliofilite tipica. Nei cristallini meno minuti ho potuto ottenere nitide figure di corrosione, sia con l'acido cloridrico che col fluoridrico: esse sono identiche a quelle che Baumhauer e Traube hanno descritto per la nefelina. Quelle da me studiate corrispondono specialmente alla Fig. 1 *b* e 2 *c* del lavoro di Traube. È, così, dimostrata anche per la caliofilite in questione l'appartenenza alla classe esagonale-piramidale del sistema esagonale.

Gli stessi risultati io ho ottenuto, ora, anche su facce di $\{10\bar{1}0\}$ della caliofilite tipica, della quale non avevo prima studiato che facce $\{0001\}$.

Il peso specifico della caliofilite bianca, setacea della quale ci stiamo occupando è 2,56, alquanto inferiore al valore da me trovato per la caliofilite giallognola (2,628). Ciò dipende, evidentemente, dal fatto che il nostro minerale è, a differenza di molte delle varietà giallastre, pressochè privo di calcio.

La birifrazione è debole, negativa.

L'analisi chimica ha dato i seguenti risultati:

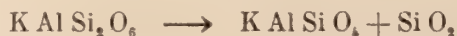
		Rapporti molecolari		
SiO_2	38,53	0,639		2,02
Al_2O_3	32,20	0,315	0,316	1
Fe_2O_3	0,12	0,001		
CaO	0,28	0,005	0,322	1,01 [1]
MgO	tr.	—		
K_2O	26,62	0,283		
Na_2O	2,12	0,034		
Cl	0,14	0,004		
Augite insolubile	0,15			
	100,16			
O equiv. 2 Cl	0,03			
	100,13			

[1]) Questo valore si ottiene deducendo dalla somma dei rapporti molecolari di CaO, Na_2O, K_2O la quantità di alcali corrispondente al cloro (0,002).

La caliofilite studiata è, perciò, assai pura, e corrisponde esattamente alla formula $K Al Si O_4$: una parte molto piccola del potassio è sostituita dal sodio, ed una piccolissima dal calcio.

Notevole è la presenza nella caliofilite analizzata di una piccola quantità di cloro, che non può dipendere da inclusioni liquide con cristallini di cloruro sodico, perchè l'esame microscopico si può dire che non ne ha quasi lasciato scorgere. Degno di attenzione è il fatto che anche la caliofilite da me osservata come prodotto di trasformazione della leucite nella collezione Johston-Lavis mi ha dato una netta reazione per il cloro, sicchè sembra che questo elemento si rinvenga costantemente nella caliofilite originatasi a spese della leucite, mentre il residuo solforico SO_4 pare mancare completamente, se non è presente in tracce minime, sia nella caliofilite della coll. Johnston-Lavis, che in quella ora descritta

La presenza del cloro nelle caliofiliti in questione può essere spiegata in due modi: ammettendo, cioè, che il composto $K Al Si O_4$ possa dare soluzioni solide col clorosilicato della serie davyna-microsommite, ovvero che si abbia a che fare con una miscela meccanica di caliofilite e di microsommite. Contro la prima ipotesi potrebbe, forse, obbiettarsi che caliofilite e davyna-microsommite appartengono a due classi cristallografiche diverse, il che potrebbe costituire un impedimento alla formazione di cristalli misti tra i due minerali. In realtà, l'obbiezione non ha valore, perchè non soltanto sono noti varî casi di formazione di soluzioni solide tra composti appartenenti a classi diverse dello stesso sistema cristallino, ma già nella serie davyna-microsommite si hanno delle soluzioni solide dei due allumosilicati $Na Al Si O_4$ e $K Al Si O_4$ con i cloro-solfato- e carbonatosilicati caratteristici, appunto, di quella serie. In favore della seconda ipotesi parla il fatto che Lacroix ed io abbiamo osservato abbastanza spesso, nei blocchi rigettati dal Vesuvio specialmente durante l'eruzione del **1906**, la trasformazione della leucite in microsommite. È, però, da osservare che la formazione di caliofilite a spese della leucite può considerarsi avvenuta, come ho mostrato nella *Mineralogia vesuviana*, molto semplicemente, per eliminazione di biossido di silicio

$$K Al Si_2 O_6 \longrightarrow K Al Si O_4 + Si O_2$$

il quale, reagendo con gli ossidi di calcio e di magnesio del calcare dà origine al pirosseno. Per passare, invece, dalla leucite alla microsommite, occorre apporto di calcio, di sodio, di cloro e di solfo (allo stato di residuo solforico) in quantità notevoli.

I due processi di trasformazione, in caliofilite ed in microsommite, si distinguono, perciò, nettamente l'uno dall'altro, e sembrano, anzi, escludersi a vicenda, perchè nei numerosi blocchi del **1906** esaminati, sia da Lacroix, che da me, non si è mai accertata l'esistenza della caliofilite accanto alla microsammite, nelle leuciti trasformate più o meno completamente.

Per cercar di risolvere la questione, ho determinato con la lamina di gesso il carattere ottico della direzione di allungamento di un gran numero di aghetti della caliofilite analizzata, ma ho in tutti, costantemente, osservato che quella direzione è asse di massima elasticità La presenza della microsommite, che è otticamente positiva, resta, quindi, esclusa.

Non può, invece, negarsi in modo assoluto la presenza di termini negativi di davyna: tuttavia, non deve dimenticarsi che le davyne negative finora studiate presentano birifrangenza debolissima, mentre nel mio materiale io non ho potuto osservare differenze nella birifrangenza dei vari cristallini. A meno che alla caliofilite fosse associata una davyna negativa con una birifrazione molto prossima a quella della caliofilite, deve ritenersi accertato che, nel nostro caso almeno, ci troviamo di fronte ad una soluzione solida del clorosilicato della davyna-microsommite nel composto $K\,Al\,Si\,O_4$.

Questa constatazione non è priva di interesse, perchè finora non era stato accertato che il caso opposto: solubilità allo stato solido, cioè, della caliofilite nei cloro-carbonato- e solfatosilicati della davyna-microsommite. Poteva, perciò, sorgere legittimo il dubbio che, analogamente a quanto è stato osservato dal Bruni prima, e dal Tammann e dai suoi allievi, poi, in moltissime coppie di sostanze, la miscibilità non si verificasse che in un senso solo. La caliofilite clorifera studiata ci mostra, ora, che la solubilità allo stato solido dei composti indicati è scambievole. In base a quanto mi è finora noto sembra, però, che la caliofilite non possa sciogliere che una quantità relativamente piccola del clorosilicato.

NEFELINA

Lo scorso anno è stato trovato al Monte Somma un blocco molto notevole, composto in gran prevalenza da nefelina, accompagnata da augite verde-nera, da idocrasio e da wollastonite. Specialmente nella massa del blocco, l'idocrasio si presenta in alcuni punti profondamente alterato, e trasformato in un minerale bianco, che forma dei cristallini tabulari, molto allungati, riuniti in fascetti, che è facile riconoscere per wollastonite. La forma dei cristalli di idocrasio in generale non è conservata: molte volte, però, è ancora riconoscibile. In questi casi, le tavolette allungate di wollastonite, intramezzate da un po' di calcite, e separate qua e là l'una dall'altra da spazî vuoti, sono raggruppate in modo da avere gli assi *b* sensibilmente paralleli tra loro ed all'incirca all'asse *c* dell'idocrasio dall'alterazione del quale provengono. Nell'interno dei cristalli così trasformati, esistono tuttora particole più o meno alterate di idocrasio. Che il minerale formatosi a spese dell'idocrasio sia effettivamente wollastonite risulta dalle proprietà ottiche e chimiche, identiche, appunto, a quelle della wollastonite.

La nefelina si presenta in due varietà ben distinte. Una di esse costituisce quasi da sola una parte cospicua del blocco, e forma un aggregato di grossi cristalli $\{10\bar{1}0\}\{0001\}$, che misurano fino a 20 mm. di lunghezza (nella direzione dell'asse verticale), per 12-13 mm. di larghezza e di spessore: un cristallo ora rotto doveva, anzi, raggiungere i mm. $30 \times 20 \times 20$. Questa varietà di nefelina è di colore un po' biancastro, con splendore vitreo pronunciato, ed ha lo stesso aspetto della nefelina tipica. In alcuni punti del blocco, invece, si ha una pasta, ora quasi compatta, ora nettamente cristallina, composta di nefelina, di idocrasio e di pirosseno con poca wollastonite. La nefelina di queste parti del blocco è generalmente un po' grigiastra, ha uno splendore particolare, somigliante alquanto a quello del vetro lavato, e si distingue nettamente dall'altra descritta. Qua e là si aprono delle geodi,

tappezzate da bellissimi cristalli di nefelina (sui quali sono spesso impiantati dei cristallini di augite verde-nera), da augite, da idocrasio, e spesso anche da wollastonite in fascetti di aghi molto alterati. La nefelina delle geodi è identica alla seconda varietà grigiastra che si è ricordata.

I cristalli di nefelina lievemente grigiastra delle geodi non superano, di solito, i 5 mm. nella loro maggiore dimensione, e presentano habitus variabilissimo. Le forme osservate in questi cristalli sono $c\{0001\}$, $m\{10\bar{1}0\}$, $a\{11\bar{2}0\}$, $p\{10\bar{1}1\}$, $z\{20\bar{2}1\}$, $s\{11\bar{2}1\}$. Nella maggior parte dei casi corrispondono alla Fig. 12, con l'avvertenza, però, che spesso z manca, e che non rare sono alcune faccettine di s ed altre, esilissime, di a. Altri cristalli, specialmente quelli più piccoli, sono schiacciati secondo la base, e somigliano alla Fig. 39 della *Mineralogia vesuviana*, mentre non ne mancano di allungati nella direzione dell'asse verticale, in modo da tendere ad avvicinarsi alla Fig. 40 della *Min. Ves.* Lo sviluppo delle varie forme è molto irregolare, e sia p che z spesso non hanno che una parte delle loro facce, e quelle esistenti in uno stesso cristallo possono possedere grandezza diversissima. Viceversa non sono rari i cristalli con sviluppo quasi modello. I valori angolari sono quelli della nefelina tipica.

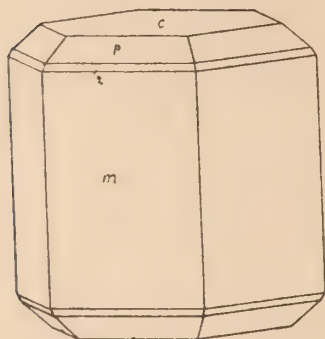



Fig. 12.

Le sezioni basali della nefelina delle geodi non presentano anomalie ottiche, si mostrano, però, molto ricche in inclusioni. Assai diffuse sono le inclusioni di augite verde-scura, che nelle sezioni sottili appare verde-pallidissima, con pleocroismo quasi insensibile. Frequenti sono le inclusioni liquide con libella, che si rinvengono sopratutto concentrate in alcuni punti, specialmente in vicinanza dell'orlo esterno dei cristalli. Molte sono rotondeggianti ed ovaloidi, ma parecchie invece, presentano contorno esagonale, con due lati paralleli di gran lunga più estesi degli altri: questi lati più lunghi sono paralleli allo spigolo $[0001 : 10\bar{1}0]$ più vicino alla inclusione. Quando diverse di queste inclusioni a contorno esagonale sono ravvicinate, si dispongono tutte parallelamente fra loro. Spesso contengono uno o due cubetti, perfettamente conformati, di alite o di silvite, che possono raggiungere fino $^1/_{100}$ di millimetro di lato. La quantità e la grandezza delle inclusioni liquide è molto variabile. In alcuni cristalli ne esistono relativamente poche e piccolissime, mentre in altri sono abbondanti e, per giunta, grandi, poichè talune arrivano a misurare, quantunque eccezionalmente, poco meno di $^1/_{10}$ di millimetro di lunghezza.

Gli indici di rifrazione di questa nefelina delle geodi sono stati determinati in un prisma ad angolo rifrangente (vero) di 44°6′, per la luce del sodio e per alcune altre lunghezze d'onda mediante i filtri di Wratten.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

$\lambda =$	667	Na	533	453	
$\omega =$	1,5343	1,5376	1,5398	1,5474	$\omega_{453} - \omega_{667} = 0{,}0131$
$\varepsilon =$	1,5308	1,5339	1,5356	1,5430	$\varepsilon_{453} - \omega_{667} = 0{,}0122$.
$\omega - \varepsilon =$	0,0035	0,0037	0,0042	0,0044	

Secondo il Dr. F. Stella-Starrabba, la composizione chimica della nefelina studiata è la seguente:

		Rapporti molecolari		
SiO_2	42,73	0,709		2,14
Al_2O_3	33,62	0,329	0,332	1
Fe_2O_3	0,51	0,003		
CaO	1,08	0,019		
Na_2O	17,00	0,274	0,350	1,05 .
K_2O	5,40	0,057		
	100,34			

Trattando il minerale con acido cloridrico, si ha netto odore di idrogeno solforato.

Le nostre cognizioni sulle proprietà ottiche della nefelina sono così scarse, che mi è sembrato opportuno eseguire delle determinazioni degli indici di rifrazione per varie lunghezze d'onda anche in altre varietà.

Ho fatto tagliare un prisma con angolo rifrangente (vero) di $30°3\,^3/_4{}'$ da un bel cristallo di nefelina tipica staccato da una geode del blocco di sanidinite nel quale ho rinvenuto la baddeleyite. I risultati ottenuti sono i seguenti:

$\lambda =$	667	Na	533	453	
$\omega =$	1,5334	1,5376	1,5392	1,5452	$\omega_{453} - \omega_{667} = 0,0118$
$\varepsilon =$	1,5303	1,5345	1,5361	1,5421	$\varepsilon_{453} - \varepsilon_{667} = 0,0118$.
$\omega - \varepsilon =$	0,0031	0,0031	0,0031	0,0031	

Da una microsienite nefelinica a hiortdahlite ho isolato dei bei cristallini di nefelina, limpidi e trasparenti, in alcuni dei quali oltre $\{10\bar{1}0\}$ e $\{0001\}$ ho osservato anche qualche faccetta di $\{10\bar{1}1\}$.

Mediante un prisma con angolo rifrangente di $30°6'$ ho trovato per gli indici di rifrazione i valori seguenti:

$\lambda =$	667	Na	533	453	
$\omega =$	1,5338	1,5374	1,5390	1,5459	$\omega_{453} - \omega_{667} = 0,0121$
$\varepsilon =$	1,5302	1,5341	1,5357	1,5439	$\varepsilon_{453} - \varepsilon_{667} = 0,0137$.
$\omega - \varepsilon =$	0,0036	0,0033	0,0033	0,0020	

La composizione chimica di questa nefelina, determinata dal Dr. F. Stella-Starrabba, è la seguente:

		Rapporti molecolari		
SiO_2	44,29	0,734		2,19
Al_2O_3	33,82	0,331	0,335	1
Fe_2O_3	0,61	0,004		
CaO	0,94	0,017		
MgO	0,06	0,001	0,336	1 .
Na_2O	16,89	0,272		
K_2O	4,29	0,046		
	100,90			

Le tre nefeline studiate appartengono senza dubbio alla nefelina tipica, come risulta in modo sicuro per due di esse dalle analisi del Dr. Stella-Starrabba, e per l'altra dal suo aspetto, dalla mancanza di ogni sfaldatura, ecc. Queste tre nefeline presentano, per gli indici di rifrazione, dei valori molto vicini, ma diversi notevolmente da quelli che erano stati finora osservati nella nefelina del Monte Somma. Le determinazioni di Des Cloizeaux, di Wolff, di Wadsworth e di Zimányi, già riportate nella *Mineralogia vesuviana* (pag. 185) e quelle più recenti di Wülfing [1]) hanno dati i risultati seguenti (per la luce del sodio):

	Des Cloizeaux	Wolf	Wadsworth	Zimányi	Wülfing
$\omega =$	1,539 — 1,542	1,5416	1,5427	1,5424	1,5417
$\varepsilon =$	1,534 — 1,537	1,5376	1,5378	1,5375	1,5378
$\omega - \varepsilon =$	0,005	0,0040	0,0049	0,0049	0,0039

I valori da me osservati sono nettamente più bassi, e si avvicinano a quelli che K. Zimányi [2]) ha trovato per l'eleolite di Laurvik, e, cioè:

$$\omega_{Na} = 1,5364 \qquad \varepsilon_{Na} = 1,5322 \qquad (\omega - \varepsilon)_{Na} = 0,0042 .$$

Anche le determinazioni di K. Hlawatsch [3]) nella eleolite del Monte Mulatt presso Predazzo

$$\omega_{Na} = 1,539 \qquad \varepsilon_{Na} = 1,534$$

si avvicinano alle mie.

In base ai risultati da me ottenuti deve ammettersi l'esistenza al Monte Somma di due tipi di nefelina: uno con $\omega = 1,537 - 1,538$ $\varepsilon = 1,534$ circa (per la luce del sodio), l'altro, invece, con $\omega = 1,542$ $\varepsilon = 1,538$ circa, pure per la luce del sodio. È assai probabile che i due tipi sieno legati da termini di passaggio. Infatti, nella nefelina che accompagna la cancrinite, e che verrà in seguito descritta, io ho trovato

$$\omega_{Na} = 1,5404 \quad \varepsilon_{Na} = 1,5372 \qquad (\omega - \varepsilon)_{Na} = 0,0032 .$$

Se e quali relazioni esistono, dal punto di vista della composizione chimica, fra i due gruppi, non è possibile, ora, saperlo, non essendo state analizzate le nefeline studiate da Wolff, da Wadsworth, da Zimányi e da Wülfing, che hanno fornito i valori più elevati per gli indici di rifrazione.

Se noi esaminiamo le due analisi eseguite dal Dr. Stella-Starrabba, vediamo che esse corrispondono a due tipi ben diversi di nefelina: quella grigia è più ricca in potassio e più povera in silice, e segue la formula $(Na_2, K_2, Ca)O . Al_2O_3 . 2,14\, SiO_2$, mentre quella della microsienite a hiortdahlite contiene meno

[1]) *Ueber die Lichtbrechung des Kanadabalsams.* Sitzungsber. der Heidelberger Akademie der Wissensch., 1911, 20. Abh.

[2]) Zeitsch. für Kryst., 1894, XXII, 333.

[3]) Tschermak's min. petr. Mitth., 1901, XX, 42.

potassio e più silice, e le spetta la formula $(Na_2, K_2, Ca) O . Al_2 O_3, 2{,}10 Si O_2$. Ad onta di queste differenze cospicue, gli indici di rifrazione per la luce del sodio delle due nefeline analizzate sono quasi identici, il che fa pensare che l'effetto ottico prodotto da una maggiore quantità del silicato $K Al Si O_4$ viene in certo modo neutralizzato da quello dovuto ad una diminuzione dell'allumosilicato più ricco in silicio di quello espresso dalla formula $Na Al Si O_4$. Questo fenomeno ci lascia comprendere come, a differenze relativamente piccole nella composizione centesimale, ma determinanti rapporti diversi dei silicati $K Al Si O_4$, $Na Al Si O_4$, $Na_2 Al_2 Si_x O_y$ [1]), $(x > 2)$ possano corrispondere variazioni considerevoli negli indici di rifrazione [2]). La ricerca delle relazioni intercedenti fra le costanti ottiche delle nefeline e la loro composizione si presenta, perciò assai difficile, ed è anche certo, come vedremo fra poco, che sui diversi valori degli indici di rifrazione influiscono altri fattori, come accade nella serie davynamicrosommite, nella quale riesce impossibile, almeno per ora, il trovare una relazione qualsiasi fra le proprietà ottiche e la composizione.

Se le tre nefeline da me studiate presentano valori molto vicini degli indici di rifrazione per la luce del sodio, merita grande attenzione il fatto che nelle loro costanti ottiche si notano anche differenze importantissime. Mentre, infatti, nella nefelina grigiastra delle geodi del blocco di nefelina l'indice ω ha una dispersione notevolmente più forte di ε, precisamente il contrario accade nella nefelina della microsienite a hiortdahlite: la nefelina della sanidinite con ortite, baddeleyite, ecc. possiede, invece, nei limiti della precisione raggiungibile, una dispersione presso a poco eguale per ω e per ε. Da questo singolare comportamento ne segue che nella nefelina delle geodi del blocco di nefelina dal rosso al violetto la birifrangenza aumenta, non subisce variazioni apprezzabili nelle mie condizioni sperimentali nella nefelina della sanidinite, e diminuisce, invece, in quella della microsienite [3]).

Mi è sorto il dubbio che l'azione prolungata di una temperatura elevata potesse esercitare una influenza apprezzabile sul valore degli indici di rifrazione della nefelina. L'esperienza ha confermato pienamente la mia supposizione. Io ho riscaldato per un'ora alla temperatura di 810° in un forno elettrico per crogiuoli di Heraeus il primo prismetto di nefelina della sanidinite con ortite, ecc., nel quale si

---

[1]) Come è noto, mentre Morozewicz assegna la formula $\overset{I}{R}_2 Al_2 Si_3 O_{10}$ al silicato più ricco in silicio di $\overset{I}{R} Al Si O_4$ (o $\overset{I}{R}_2 Al_2 Si_2 O_8$) esistente nella nefelina, W. T. Schaller e N. L. Bowen hanno recentemente proposto di considerare la nefelina come una soluzione solida dei silicati $Na Al Si O_4$, $Na Al Si_3 O_8$ e $K Al Si O_4$.

[2]) Nelle due analisi eseguite dal Dr. Stella-Starrabba il contenuto in calcio è praticamente identico, ed il confronto delle proprietà ottiche delle due nefeline alle quali si riferiscono è possibile. Se fosse stato altrimenti, il confronto non sarebbe stato plausibile, perchè il Bowen (Am. Journ. Sc., 1912, XXXIII, 551) ha dimostrato che i cristalli misti esagonali di $Na Al Si O_4$ e $Ca Al_2 Si_2 O_8$ presentano una diminuzione della birifrangenza al crescere della quantità del secondo composto, diventano isotropi quando essa raggiunge il 23 %, ed aumentando ancora si ha cambiamento del segno ottico, che da negativo divieno positivo.

[3]) Questi risultati sono stati da me ripetutamente controllati. Le differenze tra i valori della birifrazione per le varie lunghezze d'onda sono piccole, ma non può esservi dubbio sul *senso* della variazione, avendo le numerose letture eseguite in tempi diversi condotto sempre allo stesso risultato.

erano eseguite le determinazioni dianzi riferite. Il prismetto era stato messo nel forno freddo, ed occorse circa un'ora per portarlo alla temperatura di 810°. Il raffreddamento avvenne in modo, che la temperatura in mezz'ora scese da 810° a 200°. Allora il prismetto fu tolto dal forno e messo in un tubetto di vetro. In seguito al riscaldamento così energico, il prismetto non ha presentato che qualche piccola fenditura, ma una delle due facce ha dato al goniometro immagini meno buone di prima, sicchè le misure presentano un grado di esattezza alquanto inferiore a quelle eseguite prima, ma l'incertezza non supera quattro unità della quarta cifra decimale.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

$\lambda =$	667	Na	533	453	
$\omega =$	1,5357	1,5395	1,5412	1,5478	$\omega_{453} - \omega_{667} = 0{,}0121$
$\varepsilon =$	1,5316	1,5362	1,5381	1,5453	$\varepsilon_{453} - \varepsilon_{667} = 0{,}0137$.
$\omega - \varepsilon =$	0,0041	0,0033	0,0031	0,0025	

L'effetto prodotto dal riscaldamento è interessantissimo: i due indici ω ed ε hanno acquistato un valore più elevato, e, ciò che è davvero molto notevole, mentre prima del riscaldamento la birifrangenza era sensibilmente la stessa per le varie lunghezze d'onda, ora diminuisce dal rosso al violetto, come nella nefelina della microsienite a hiortdahlite. Ed anche la dispersione di ω e di ε ha assunto i valori osservati in quest'ultima.

Questo risultato dimostra che, effettivamente, nella nefelina gli indici di rifrazione non dipendono soltanto dalla composizione chimica, ma anche in modo sicuro dalla temperatura alla quale il minerale è stato esposto, dopo la sua formazione, per un tempo più o meno lungo. È assai probabile che quanto ho constatato accadere nella nefelina si verifichi anche nella davyna-microsommite [1]), il che contribuirebbe a spiegare perchè nei minerali di quel gruppo non esiste nessuna relazione sicura fra la composizione chimica e le proprietà ottiche.

Volendo controllare i risultati ottenuti, ho fatto tagliare un altro prisma da un cristallo di nefelina della sanidinite con baddeleyite. I valori ottenuti per gli indici di rifrazione sono notevolmente diversi da quelli trovati nel primo prisma, il che mostra che nei cristalli di nefelina di uno stesso blocco possono aversi variazioni notevoli negli indici di rifrazione. Ho, infatti, avuto:

$\lambda =$	667	Na	533	453	
$\omega =$	1,5323	1,5359	1,5377	1,5439	$\omega_{453} - \omega_{667} = 0{,}0116$
$\varepsilon =$	1,5287	1,5323	1,5344	1,5408	$\varepsilon_{453} - \varepsilon_{667} = 0{,}0121$.
$\omega - \varepsilon =$	0,0036	0,0036	0,0033	0,0031	

Questi valori sono più bassi di quelli trovati nell'altro cristallo, e pressochè identici a quelli dati da Zimányi per l'eleolite di Laurvik, che furono riferiti a pag. 26. Anche nel nuovo prisma la birifrangenza subisce variazioni minime al va-

---

[1]) Io mi riserbo di eseguire delle indagini in proposito e di estenderle anche ad altri minerali.

riare della lunghezza d'onda: sembra aversi, tuttavia, una lieve diminuzione dal rosso al violetto. Dopo il riscaldamento a 810° si ha:

$$\omega_{Na} = 1,5364$$

$$\varepsilon_{Na} = 1,5329$$

$$(\omega - \varepsilon)_{Na} = 0,0035 \ .$$

Si ha pure, perciò, un innalzamento nel valore degli indici di rifrazione, ma molto più tenue che nel primo prisma.

Anche negli altri prismi studiati l'azione prolungata di una temperatura elevata produce lievi variazioni negli indici di rifrazione. Le modificazioni prodotte appaiono, però, abbastanza irregolari, e mostrano la natura molto complicata del fenomeno, che sembra manifestarsi in modo diverso a seconda della composizione della nefelina che si riscalda.

CANCRINITE

Io ho riferito alla cancrinite (*Mineralogia vesuviana*, pag. 201) un minerale del Monte Somma analizzato dal Rammelsberg, e considerato generalmente come un prodotto di alterazione della nefelina. La vera natura del materiale originale del Rammelsberg è rimasta, tuttavia, dubbiosa, perchè se da un lato le mie argomentazioni rendevano assai verosimile la possibile esistenza della cancrinite nei blocchi del Monte Somma, dall'altro lato restava il fatto che nè Lacroix, nè io, per non parlare di tanti altri studiosi meno recenti del nostro vulcano, avevamo mai avuto occasione di osservare, nell'abbondante materiale studiato, un minerale con i caratteri della cancrinite. Soltanto negli ultimi mesi, l'esame approfondito di certi cristalli che a prima vista potevano scambiarsi per della sodalite o della nefelina ricoperte di calcite, mi ha permesso di porre fuori di dubbio la presenza reale della cancrinite al Monte Somma, non solo, ma, grazie alle proprietà del materiale disponibile, ho potuto anche determinare, con sufficiente esattezza, le costanti cristallografiche, che per la cancrinitte erano, finora, conosciute soltanto con grossolana approssimazione.

Il minerale in questione è stato rinvenuto in due frammenti di un blocco di calcare metamorfosato, in ciascuno dei quali si apriva una grande geode, tutta tappezzata da mica di colore verdognolo chiaro, da idocrasio di colore giallastro, da calcite nelle solite forme gocciolari ed anche in nitidi cristalli, e da un minerale bianco, opaco, in prismi esagonali, che si riconobbe appartenente alla cancrinite.

La cancrinite del Monte Somma si presenta in cristalli costantemente allungati nella direzione dell'asse verticale, ora quasi aghiformi, ora, invece, tozzi. I primi misurano fino circa 8 mm. di lunghezza per $^1/_2$ mm. di larghezza, gli altri, invece raggiungono circa 5 mm. nelle tre dimensioni.

Frequenti sono anche i gruppi costituiti da varî grossi cristalli confusamente riuniti. I cristalli di cancrinite appaiono bianchi, opachi, con le facce quasi sempre prive di splendore: essi sono quasi costantemente ricoperti da un velo di calcite, per lo più esilissimo, e che talvolta costituisce appena una velatura sottilissima,

dalla quale è allora facile liberare i cristallini. I cristalli ed i gruppi di cancrinite si frantumano abbastanza facilmente.

La causa di questo fenomeno non è da ricercare in un processo di alterazione al quale sia stato sottoposto il minerale, ma all'esistenza di due sfaldature, una secondo le facce di un prisma esagonale, l'altra parallelamente alla base. La prima è la sfaldatura tipica, ordinaria della cancrinite, nella quale di solito quella basale è meno pronunciata: nella cancrinite del Monte Somma la sfaldatura basale è più facile di quella prismatica, e nei cristallini più nitidi e sottili si vedono benissimo numerose fenditure interne, parallele alla base (Fig. 13). I cristallini aghiformi, liberati dall'involucro superficiale di calcite, appaiono limpidi, incolori, trasparenti. I cristalli più grandi, tozzi, se vengono rotti si presentano sempre un po' biancastri in massa, con splendore alquanto perlaceo, mentre i frammenti sono perfettamente incolori. Nell'interno dei gruppi di cristalli si rinvengono talvolta dei cristallini con splendore vitreo, incolori e trasparenti. Sulle facce di sfaldatura parallele alla base lo splendore è sempre tendente al madreperlaceo. Nell'interno dei gruppi di cristalli di cancrinite ho osservato talvolta inclusi dei cristallini di idocrasio, di colore giallo-vino chiaro, presso a poco altrettanto lunghi, che larghi, offrenti la combinazione }001{ }110{ }100{ }111{: uno di essi raggiungeva i tre millimetri. Gli stessi cristallini di idocrasio si trovano anche impiantati sulla cancrinite.

Fig. 13.

I cristalli di cancrinite non presentano, per lo più, altre forme che il prisma esagonale m}10$\bar{1}$0{, limitato dalle facce basali di sfaldatura. Non di rado al prisma }10$\bar{1}$0{ si unisce l'altro, sempre subordinato, di secondo ordine a}11$\bar{2}$0{ e raramente, invece, anche alcune faccette del prisma dodecagono n}21$\bar{3}$0{. Sia a, che n fornirono buone misure:

$(10\bar{1}0):(11\bar{2}0)$	$= 30°0'$, $29°57'$	mis. $30°0'$	calc.
$(10\bar{1}0):(21\bar{3}0)$	$19\ 17$	» $19\ 6\frac{1}{2}$	»

In un cristallo ho osservato anche una bipiramide }$ho\bar{h}l${, con parecchie delle sue faccette ben misurabili: la base mancava completamente. Delle esatte misure hanno dato:

$$(10\bar{1}0):(ho\bar{h}l) = 64°42' ,\ 64°43' ,\ 64°44\tfrac{1}{2}' ,\ 64°46' \qquad \text{Media } 64°44' .$$

La bipiramide in questione corrisponde, perciò, a quella già osservata da A. E. Törnebohm [1]) nella cancrinite della sienite di Elfdalen e da W. C. Brögger [2]) in quella di Barkevik, ed alla bipiramide q della serie davyna-microsommite. Nella *Mineralogia vesuviana* ho già esposto le ragioni per le quali alla bipiramide q della davyna-microsommite è da darsi il simbolo }10$\bar{1}$4{, contrariamente all'uso generale,

---

[1]) Geol. Fören. i Stockholm Förhandl., 1803, VI, 390.

[2]) Zeitsch. für Kryst., 1890, XVI, 244.

secondo il quale si prende come fondamentale. Date le intime relazioni che passano fra cancrinite, natrodavyna e davyna-microsommite, è opportuno dare a tutti questi minerali una orientazione corrispondente. In base al valore trovato nella cancrinite per l'angolo $(10\bar{1}0):(10\bar{1}4)$ si calcola

$$a:c=1:1{,}6350 .$$

Considerando, invece, la bipiramide osservata nella cancrinite come fondamentale, si ha:

$$a:c=1:0{,}4088 .$$

Törnebohm e Brögger avevano ottenuto rispettivamente $a:c=1:0{,}4224$ e $a:c=1:0{,}4409$, dei valori, cioè, notevolmente diversi dal mio, che è, però, indubbiamente più esatto. L'angolo *mq* era stato dal Törnebohm misurato in sezioni sottili al microscopio, da Brögger, invece, in cristalli non adatti per misure precise, tanto che i valori da lui trovati oscillano tra 60° e 66° [1]).

Nel cristallo studiato ho misurato anche alcuni altri angoli, ottenendo accordo quasi perfetto con i valori calcolati in base alla costante surriferita:

$(10\bar{1}0):(01\bar{1}4)=77°40'$, $77°40'$, $77°40\,{}^{1}/_{2}{}'$, $77°41'$, $77°42'$ Media $77°41'$ mis. $77°40\,{}^{2}/_{3}{}'$ calc.
$(10\bar{1}4):(1\bar{1}04)=24°36'$, $24°38\,{}^{1}/_{2}{}'$, $24°39'$ Media $24°38'$ mis. $24°38\,{}^{2}/_{3}$ calc.

Per la sua costante cristallografica, la cancrinite si distingue nettamente non soltanto dai minerali del sottogruppo nefelina, ma anche da quelli, più affini, che, come la natrodavyna e la davyna-microsommite, sono stati, appunto, da me riuniti, con la cancrinite, in un unico sottogruppo. Si ha, infatti:

	2*c*
Caliofilite	1,6764
Pseudonefelina	1,6736
Nefelina	1,6778
	c
Davyna-microsommite	1,6832 — 1,6709
Natrodavyna	1,6720
Cancrinite	1,6350

Mentre nei primi cinque minerali *c* (o 2*c*) ha quasi lo stesso valore, nella cancrinite, invece, è notevolmente più piccolo.

Ho già mostrato (*Mineralogia vesuviana*, pag. 207) che nel sottogruppo cancrinite non è possibile riconoscere alcuna netta relazione fra la composizione chimica e le proprietà ottiche. Altrettanto accade per la costante cristallografica. In base

[1]) Non è inutile notare che, come osservò lo stesso Brögger, le misure migliori dettero i valori più elevati, più prossimi, pertanto, a quello da me ottenuto. La costante di Törnebohm è calcolata da $mq=64°$.

alle determinazioni esistenti, e prendendo per i silicati costituenti i minerali del sottogruppo cancrinite le formule più semplici $Na\,Al\,Si\,O_4$, $Na_2(Al\,.\,Cl)\,Si\,O_4$ etc. si ha:

	$Na\,Al\,Si\,O_4$	Cl-silicato	SO_4-silicato	CO_3-silicato	c
Cancrinite	0,63	0,02	—	0,22	1,6350
Natrodavyna	0,43	0,26	0,04	0,26	1,6720
Davyna dei blocchi del 1906	0,53	0,26	0,21	—	1,6755

Questi minerali sono veramente comparabili tra loro, perchè in tutti e tre il rapporto $Ca\,O : (Na, K)_2\,O$ è poco diverso: ad onta di ciò, non si riesce a vedere quale relazione passi tra i valori di c e la composizione chimica, e sembrerebbe, anzi, che non ve ne sia nessuna.

La cancrinite del Monte Somma esaminata al microscopio in sezioni sottili si mostra purissima: calcite non si scorge altro che all'orlo esterno, ed in quantità piccolissima qualche volta lungo taluna delle fenditure corrispondenti alla sfaldatura prismatica o alla basale.

La doppia rifrazione è energica e negativa. Esaminando delle sezioni basali di cristallini nitidi non si scorge traccia di anomalie ottiche. In uno di questi cristallini, servendomi di due facce del prisma $\{10\bar{1}0\}$ formanti fra loro un angolo vero di 60°0'30", ho ottenuto, col metodo della deviazione minima, i seguenti valori per gli indici di rifrazione:

	$\lambda = 633$	$\lambda = 570$	$\lambda = 475$
$\omega =$	1,5128	1,5156	1,5207
$\varepsilon =$	1,4887	1,4911	1,4955
$\omega - \varepsilon =$	0,0241	0,0245	0,0252 .

Le due immagini rifratte erano nitidissime, ma troppo poco brillanti per permettere una determinazione sicura con le fiamme del litio, del sodio e del tallio. Mi sono servito, perciò, dei filtri cementati β, δ e η di Wratten, per i quali determinai accuratamente la lunghezza d'onda corrispondente al massimo del campo di trasparenza.

I valori da me trovati sia per la rifrangenza, che per la birifrazione sono alquanto inferiori a quelli finora noti per le cancriniti di Mias e di Lichtfield, nelle quali, infatti, si ha:

Miask $\omega_\rho = 1,5244$ $\varepsilon_\rho = 1,4955$ $\omega_\rho - \varepsilon_\rho = 0,0289$ A. Osann [1])
Lichtfield $\omega = 1,522$ $\varepsilon = 1,499$ $\omega - \varepsilon = 0,028$ (misura diretta) A. Michel-Lévy e A. Lacroix [2])

Le lievi differenze riscontrate tra gli indici di rifrazione della cancrinite del Monte Somma e quella di altre località dipende dal fatto che la composizione chi-

[1]) In H. Rosenbusch: *mikroskopische Physiographie der Mineralien*, 1905, pag. 114.
[2]) *Les minéraux des roches*, 1888, pag. 164.

mica della prima differisce alquanto, come ora vedremo, da quella tipica delle varietà finora analizzate, specialmente per un maggior tenore in calcio. Sembra, perciò, che il valore degli indici di rifrazione e quello della birifrangenza diminuiscano al crescere del calcio, il che andrebbe d'accordo con le osservazioni già ricordate di Bowen sulle soluzioni solide esagonali di $NaAlSiO_4$ e $CaAl_2Si_2O_8$.

La nostra cancrinite ha un peso specifico oscillante tra **2,43** e **2,44**: alcuni frammentini dei cristalli limpidi e trasparenti dei quali si è parlato hanno dato **2,43** a $+ 22°$ C. (le determinazioni furono eseguite col metodo della sospensione).

Con l'acido cloridrico anche diluito si ha effervescenza, che si prolunga fino a che il minerale non si è completamente disciolto. Oltre all'anidride carbonica, si sviluppa anche una lievissima quantità di idrogeno solforato, che si percepisce distintamente già con l'olfatto: una carta all'acetato di piombo esposta all'azione dei gas che si svolgevano si imbrunì nettamente. Mi sono accertato che l'anidride carbonica fa parte integrante del minerale e non è dovuta ad inclusioni od a prodotti di alterazione, facendo agire a freddo l'acido cloridrico su frammentini purissimi di cancrinite, e seguendo l'azione dell'acido col microscopio. Ho potuto, così, constatare che l'anidride carbonica si sviluppa da tutto il minerale uniformemente, e fino a quando non è del tutto decomposto.

L'analisi, eseguita come quella della cancrinite di Mias [1], e su materiale purissimo, liberato completamente dalla calcite, dette i seguenti risultati:

		Rapporti molecolari	
SiO_2	35,00	0,580	
Al_2O_3	29,24	0,286	0,289
Fe_2O_3	0,51	0,003	
CaO	9,77	0,174	0,449
MgO	tr.		
Na_2O	16,37	0,264	
K_2O	1,03	0,011	
Cl	0,54	0,015	
CO_2	6,52	0,148	
H_2O	1,51	0,084	
	100,49		

Se si confronta questa analisi con le altre note della cancrinite, si scorgono subito delle differenze sensibili. Sopratutto notevole è l'elevato tenore in ossido di calcio, che nelle cancriniti delle rocce eruttive antiche raramente arriva al 7 %. Anche interessante è la presenza nella cancrinite del Monte Somma del potassio in quantità alquanto maggiore del solito: infatti, nelle cancriniti tipiche questo elemento non si rinviene che in quantità molto piccole, ad eccezione della cancrinite

[1] F. Zambonini, *Contributo allo studio dei silicati idrati.* Atti R. Accad. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, 1908.

di Ditrò, che contiene, secondo A. Koch [1]), 5,23 % K_2O. Interessantissima è, poi, la scarsezza dell'acqua: questo fatto conferma mirabilmente quanto io ho sostenuto sull'ufficio dell'acqua nella cancrinite, poichè mostra che variazioni considerevolissime nel tenore in H_2O non modificano che pochissimo le proprietà fisiche del minerale. Nè meno importante è la presenza del cloro nella cancrinite vesuviana [2]), che dimostra in modo inoppugnabile la parentela tra davyna-microsommite e cancrinite, già da me sostenuta nella *Mineralogia vesuviana*.

Dall'analisi surriferita segue la formula approssimativa:

$$14\,Na\,Al\,Si\,O_4 \,.\, 5\,[Na_2\,(Al\,.\,Na\,CO_3)\,Si\,O_4] \,.\, 0{,}5\,Na_2\,(Al\,.\,Cl)\,Si\,O_4 + 2{,}80\,H_2O\ ,$$

supponendo il calcio ed il potassio riuniti nel sodio. Raddoppiando le formole dei singoli silicati costituenti, il che appare giustificato dalle ragioni da me esposte nei precedenti lavori, si ha che la composizione della cancrinite del Monte Somma può esprimersi nel modo seguente:

$$7\,Na_2Al_2Si_2O_8 \,.\, 2{,}5\,Na_4\,(Al\,.\,Na\,CO_3)_2\,Si_2O_8 \,.\, 0{,}25\,Na_4\,(Al\,.\,Cl)_2\,Si_2O_8 \,.\, 1{,}4\,H_2O\ .$$

Le analisi del minerale analizzato dal Rammelsberg, e che io ho riferito alla cancrinite, sono le seguenti:

	I	II	III
$Si\,O_2$	38,76	36,81	36,96
Al_2O_3	28,10	28,66	28,31
$Ca\,O$	9,32	10,33	9,39
K_2O	1,10	1,21	—
Na_2O	15,72	15,86	—
CO_2	5,63	6,01	—
H_2O	1,96	—	—
Cl	tr.	—	—
	100,59		

Comparando queste analisi con quella da me eseguita, risulta senz'altro l'intima parentela fra il materiale di Rammelsberg e quello da me studiato. Anche per quel che riguarda l'aspetto esteriore si ha identità quasi completa, soltanto la mia cancrinite non era così facilmente polverizzabile, come quella analizzata dal Rammelsberg [3]), il che fa pensare che il minerale di Rammelsberg doveva essere in via di alterazione, e nemmeno così puro come quello da me sottoposto all'analisi. La prova migliore di questa mia affermazione risiede nel fatto che il Rammelsberg ha trovato, per il rapporto $Si\,O_2 : Al_2\,O_3$ valori oscillanti tra **2,33 : 1**

[1]) Neues Jahrbuch für Min. Geol. u. s. w., Beil-Bd. I, pag. 144, 1880.

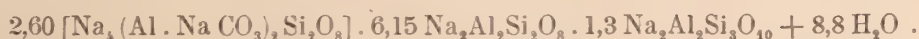
[2]) Finora questo elemento non era stato rinvenuto nelle cancriniti che in tracce.

[3]) Il materiale di Rammelsberg era « so mürbe, dass er sich leicht zu Pulver reiben lässt ».

e **2,18 : 1**, mentre nelle buone analisi di cancrinite si hanno valori molto più prossimi a **2 : 1**. I risultati da me ottenuti tolgono, ad ogni modo, ogni dubbio, sull'appartenenza reale alla cancrinite del minerale studiato dal Rammelsberg.

Nello scorso anno, il Thugutt [1]) ha pubblicato un notevole lavoro sulla chimica della cancrinite, nel quale egli insiste, modificandole lievemente, sulle idee che egli stesso aveva già altra volta manifestato intorno alla composizione ed alla costituzione della cancrinite. Secondo il Thugutt, a questo minerale spetterebbe la formula $8\,Na_2\,Al_2\,Si_3\,O_{10}\,.\,3\,Na_2\,Al_2\,O_4\,.\,5\,Ca\,CO_3\,.\,Na_2\,CO_3\,.\,9\,H_2\,O$. Ma la formula del Thugutt non è, evidentemente, accettabile, perchè richiede che il sodio ed il calcio si trovino nel minerale in un rapporto costante. Ora, dalle analisi già note, e dal fatto che il Lemberg ha ottenuto artificialmente una cancrinite puramente sodica ed ha descritto un minerale del Monte Somma che è probabilmente una calciocancrinite, risulta con assoluta certezza che nella cancrinite il rapporto $Ca\,O : Na_2\,O$ è variabile. La varietà del Monte Somma, col suo elevato tenore in calcio, costituisce, poi, la prova migliore che non è possibile accettare per la cancrinite una formula che richieda un valore costante per $Ca\,O : Na_2\,O$. Altrettanto è da osservarsi per le proporzioni fisse che il Thugutt ammette esistere tra i carbonati ed il silicato, mentre, come ho già notato altra volta e la cancrinite del Monte Somma conferma, le analisi note ci mostrano accadere precisamente il contrario. Infine, deve ancora tenersi conto del fatto che anche la quantità di acqua contenuta nella cancrinite è soggetta a notevoli oscillazioni, come è confermato in modo indubbio dalla varietà del Monte Somma, che ne è quasi priva.

L'analisi che Thugutt ha eseguita della cancrinite rosea di Brevig, l'unica, a suo stesso giudizio, istituita su materiale sufficientemente puro, si calcola assai bene con i composti che, secondo me, entrano nella costituzione della cancrinite. Si ha, infatti, per l'analisi di Thugutt la formula

$$2{,}60\,[Na_4\,(Al\,.\,Na\,CO_3)_2\,Si_2O_8]\,.\,6{,}15\,Na_2Al_2Si_2O_8\,.\,1{,}3\,Na_2Al_2Si_3O_{10} + 8{,}8\,H_2O\,.$$

Quanto alla origine della cancrinite in genere, è noto che questo minerale è considerato come un costituente primario di molte rocce profonde e filoniane foyaitiche e teralitiche, mentre in molte altre rocce non è che un prodotto di trasformazione della nefelina (o della eleolite). Secondo il Thugutt, invece, non esisterebbero cancriniti primarie: anche per quelle in individui idiomorfi non dovrebbe porsi in dubbio la formazione secondaria dalla nefelina o dalla sodalite. Le cancriniti originatesi a spese della nefelina sarebbero potassifere, quelle, invece, provenienti dalla sodalite non conterrebbero, per lo più, il potassio. Nelle condizioni nelle quali è stata rinvenuta la cancrinite al Monte Somma, nelle geodi, cioè, di blocchi calcarei, insieme all'idocrasio giallastro ed alla mica verdognola, si osserva spesso la sodalite, ma la forma sicuramente esagonale dei cristalli impedisce di considerare la cancrinite studiata come una pseudomorfosi su sodalite. La presenza del potassio nel nostro minerale sarebbe, in base all'opinione del Thugutt, la prova migliore della sua origine da nefelina preesistente. Veramente, io non credo che alla

---

[1]) Neues Jahrbuch für Min. Geol. u. s. w., 1911, I, 25.

presenza o meno del potassio si possa dare tanto valore come fa il Thugutt, perchè, se nella quasi totalità delle analisi note di sodalite il potassio o è assai scarso o non figura affatto, ciò si deve sopratutto al fatto che questo elemento non è stato ricercato e dosato. Il Dott. F. Stella-Starrabba ha accertato recentemente, con accurate ricerche eseguite nell'Istituto da me diretto, l'sistenza, al Monte Somma ed al Vesuvio, di sodaliti con tenore in potassio notevolmente superiore a quello massimo prima osservato. Appare, perciò, evidente che, specialmente al Monte Somma, non può trarsi alcuna conclusione, intorno alla genesi della cancrinite, dall'esistenza o dalla assenza in essa del potassio.

Nel caso speciale da me studiato, è molto probabile che la cancrinite si sia formata a spese della nefelina. Questo minerale, quantunque piuttosto raramente, si trova talvolta in condizioni di giacitura identiche a quelle nelle quali è stata rinvenuta la cancrinite. L'aspetto stesso dei cristalli, costituiti ora da cancrinite, è quello di un minerale trasformato. Se si esaminano i cristalli tozzi, che hanno anche l'habitus della nefelina, nel loro interno si scorge come essi spesso sieno formati da un aggregato di molti cristallini confusamente disposti, il che costituisce un buon indizio della natura secondaria di questi ultimi.

Nella trasformazione della nefelina in cancrinite si formano, però, anche cristalli nitidi, perfettamente delimitati e distinti, di cancrinite, e sono precisamente quelli molto allungati nella direzione dell'asse verticale. Non si hanno, dunque, soltanto pseudomorfosi complete di cancrinite su nefelina, ma si ha anche, invece, formazione di cristallini idiomorfi del nuovo minerale, precisamente come accade nel passaggio da nefelina a sodalite, scoperto e descritto dallo Strüver [1]). I cristallini di cancrinite misurati appartengono, perciò, effettivamente a questo minerale, e non rappresentano delle pseudomorfosi su nefelina. La trasformazione deve essere avvenuta per azione di soluzioni ricche in calcio, come è dimostrato non soltanto dalla quantità notevole, superiore alla solita, che di questo elemento si rinviene nella cancrinite del Monte Somma, ma anche dalla abbondanza di calcite neoformata.

La cancrinite è stata da me ritrovata, in seguito ad un nuovo esame dei campioni di nefelina vesuviana della grande collezione del Museo di Napoli, in altri due frammenti di blocchi calcarei. Uno di essi, che contiene forsterite, humiti e spinello, presenta una piccola geode, riempita da grandi lamine di mica verdastra, da scarsa cancrinite e da nefelina più abbondante. La cancrinite è di colore bianco, pressochè opaca nei cristalli interi, a differenza della nefelina, che è incolora od appena gialliccia, e perfettamente limpida e trasparente. Di cancrinite vi sono due cristalli con nette facce della bipiramide $\{10\bar{1}4\}$: uno di essi, alquanto schiacciato secondo due facce parallele del prisma $\{10\bar{1}0\}$ è molto bello, e misura circa 6 mm. nella direzione dell'asse senario. Alcune misure prese senza staccarlo dalla roccia concordano perfettamente con quelle già riferite. La nefelina si presenta in cristallini allungati secondo l'asse verticale, che possono diventare quasi aghiformi: in essi ho riconosciuto le forme $m\{10\bar{1}0\}$, $c\{0001\}$, $q\{10\bar{1}2\}$, $p\{10\bar{1}1\}$, $z\{20\bar{2}1\}$ (orientazione della nefelina), delle quali q è esilissima e può anche mancare. L'habitus

[1]) Atti R. Accad. Scienze di Torino, VII. Adunanza del 14 gennaio 1872.

dei cristalli ben terminati somiglia a quello della Fig. 40 della *Mineralogia vesuviana* (pag. 184): soltanto generalmente si ha un'estensione alquanto minore nel senso dell'asse verticale. Delle misure molto esatte hanno dato:

$$c\,p = 44^{0}3\ {}^{1}/_{2}{}'$$
$$c\,z = 62\ 40$$

Per $c\,q$ si è trovato 26° circa.

Quanto alle relazioni che passano tra nefelina e cancrinite nel campione descritto, non mi sembra possa dubitarsi della indipendenza dei due minerali, dei quali la cancrinite appare spesso avvolta dalla nefelina, nelle parti più interne della geode.

Ancor più notevole è l'altro blocco, più ricco in spinello del precedente, il quale presenta un riempimento geodico costituito da nefelina, cancrinite, augite verde chiara e mica verdastra, disponendo questi minerali in ordine di quantità decrescente. In questo riempimento geodico si aprono delle piccole geodine con stupendi cristalli di nefelina ed altri molto graziosi di augite verde chiara.

La cancrinite è bianca, e non presenta cristalli nettamente terminati: nella zona verticale ho riconosciuto le forme $\{10\bar{1}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$, $\{21\bar{3}0\}$. Le dimensioni dei singoli cristalli sono notevoli, perchè alcuni raggiungono i 7 mm. di lunghezza per 3,5 di larghezza: un grande cristallo rotto misura 20 mm. nella direzione dell'asse verticale e circa 9 in larghezza. La nefelina della massa del riempimento geodico forma un aggregato di piccoli cristallini, tozzi, di colore alquanto giallognolo: quella delle piccole geodi offre dei cristalli magnifici, incolori, vivamente splendenti, molto allungati secondo l'asse verticale, con le stesse forme, habitus ed angoli di quelli del blocco già descritto [1]).

Cancrinite e nefelina sono completamente indipendenti l'una dall'altra, e presentano contorni nettissimi anche quando vengono in contatto. I due minerali sembrano essere all'incirca di formazione contemporanea. Infatti, in una gran parte del riempimento geodico è la nefelina che si trova in contatto con le pareti della geode, ma in un'altra parte vi si trova, invece, la cancrinite, che si rinviene, poi, anche nell'interno del riempimento.

In complesso, i due blocchi ora descritti mostrano che la cancrinite non deve essere sempre considerata come un prodotto di trasformazione della nefelina o della sodalite, ma che essa può anche, al contrario, costituire un minerale del tutto indipendente, con una forma cristallina sua propria, precisamente come aveva sostenuto Brögger [2]).

DAVYNA PSEUDOMORFA DI NEFELINA

In un blocco di calcare profondamente metamorfizzato del Monte Somma si apre una geode abbastanza grande, le pareti della quale sono formate da augite di colore variabile tra il verde chiaro e il verde scuro, quasi nero. La cavità è pressochè riempita da grossi cristalli esagonali di nefelina, che raggiungono i 13 mm. di lunghezza, per 6 di larghezza, e che sono completamente trasformati in un aggregato granulare di piccoli cristallini di davyna.

---

[1]) Gli indici di rifrazione di questa nefelina sono stati già riferiti.

[2]) Zeitsch. für Kryst., 1890, XVI, 245.

Questi cristallini sono abbastanza netti, quantunque in generale non superino 1 mm. nella loro maggiore dimensione. Presentano le forme $m\{10\bar{1}0\}$, $a\{11\bar{2}0\}$, $n\{21\bar{3}0\}$, $q\{10\bar{1}4\}$, $e\{11\bar{2}4\}$, $c\{0001\}$: di queste n e c talvolta mancano. I cristallini sono molto tozzi. I valori angolari sono i soliti della serie davyna-microsommite:

$$(10\bar{1}0):(11\bar{2}4) = 56°12' \text{ mis.}$$
$$(10\bar{1}4):(1\bar{1}04) = 25\ 15 \quad »$$

Questa davyna, nella quale si è trasformata la nefelina, è notevole per le sue proprietà ottiche: essa, infatti, è otticamente *negativa* e possiede debole birifrangenza. Appartiene, perciò, alle varietà rare di davyne negative.

ORTITE

In cristalli macroscopici questo minerale era stato osservato in un blocco di sanidinite del Monte Somma dal vom Rath. Recentemente, il Lacroix lo rinvenne come costituente microscopico, accessorio, di alcune microsieniti nefeliniche e sodalitiche ad idocrasio. La provenienza del blocco studiato dal vom Rath non poteva dirsi assicurata, perchè non era stato raccolto dal vom Rath stesso al Monte Somma od acquistato sui luoghi dalle guide, ma era stato, invece, trovato fra altri minerali nella collezione Krantz, sicchè uno scambio di località (per esempio col lago di Laach) appariva non improbabile, pensando che quel campione era rimasto unico.

Sono, ora, in grado di porre fuori di dubbio l'esistenza della ortite in cristalli macroscopici nelle sanidiniti del Monte Somma.

Nelle geodi di quel grande blocco di sanidinite che ho già descritto nel capitolo dedicato alla baddeleyite, ho rinvenuto due cristalli di ortite, uno che accidentalmente si staccò dalla roccia, l'altro, più grande e più bello, che misurai attaccato come era stato scoperto ad un frammento del blocco in questione. Per quante ricerche abbia fatto, non ho potuto ritrovare altri cristalli macroscopici di ortite nei numerosi pezzi che sono passati per le mie mani di quella sanidinite importantissima, ed anche in alcune sezioni microscopiche della roccia non ho osservato la minima traccia di ortite.

Come quelli già descritti da vom Rath, anche i due nuovi cristalli di ortite del Monte Somma somigliano molto all'antibolo nero che li accompagna, ma se ne distinguono, però, facilmente, non soltanto per la loro forma, ma anche perchè presentano uno splendore molto minore di quello dei cristalli di anfibolo.

Il cristallino più piccolo, distaccatosi dal blocco, supera appena un millimetro nella sua maggiore dimensione. È di colore perfettamente nero e poco splendente. Presenta le forme $T\{100\}$, $M\{001\}$, $\mathfrak{m}\{102\}$, $i\{\bar{1}02\}$, $r\{\bar{1}01\}$, $z\{110\}$, $o\{011\}$, $n\{\bar{1}11\}$, $y\{\bar{2}11\}$. Di queste forme $\{102\}$ è nuova per l'ortite del Monte Somma. È stata osservata con una stretta faccetta, ma piana e regolare, che ha fornito buone misure:

$(001):(102) = 22°42'$	mis.	$22°36\ ^1/_2{}'$ calc. [1]
$(100):(102) = 42\ 29$	»	$42\ 22\ ^1/_2$ »

[1]) Per i calcoli si sono adoperate le costanti proposte da vom Rath per l'ortite di Laach $a:b:c = 1{,}5509:1:1{,}7691$; $\beta = 115°1'$ (Pogg. Ann., 1861, CXIII, 281).

Interessante è l'habitus di questo cristallo, del tutto diverso da quello dei cristalli del monte Somma descritti da vom Rath e da me. Il nuovo cristallo è caratterizzato dal fatto che }001{ e }100{ hanno grandezza poco diversa, mentre l'ortite trovata da vom Rath presenta }100{ fortemente dominante e }001{ con piccole facce. Nel cristallo in questione è anche notevole il fatto che }011{ ha grandezza poco inferiore a }110{. (Fig. 14).

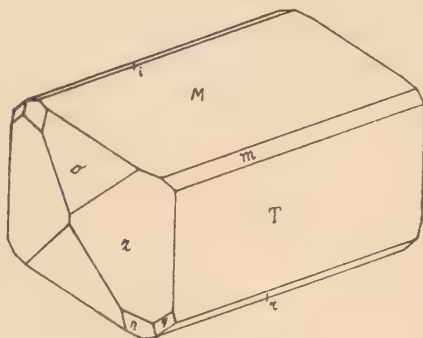



Fig. 14.

Ancor più notevole è l'altro cristallo, il quale misura 2,5 mm. nella direzione dell'asse *b*, 1,75 mm. in quella di *c* e un millimetro secondo *a*. Le forme osservate sono le seguenti: *T*}100{, *M*}001{, m}102{, *e*}101{, *i*}$\bar{1}$02{, *r*}$\bar{1}$01{, *z*}110{, *o*}011{, *n*}$\bar{1}$11{, *t*}114{, *y*}$\bar{2}$11{. Almeno per quanto io so, *t*}114{ è nuova per l'ortite in genere. Smussa con una faccia stretta, ma piana e splendente, lo spigolo [(001):(110)], ed ha permesso esatte misure

(001):(114) = 23°20′ mis.	23° 3′ calc.
(110):(114) = 52 35 »	52 45 ½ »

Il nuovo prisma *t*}114{ è interessante, perchè completa la serie dei prismi }*hhl*{ già noti per l'ortite, e, cioè, *d*}111{, *v*}112{, *V*}115{. La differenza abbastanza sensibile tra gli angoli misurati ed i calcolati dipende dal fatto che le costanti di vom Rath non valgono rigorosamente per l'ortite del Monte Somma, i cui cristalli presentano, come ora vedremo, notevoli oscillazioni nei valori angolari. Il simbolo della nuova forma }114{ è, ad ogni modo, da considerarsi come sicuramente stabilito.

Quando ho compilato la *Mineralogia vesuviana*, di ortite del Monte Somma io non ho potuto studiare che un solo cristallo, che il vom Rath aveva donato ad Arcangelo Scacchi. Dai valori angolari più esatti che ottenni da quel cristallo calcolai le costanti

$$a:b:c = 1,5681:1:1,7926;\ \beta = 114°40'$$

che differiscono notevolmente da quelle che vom Rath ha proposto per l'ortite in genere. Le costanti da me calcolate non valgono, però, per i due nuovi cristalli: gli angoli che ho potuto misurare in essi con tutta esattezza sono, in complesso, più vicini ai valori teorici di vom Rath che ai miei, come risulta dalla seguente tabella:

	Misurati [1])		Calcolati	
	I	II	vom Rath	Zambonini
(100):(001) =	65°1′	65°14 ½′	64°59′	65°20′
(001):(011) =	57 54	—	58 3	58 27
(001):(110) =	75 54	75 53 ½	75 48 ½	76 8
(110):($\bar{1}$10) =	70 47	—	70 52	70 7

[1]) I è il cristallo della Fig. 14, II quello rappresentato nella Fig. 15.

Sembra, quindi, che al Monte Somma esistano due distinti tipi di ortite: uno, quello scoperto dal vom Rath, con costanti cristallografiche proprie, l'altro, trovato ora da me, prossimo al tipo di Laach, studiato dallo stesso vom Rath. Alle differenze nei valori angolari se ne accompagnano non poche altre, notevoli, nell'habitus cristallografico e nelle forme osservate.

I cristalli di vom Rath sono, a differenza dei miei, sempre fortemente tabulari secondo il pinacoide {100}: fra i pinacoidi {$\bar{h}$0l} domina nei primi {$\bar{2}$01}, che non si è rinvenuto nei nuovi cristalli, nei quali, invece, è presente {102}, non osservato in quelli di vom Rath. Per quel che si riferisce alla coesione, l'ortite di vom Rath possedeva due direzioni di sfaldatura parallelamente alle facce del prisma {110}: quella ora descritta, invece, possiede la solita sfaldatura secondo {001}, ma non quella prismatica [1]).

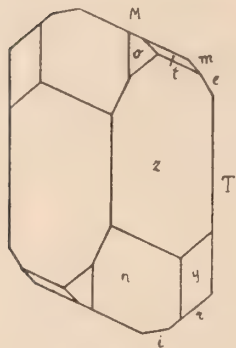



Fig. 15.

Quanto alle condizioni di giacitura, l'ortite di vom Rath fu trovata in una sanidinite con melanite, mentre questo minerale manca completamente nel blocco dal quale provengono i nuovi cristalli studiati.

Alcuni minutissimi frammentini staccati dal cristallo della Fig. 14 si sono mostrati, al microscopio polarizzatore, fortemente birifrangenti, con pleocroismo molto distinto

$\mathfrak{a}$ = bruno verdastro molto chiaro

$\mathfrak{b}$ = bruno castagno chiaro

$\mathfrak{c}$ = bruno sepia.

Per il suo pleocroismo, la nuova ortite del Monte Somma si avvicina moltissimo all'ortite della Valsavaranche, descritta dal Novarese [2]).

Il cristallo più grande dell'ortite studiata si trova in una piccola cavità della sanidinite, debolmente attaccato alle pareti per una estremità dell'asse b, e poggia poi, su alcuni cristallini di sanidino. Secondo ogni probabilità, si tratta di una formazione pneumatolitica.

GRUPPO HUMITE

In un lavoro di importanza veramente fondamentale per lo studio delle formazioni di contatto, V. M. Goldschmidt [3]) si è occupato brevemente dei minerali del gruppo humite, che egli ha considerato come sali doppi dei due composti $Mg_2 Si O_4$ e $Mg_3 Si O_4 F_2$, sicchè la loro formula generale si potrebbe scrivere $n Mg_2 Si O_4 + m Mg_3 Si O_4 F_2$, dove n e m rappresenterebbero due numeri intieri. Se questa ipotesi è corretta, soggiungeva il Goldschmidt, in base alla regola delle fasi non possono essere stabili contemporaneamente che tutt'al più due dei minerali del

1) Le osservazioni sono state eseguite nel cristallino rappresentato nella Fig. 14.

2) Bollettino R. Comit. geol. d'Italia, 1894, N. 3.

3) *Die Kontaktmetamorphose im Kristianiagebiet.* Videnskapsselskapets Skrifter. I Mat.-Naturv. Klasse, 1911, N. 1, pag. 201, Nota 1).

gruppo humite, dato che essi risultano da due soli componenti. Dalla mia *Mineralogia vesuviana* (pag. 288) il Goldschmidt ebbe occasione di aver notizia dell'osservazione di Eugenio Scacchi, che trovò in uno stesso blocco humite, condrodite e clinohumite, ed allora si rivolse a me (lettera del 25 aprile 1911) perchè venissero precisate le caratteristiche di quel blocco. Data l'importanza della questione, e perchè tutti possano essere messi in grado di sapere esattamente in quali condizioni si rinvengono al Monte Somma contemporaneamente le tre humiti che vi sono conosciute, credo opportuno dirne qui qualche parola.

Le tre humiti sono state osservate in un unico blocco, che è stato rotto in varî frammenti, che hanno anche diverso numero di inventario, ma perfettamente identici, sicchè non può esistere il minimo dubbio sulla loro appartenenza ad un unico blocco. Nelle geodi di alcuni degli attuali frammenti non esistono che due humiti, in uno, però, vi sono tutte e tre. Si tratta di un blocco pirosseno-micaceo, con numerose geodi, ripiene alcune di humiti e di calcite, con delle lamelle di mica di colore variabile dal bruno al verdognolo. Quasi sempre, però, le humiti sono accompagnate da bei cristalli, tabulari secondo }010{, di forsterite gialla pallidissima. Nelle geodi di quella porzione del blocco che presenta attualmente le tre humiti, la forsterite è più abbondante, frequente è anche l'augite verde scurissima in piccoli cristallini, la cuspidina, che si trova anche nella massa del blocco, sotto forma di masserelle cristalline rosee, ed il pirosseno giallo in bei cristalli, diffuso anche nel blocco, specialmente in vicinanza delle geodi humitifere.

Condrodite, humite e clinohumite presentano cristalli di dimensioni variabili fra poco più di 1 mm. e 7-8 mm., con colore bruno intenso, presso a poco identico in tutti. Anche l'habitus cristallografico è molto somigliante, tanto che senza misure riesce quasi impossibile distinguere l'uno dall'altro i tre minerali. I loro cristalli sono assolutamente freschi, e non è possibile distinguere in essi alcuna traccia di corrosione, che starebbe ad indicare la mancanza di un equilibrio.

Riunendo le osservazioni eseguite nei varî frammenti, si può dire che dei tre minerali del gruppo humite in essi esistenti, la clinohumite è la più abbondante. Segue, in ordine di importanza quantitativa, la humite, mentre la condrodite è la più rara, quantunque occupi da sola alle volte delle grandi geodi.

È importante il notare, che, almeno secondo le numerose misure da me eseguite, in ogni geode sembra presentarsi una sola specie di humite. Le diverse geodi, però, sono l'una vicina all'altra, sicchè non può dubitarsi che le tre humiti si sieno formate in uguali condizioni.

Il blocco descritto dimostra in modo inoppugnabile non soltanto la possibilità della coesistenza delle tre humiti più importanti [1], ma anche quella, insieme ad esse, della forsterite. Considerando le humiti come costituite da due componenti, uno dei quali sarebbe la forsterite, non potrebbe, in base alla regola delle fasi, aversi l'associazione descritta: è evidente, perciò, che le humiti vanno considerate altrimenti.

---

[1]) Come è noto, esiste anche un quarto minerale del gruppo humite, finora rarissimo, la prolectite.

MINERALE SOMIGLIANTE ALLA CUSPIDINA

Sotto il nome di «Cuspidin-ähnliches Mineral» G. vom Rath ha descritto [1]) un minerale del Monte Somma, rinvenuto, sotto forma di granuli cristallini e di cristalli decomposti, in un blocco granelloso, con biotite verde prevalente e sodalite bianca. Il colore del minerale in questione, appartenente probabilmente al sistema rombico, variava dal gialliccio chiaro al rossiccio, pure chiaro. I cristallini, spesso coperti da calcite neoformata, offrono, secondo vom Rath, una serie di prismi }*hko*{ (*m*}110{, *n*}470{, *l*}120{, *r*}270{), fortemente striati parallelamente a [001], ed una bipiramide *o*}111{, nella quale il vom Rath misurò $(111):(1\bar{1}\bar{1}) = 37^\circ$, $(111):(\bar{1}11) = 69^\circ$.

Da questi valori egli calcolò le costanti $a:b:c = 0{,}560:1:0{,}417$. Sfaldatura secondo }010{. vom Rath e A. Scacchi (come riferisce il primo), avvicinarono questo minerale alla cuspidina, ed anzi lo Scacchi si mostrò proclive a riunirlo a questa specie, mentre vom Rath notò che l'habitus cristallografico dei due minerali è del tutto diverso, e che anche la direzione di sfaldatura è situata differentemente.

Non mi è stato possibile di esaminare i cristallini studiati dal vom Rath, che sembra non si trovino nel Museo Mineralogico dell'Università di Bonn, ma ad onta di ciò credo di poter asserire con sufficiente sicurezza che essi dovevano appartenere alla humite. Si può, infatti, istituire il seguente confronto tra le misure di vom Rath e gli angoli teorici della humite:

Humite		Minerale di vom Rath	
(001):(107) =	30°13′	(100):(110) =	29 1/2°
(001):(104)	45 32 1/2	(100):(470)	45
(001):(102)	63 52	(100):(270)	63
(001):(126)	58 16	(100):(111)	55 1/2
(100):(126)	69 4	(001):(111)	71 1/2
(010):(126)	39 28 1/2	(010):(111)	40 1/2

Tenendo conto del fatto che le misure di vom Rath sono soltanto approssimative, l'accordo può considerarsi come soddisfacente. È da notare il fatto, che la bipiramide }126{ si presenta spesso con facce estese nella humite del Monte Somma, ed addirittura predominanti in quella della miniera Ladu.

Con la mia interpretazione, il prisma *l* di vom Rath non trova il suo corrispondente tra le forme note della humite, ma è da osservare che *l*}120{ e *n*}470{ costituiscono, in realtà, un'unica forma, con le facce spezzate in due, come si verifica, per esempio, quasi costantemente nella zona [001] dell'idocrasio del Monte Somma. L'angolo (120):(470) non misura che appena 3°. Devo ancora notare che il pinacoide secondo il quale vom Rath ha constatato aversi distinta sfaldatura

[1]) Zeitsch. für Kryst., 1884, VIII, 45.

nel minerale da lui studiato, viene a corrispondere a }100{ della humite, mentre la sfaldatura in quest'ultima avviene parallelamente a }001{. Non è, però, da escludersi la possibilità di una vista o di un errore di stampa nella indicazione di vom Rath. Del resto, il minerale di vom Rath presenta evidenti somiglianze, per il colore e le condizioni di giacitura, con certe varietà di humite granulare, e fu appunto per questo che mi indussi a ricercare se era possibile identificare le forme osservate da vom Rath con quelle della humite.

SCOLECITE

Issel (Bollettino del R. Comitato Geologico d'Italia, 1879, n. 9-10) dice, descrivendo la datolite e la scolecite del territorio di Casarza (Liguria), che quest'ultimo minerale « si trova, coi suoi caratteri tipici, nelle lave pirosseniche dell'Etna e del Vesuvio e certamente in altre rocce vulcaniche italiane ». Per quel che riguarda il Somma-Vesuvio devo far osservare, a scanso di equivoci, che nel 1879, quando scriveva il Prof. Issel, l'esistenza della scolecite nei proietti lavici del Monte Somma non era stata ancora accertata dal Freda, che fece conoscere i risultati delle sue indagini soltanto nel 1885. È vero che il nome di scolecite si trova già nella *Mineralogia vesuviana* di Monticelli e Covelli (pag. 224), ma semplicemente come sinonimo di thomsonite.

PEROWSKITE

Questo minerale non era stato, prima di me, osservato nè al Monte Somma, nè al Vesuvio: del suo rinvenimento in un blocco calcareo del Monte Somma detti notizia verbale nella seduta del 17 ottobre 1911 della sezione di Mineralogia e Geologia della Società italiana per il Progresso delle Scienze (Convegno di Roma).

La perowskite è stata da me trovata nelle geodi di un blocco calcareo del Monte Somma, sotto forma di piccoli cubetti, assai rari, che da dimensioni quasi microscopiche possono raggiungere fino i $^2/_3$ di millimetro di lato. La perowskite è accompagnata da numerosi ottaedri raggruppati di spinello, di colore variabile dal violaceo chiaro al quasi nero, da abbondante calcite in cristallini imperfetti e da aghetti di apatite. La massa del blocco è costituita in gran prevalenza da calcite, gremita di forsterite e di spinello: è presente anche, ma molto rara, la periclasite, talvolta avvolta da un orlo di idromagnesite. La perowskite è, poi, rarissima.

I cubetti di perowskite delle geodi hanno colore nero deciso, possiedono un vivo splendore alquanto volgente al metallico. Le facce sono molto irregolari e spezzettate, in grado diverso nello stesso cristallo.

Nei cristallini più regolari si scorge sulle facce cubiche una striatura parallela agli spigoli. Alcuni dei cubetti sono un po' schiacciati secondo una coppia di facce parallele.

La scarsezza del materiale disponibile mi ha impedito di eseguire indagini ottiche approfondite. Mi son dovuto limitare a far assottigliare un cristallino parallelamente ad una coppia di facce del cubo. La lamina che ne è risultata per il suo spessore eccessivo era poco trasparente: ho potuto, tuttavia, riconoscere nettamente

che anche la perowskite del Monte Somma è birifrangente, e che essa appartiene, per la sua struttura, al tipo degli Urali e di Zermatt.

Infatti, si scorge benissimo, esaminando la lamina al microscopio polarizzatore, che essa è costituita da due sistemi di lamelle perpendicolari tra loro e parallele agli spigoli del cubo, che estinguono secondo le diagonali della sezione.

La perowskite del Monte Somma al cannello non fonde: la polvere sottile è decomposta dal bisolfato potassico.

Nella soluzione acquosa della massa fusa, acidificata con H_2SO_4, si ottiene con acqua ossigenata una forte reazione del titanio, ed è anche facile riconoscere microchimicamente la presenza del calcio. La perowskite del Monte Somma somiglia molto alla disanalite da me descritta nel 1908 [1]), ed ho, perciò, cercato in tutti i modi conciliabili con la scarsezza del materiale, di mettere in luce l'esistenza del niobio e del tantalio nei cristalli descritti. Le reazioni colorate di L. Lévy [2]) mi hanno dato, però, costantemente risultato negativo, dimodochè è certo che si ha a che fare con vera e propria perowskite. Così è accertata l'esistenza, nei blocchi calcarei del Monte Somma, sia della perowskite, che della disanalite. È, del resto, assai probabile che i due minerali sieno legati da termini di passaggio, perchè la disanalite non è che una soluzione solida di $CaTiO_3$ prevalente e di un miobato di calcio subordinato ed in quantità variabili.

O. Hauser [3]) considera la disanalite semplicemente come una perowskite impura: per la confutazione di questa opinione mi rimetto a quanto ho scritto nello *Handbuch der Mineralchemie* di Doelter, articolo Disanalite.

PIRRITE

La identificazione di questo minerale, che è nuovo per il Monte Somma ed anche per l'Italia, avendo il Corsi [4]) riconosciuto la identità della cosiddetta pirrite elbana con la microlite, non è assolutamente sicura, ma tuttavia molto probabile.

La pirrite è stata da me osservata insieme alla baddeleyite, sotto forma di minutissimi cristallini di colore bruno rossiccio, di dimensioni piccolissime, perchè solo i più grandi ed eccezionali arrivavano ad un terzo di millimetro. Essi erano impiantati sulle facce di $\{010\}$ dei cristalli di sanidino, ovvero intimamente legati alla baddeleyite.

I cristallini di pirrite non presentano altra forma che l'ottaedro. Molto raramente sono unici: quasi sempre sono composti di parecchi cristallini confusamente intrecciati. Anche nei cristalli apparentemente unici si osservano notevoli anomalie geometriche ed irregolarità: le facce riflettono, di solito, due immagini ciascuna, che distano di circa un grado.

In un cristallino particolarmente adatto si è trovato, per l'angolo $(111):(11\bar{1})$, $70°40'$ (calc. $70°32'$), il che dimostra che si ha a che fare con un ottaedro regolare.

[1]) Rendiconto R. Accad. Scienze Fis. e Mat. di Napoli, 1908, pag. 134.

[2]) Compt. rend., 1886, CIII, 1074.

[3]) Zeitschrift für anorg. Chemie, 1908, LX, 237.

[4]) Bollettino del R. Comitato geol. d'Italia, 1881, 564.

Nella maggior parte dei casi, però, si hanno valori notevolmente distanti dal teorico, e questo fatto è una conseguenza della complicata struttura dei cristallini della nostra pirrite, formati da varî individui in accrescimento non perfettamente parallelo.

I cristallini di pirrite appaiono per trasparenza di colore giallo arancio scuro, ed a nicol incrociati si comportano come una sostanza rigorosamente isotropa.

La scarsezza e la piccolezza dei cristallini non mi hanno permesso di eseguire delle ricerche precise sui loro caratteri fisici e chimici. La loro durezza è alquanto inferiore a 6, poichè vengono rigati da una punta di acciaio: il potere rinfrangente è elevato. I cristallini interi vengono attaccati lentamente dall'acido solforico a caldo. Tutti questi caratteri collimano perfettamente con quelli della pirrite delle sanidiniti di S. Miguel (Azorre), accuratamente descritta da Osann [1].

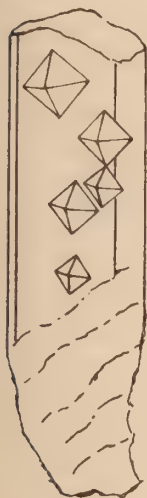



Fig. 16.

Interessante è il fatto, che, assai spesso, i cristalli od i fascetti di baddeleyite hanno una delle estremità dell'asse *c*, e precisamente quella per la quale sono impiantati sulle tavolette di sanidino, avvolta da un gruppo di cristallini di pirrite. Pure molto sovente si osservano cristallini di pirrite sulle facce }100{ della baddaleyite e talvolta in numero abbastanza considerevole. Le Fig. 16 e 17 danno un'idea dei due diversi tipi di associazione della pirrite con la baddeleyite.

Fig. 17.

È noto che Hayes [2]) ha considerato la pirrite delle Azzorre come essenzialmente costituita da niobato di zirconio, mentre Osann non potè porre fuori di dubbio la presenza del zirconio. L'intima associazione della pirrite con la baddeleyite, constatata ora al Monte Somma, rende sempre più probabile la reale esistenza del zirconio nel minerale.

Va ricordato il fatto che Hussak ricorda la microlite (pirrite?) in piccoli cristallini di un millimetro, da bruno chiaro a bruno scuro, con splendore cereo, tra i minerali che accompagnano la baddeleyite del Brasile.

BASSANITE

Nell'estate del 1911, in alcune fumarole poste circa cinquanta metri più in basso dell'orlo del cratere, di fronte alla punta del Nasone, fu trovato abbastanza abbondante un minerale in cristallini imperfetti, di colore bianco, opachi, ora privi di ogni splendore, ora, invece, dotati di uno splendore tenuissimo, alquanto sericeo. Questi cristalli, riuniti in fascetti od in ciocche raggiate, che possono raggiungere anche poco meno di un centimetro di lunghezza, sono talvolta colorati in verdastro pallidissimo da tracce di sali di rame: più spesso, invece, sono superficialmente rossicci: colore, questo, dovuto all'ossido di ferro, che si rinviene anche in minuti

---

[1]) Neues Jahrbuch für Min. etc., 1888, I, 126. Come è noto, la pirrite si rinviene anche nelle sanidiniti del lago di Laach.

[2]) Amer. Journ. Sc., 1850, IX, 423.

e distinti granuletti bruno-rossicci, che si trovano disposti specialmente all'estremità libera dei ciuffetti del minerale bianco, del quale si hanno, perciò, dei fascetti perfettamente bianchi in tutta la loro lughezza, meno all'estremità libera, nella quale sono brunicci. Il minerale in questione somiglia molto al gesso delle fumarole vesuviane, ma l'esame microscopico mostra subito la scarsezza del gesso. Mettendo dei frammenti dei ciuffetti bianchi apparentemente omogenei nel tetrabromuro di acetilene, diluito successivamente con toluolo, si osserva che essi sono formati in assoluta prevalenza da un minerale che ha il peso specifico = 2,73-2,74, da fascetti e laminette abbastanza numerosi con peso specifico compreso tra 2,39 e 2,43, da minutissime laminette, rare, con peso spec. 2,33, da cristallini, pure poco frequenti, con peso spec. 2,27. Il minerale più abbondante si è riconosciuto essere bassanite, i fascetti e le laminette ricordate appartengono all'idrargillite, mentre i cristallini con peso spec. 2,27 seno di gesso. In alcuni punti speciali non mancano delle plaghe di anidrite. Le proporzioni nelle quali questi varî minerali sono associati sono abbastanza variabili, come si può constatare con l'analisi microscopica e con i saggi chimici qualitativi. Alcuni campioni sono costituiti da bassanite quasi pura, mentre in altri l'idrargillite sale al 12-13 %. Questi risultati sono confermati dalla seguente analisi quantitativa, eseguita su fascetti di colore bianco puro:

SO_3	47,90
CaO	33,42
Al_2O_3	9,06
H_2O	9,51
	99,89

Da questa analisi si calcola la formula

$$7\,CaSO_4 \,.\, Al_2O_3 \,.\, 3\,H_2O + 3\,H_2O$$

la quale richiede

SO_3	48,17
CaO	33,75
Al_2O_3	8,79
H_2O	9,29
	100,00

Come si vede, la composizione trovata presenta un eccesso d'acqua rispetto a quella calcolata per una miscela di sette molecole di bassanite $CaSO_4$ e di una di idrargillite $Al_2O_3 \,.\, 3\,H_2O$. L'eccesso è dovuto in piccola parte a gesso inquinante il materiale analizzato, in proporzione più considerevole ad acqua igroscopica (tenendo la sostanza sottoposta ad analisi per 12 ore sull'acido solforico concentrato si è avuto una perdita di peso di 1,24 %, che sale a 1,81 % mediante cinque ore di riscaldamento a 108°), ed infine al fatto che la bassanite doveva avere assorbito una piccola quantità di acqua. È opportuno ricordare, a questo proposito, che la

bassanite originale dei blocchi rigettati del 1906 da me descritta [1]), tenuta lungamente all'aria, condensa l'umidità atmosferica: in un cristallo che era stato circa due anni all'aria io trovai 2,80 °/₀ H_2O, eliminabile in gran parte già sull'acido solforico.

Potrebbe pensarsi che, invece della bassanite, si trovasse come costituente principale della sostanza bianca studiata l'idrato $CaSO_4 . \frac{1}{2} H_2O$, ma questa possibilità si esclude facilmente, perchè, togliendo dall'acqua totale rinvenuta quella eliminabile a 108°, si ha che il solfato di calcio, l'allumina e l'acqua residua vengono a trovarsi nel rapporto di 7 : 1 : 5. Tolte, quindi, le tre molecole d'acqua necessarie per l'idrargillite, resta $7 CaSO_4 . 2 H_2O$, ossia una composizione nettamente diversa da quella dell'idrato $CaSO_4 . \frac{1}{2} H_2O$.

La bassanite descritta presenta le proprietà già da me indicate nella *Mineralogia vesuviana* (pag. 327). Il peso specifico oscilla, come abbiamo veduto, fra 2,73 e 2,74, mentre quello della bassanite originaria varia tra 2,69 e 2,76, ma la maggior parte dei valori si avvicinano a quest'ultimo. Frantumando i nuovi fascetti ed esaminando i frammentini al microscopio, si osserva che essi, come la bassanite tipica dei blocchi del 1906, sono costituiti da tanti aghetti, con estinzione parallela alla direzione di allungamento, che è costantemente in tutti positiva. I singoli aghetti sono, di solito, disposti in accrescimento parallelo. La birifrangenza è piuttosto debole.

Riscaldata su una lampada Mecker, anche la nuova bassanite si trasforma in anidrite, ben riconoscibile non soltanto per le sue proprietà ottiche, ma anche per il peso specifico, che sale a 2,94.

Portando di colpo a 250°-260° delle lastrine di gesso sfaldate secondo }010{ ho potuto preparare i cristalli di $CaSO_4$ esagonale, positivo, già descritti dal Lacroix [2]), e constatarne la identità con la bassanite. Il peso specifico è alquanto più elevato, e, cioè, 2,79-2,80, il che può dipendere in parte dalla presenza della modificazione triclina, pure fatta conoscere dal Lacroix, ma più probabilmente deve ascriversi all'essere gli aggregati di aghetti di bassanite meno compatti di quelli ottenuti artificialmente, sicchè il loro peso specifico finisce col risultare alquanto inferiore al vero.

Nella *Mineralogia vesuviana*, io avevo già accennato alla probabile identità della bassanite con la modificazione esagonale del solfato di calcio studiata da Lacroix: avevo, però, fatto notare che questa modificazione, come pure quella triclina, si trasformavano in contatto dell'acqua rapidamente in gesso, il che non avviene, almeno con uguale rapidità, per la bassanite. Dopo la pubblicazione del mio lavoro, il Lacroix [3]) ha precisato il suo concetto, dicendo che quelle due modificazioni si idratano «molto più facilmente dell'anidrite».

Altrettanto accade per la bassanite. Da alcune esperienze preliminari che ho eseguito, mi risulta che la rapidità con la quale le modificazioni esagonale (bassa-

---

[1]) *Mineralogia vesuviana*, pag. 328.

[2]) Compt. rend., 1898, CXXVI, 360 e 553.

[3]) *Minéralogie de la France et de ses Colonies*, 1910, IV, 171.

nite) e triclina del solfato di calcio si idratano, qualora vengano immerse nell'acqua, è influenzata dal tempo durante il quale esse sono state tenute a temperatura elevata. Poichè nella bassanite naturale questo tempo è sempre molto più lungo di quello molto breve richiesto per la trasformazione pura e semplice del gesso in $Ca\,SO_4$ esagonale, come si pratica in laboratorio, così si spiega anche come la bassanite presenti una velocità di idratazione minore di quella del prodotto artificiale, che non ha subito l'azione a lungo prolungata di una temperatura piuttosto elevata.

Groth [1]) ha considerato i cristalli esagonali di Lacroix come appartenenti all'emi-idrato $Ca\,SO_4 . \frac{1}{2} H_2O$. L'inesattezza dipende dal fatto che il Lacroix nella sua prima nota [2]) aveva espresso il dubbio che essi potessero essere quell'emi-idrato, ma in seguito [3]) riconobbe esplicitamente che erano anidri, come risulta, del resto, già dal fatto che essi si formano in quantità notevole portando il gesso direttamente a 255°, ad una temperatura, cioè, superiore a quella della sua disidratazione completa, e che rimangono inalterati anche se si riscaldano a temperatura più elevata, purchè non si raggiunga il rosso vivo.

Come già si è detto, i fascetti di bassanite somigliano molto, per il loro aspetto, a certe varietà di gesso delle fumaruole vesuviane. E poichè negli anni decorsi, dopo l'eruzione del 1906, nella parte del cratere vesuviano nella quale la scorsa estate è stata raccolta la bassanite, sono state osservate numerose fumarole che hanno fornito gesso in abbondanza, così è molto probabile che la bassanite debba la sua origine ad un aumento di temperatura verificatosi più recentemente, e che ha disidratato il gesso preesistente.

ALUNITE

Nella *Mineralogia vesuviana* (pag. 53) io ho ricordato che Johnston-Lavis ha rinvenuto nell'ottobre 1906 sul cratere vesuviano un blocco rigettato, fortemente alterato dalle fumarole, nel quale si trovarono dei cristalli gialli, ed una sostanza incrostante dello stesso colore, che furono considerati come cloromanganocalite completamente metamorfosata. Lo Spencer [4]) eseguì su questa sostanza giallastra delle ricerche, che non condussero ad alcun risultato positivo.

Grazie alla cortesia del Dr. Johnston-Lavis, ho potuto esaminare una piccola porzione della ricordata sostanza giallastra, ed ho, così, potuto porre in chiaro che essa non è altro che alunite sodifera. L'alunite non era stata finora ricordata tra i minerali del Somma-Vesuvio.

Al microscopio, la sostanza gialla studiata si mostra composta essenzialmente da un minerale uniassico, positivo, mescolato ad alite, a silvite, a gesso, a particole di eritrosiderite (quest'ultime visibili già ad occhio nudo per il loro colore) ed a prodotti torbidicci indeterminabili, in parte igroscopici. Il minerale prevalente non si scioglie nell'acqua, e si può, così, purificare, almeno parzialmente: non è solu-

---

[1]) Chemische Krystallographie, II, 397.

[2]) Compt. rend., 1898, CXXVI, 362.

[3]) Compt. rend., 1898, CXXVI, 553.

[4]) Min. Mag., 1908, XV, 54.

bile nemmeno nell'acido cloridrico, mentre si scioglie nell'acido solforico concentrato e caldo.

Fondendo il minerale con carbonato sodico, è facile constatare, nella soluzione della massa fusa, l'esistenza di una grande quantità di acido solforico e di alluminio. Con i saggi microchimici, nella sostanza gialla liberata con l'acqua dai cloruri alcalini si pone in evidenza la presenza del potassio e del sodio: di questi elementi il primo è alquanto prevalente sul secondo, dimodochè il nostro minerale deve considerarsi come una alunite sodifera e non come una natronalunite.

L'alunite del Vesuvio deve la sua origine a dei fenomeni di pneumatolisi: l'acido solforico delle fumarole ha decomposto la leucite ed i feldspati del blocco di leucotefrite raccolto da Johnston-Lavis, in condizioni tali da dar luogo alla formazione dell'alunite, anzichè a quella, di tanto più comune, dell'allume e dell'allumogeno. È molto probabile che una temperatura più elevata sia stata quella che ha determinato la produzione della prima.

finita di stampare il dì 31 Agosto 1912

Errata-Corrige alla Mineralogia vesuviana

pag.	riga	si legga	invece di
18	2 dall' alto	linarite	licorite
183	5 »	0,8385	8,8385
237	8 dal basso	svista	vista
344	11 dall' alto	potassio	sodio

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

DEI RAPPORTI
TRA LE CELLULE NERVOSE E LO STRATO INTERNO DELLE CAPSULE
IN CUI SONO COMPRESE NEI GANGLII CEREBROSPINALI E SIMPATICI

MEMORIA

del Dott. ALESSANDRO CHIEFFI

(presentata nell'adunanza del dì 1 Febbraio 1913)

Fin dal 1892 il prof. Paladino ha richiamato l'attenzione degli osservatori sulla minuta struttura del sistema nervoso centrale, specialmente in riguardo al nevroglio ed ai rapporti che questo assume con le cellule e le fibre nervose.

Prima delle sue ricerche il nevroglio era considerato come semplice tessuto interstiziale, formato di cellule a caratteri morfologici ben distinti (astrociti di Deiters, cellule aracniformi, Spinnenzellen, di Jastrowitz, cellule raggiate di Golgi), alla cui conoscenza massimamente contribuirono, dopo il Virchow che pel primo le vide, il Deiters ed il Golgi; però da tutti i ricercatori furono completamente trascurati i rapporti intimi che corrono sia tra gli stessi elementi nevroglici, sia tra essi e le cellule e le fibre nervose.

Il Paladino in una serie di ricerche, mercè l'applicazione di particolari metodi, ha potuto mettere in evidenza come gli elementi nevroglici non solo assumono tra loro mutui rapporti di continuità sia prossimali che distali, ma che:

formano coi loro prolungamenti una rete pericellulare (ragnatelo nevroglico) ed una intracellulare negli elementi nervosi;

si continuano nella midolla delle fibre nervose formandone lo scheletro mielinico;

ed inoltre si continuano in superficie con la piameninge e con lo scheletro mielinico delle fibre delle radici spinali.

Tali ricerche sono state confermate da numerosi ricercatori nazionali ed esteri. Il van Gehuchten, a proposito del trofospongio di Holmgren, rivendica al Paladino la descrizione di un reticolo nevroglico che non solo circonda la cellula nervosa ma l'attraversa (rete intracellulare), restando in continuazione col nevroglio

periferico; Prenant gli riconosce di aver descritto pel primo una rete nevroglica peri ed endocellulare, ed Held ne mette in rilievo l'importanza per la migliore conoscenza della costituzione del sistema nervoso centrale. Halvar von Fieandt ha confermato la natura nevroglica della rete pericellulare; il Nemiloff della rete della guaina mielinica, e nelle fibre periferiche la mette in rapporto con le cellule della guaina di Schwann.

Apertosi così un vasto campo d'indagini agli studiosi per la esatta conoscenza della struttura del sistema nervoso, io ho voluto estendere tali ricerche sul tessuto nervoso periferico, e propriamente sui gangli cerebrospinali e simpatici dell'uomo ed in generale dei mammiferi.

Le mie ricerche come ho già detto si sono rivolte per ora esclusivamente ai mammiferi, ed in esse ho portato massimamente l'attenzione sulla costituzione della capsula che circonda le cellule gangliari.

La capsula pericellulare nei gangli cerebrospinali fu notata fin dai primi ricercatori (Valentin, Schwann, Hannover), ed è stata oggetto di molto studio da parte degli autori per poterne stabilire esattamente la costituzione.

Secondo Kölliker nei mammiferi sarebbe stata costituita da una semplice membrana anista; per Arnold invece da elementi schiacciati, a protoplasma granuloso, che si continuavano nella guaina della fibra nervosa.

Fraentzel pel primo la descrisse formata da una membrana a struttura striata con nuclei ellittici nel suo spessore, rivestita internamente da uno strato unico di elementi piatti, forniti di nucleo. Tale struttura fu confermata da Merkel, ed in seguito quasi tutti i ricercatori hanno confermato i due strati dell'involucro pericellulare (Retzius, Cajal, Holmgren, Lenhossek, ecc.)

Per Key e Retzius, Erik Muller la membrana esterna è anista: secondo Acquisto è formata da due o tre lamelle in continuità col connettivo.

Cajal descrisse una membrana di fibre collagene con uno strato di cellule endoteliali all'interno; più all'interno Cajal e Oloriz trovarono delle cellule stellate fusiformi, che abbracciano le cellule gangliari e terminano liberamente con varicosità alla loro superficie.

Lenhossek distingue la capsula propriamente detta e le cellule capsulari che chiama anficiti; questi hanno con la capsula semplici rapporti di contiguità, e sono addensati in corrispondenza del glomerulo del neurite: la capsula manca nei ganglii del cavallo e nell' acustico dell' uomo.

Per Dogiel la capsula, formata da una membrana anista riveste immediatamente la cellula: all'esterno di essa vi sono cellule stellate, fusiformi, che infossano alquanto la capsula.

Levi infine, che si è occupato dei ganglii cerebro-spinali in tutte le classi animali, la descrive formata da connettivo a sottili fibre intrecciate, concentriche alla cellula, con qualche nucleo nel suo spessore; alla superficie interna si trova uno strato di cellule appiattite.

Nelle mie ricerche come materiale oltre che dell'uomo mi sono servito del coniglio, gatto, agnello, vitello, bue. Cura speciale ho avuto di procurarmi materiale

freschissimo; a questo scopo per gli animali di gran mole quali il vitello, il bue, mi son recato al macello pubblico, in modo da poter mettere i pezzi nei liquidi fissatori pochi minuti dopo l'uccisione dell'animale. Per l'uomo mi son dovuto accontentare di ciò che potevano offrirmi le sale anatomiche non avendo trascurato di tener d'occhio qualche operazione sul vivo che avesse potuto offrirmi materiale opportuno.

Dei ganglii cerebrali ho preso in esame il ganglio di Gasser, degli spinali a preferenza quelli appartenenti ai rigonfiamenti cervico-dorsale e dorso-lombare.

Varii sono stati i metodi di cui mi sono servito per fissare e colorare: come fissatori ho usato il liquido di Zenker, il bicromato potassico al 2 ed al 4 %, il sublimato acetico in soluzione al 4 %, il liquido di Flemming: ho dato però a quest'ultimo la preferenza. Per la colorazione sulle sezioni ho adoperato la rubina acida ed il miscuglio di ematossilina e scarlatto (Paladino) dal quale specialmente ho avuto risultati molto soddisfacenti.

Quali metodi d'impregnazione ho inoltre adoperati: il metodo di Paladino al joduro di palladio; il metodo di Cajal al nitrato d'argento ridotto; i diversi metodi al cloruro d'oro secondo Ranvier, Löwit, Ruffini, Apathy.

Come ho già innanzi detto ho principalmente rivolta l'attenzione alla costituzione dell' involucro pericellulare.

Nei ganglii cerebro-spinali esso risulta costituito di due strati nettamente distinti tra loro: uno strato esterno, la capsula propriamente detta; ed uno strato interno, posto tra la capsula e la cellula gangliare (rivestimento cellulare della capsula), strato che pei rapporti che assume con la cellula gangliare ed il suo neurite possiamo considerare di natura nevroglico.

Lo strato esterno della capsula è costituito da elementi connettivali schiacciati, appiattiti, che hanno tutto l'aspetto d'un endotelio; in essi appare molto distinto il nucleo ovolare o bastonciniforme, che si colora bene coi colori basici: il protoplasma ha struttura fibrillare a fibrille piuttosto grosse (fig. 1 a 12).

Queste cellule sono giustaposte fra di loro in modo da formare un involucro continuo, interrotto solo all'uscita del neurite, sul quale si prolunga continuandosi con la guaina di Schwann.

Il numero di esse che occorre per formare la capsula varia con la grandezza delle cellule gangliari: nelle grosse cellule di vitello, di bue si veggono in una sezione concorrervi fino a dodici, tredici di tali elementi ed anche più.

All'esterno la capsula è in rapporto col connettivo interstiziale, all'interno con gli elementi endocapsulari.

Questi formano lo strato interno dell'involucro pericellulare: interessantissimo ne è il loro studio, sia dal punto di vista morfologico, sia per i rapporti che assumono con la capsula e specialmente con la cellula gangliare ed il suo neurite.

La loro forma è varia: triangolare, stellata, fusiforme; a volta si presentano rotondi od anche lamellari: sono forniti di un grosso nucleo circondato da poco protoplasma. La struttura del protoplasma è nettamente filare a fibrille piuttosto fini e sottili (fig. 1 a 12).

Il nucleo più o meno vescicolare contiene nel suo interno un nucleolo: la cromatina forma un fine reticolo, od è anche raccolta in piccole masse o granulazioni.

La grandezza di questi elementi non varia di molto, anche nelle diverse specie di animali da me prese in esame; nè ho notato alcun rapporto costante tra il volume della cellula gangliare e la loro grandezza. Il numero al contrario è molto vario, specialmente in rapporto alle diverse specie di animali; da tre o quattro che si osservano circondare una sezione di una cellula d'agnello (fig. 4 e 10) poco più nel gatto (fig. 3, 5), raggiungono nelle grosse cellule del vitello e del bue il numero di venti, venticinque ed anche più (fig. 1, 2, 9, 11, 12). Nell'uomo si osserva del pari tale abbondanza.

La loro disposizione all' interno della capsula è in un unico strato; nel vitello e nel bue, però, non è raro vederli più addensati in alcuni punti e disposti in due ed anche più strati (fig. 2, 11): nell' uomo tale disposizione mi è sembrata più frequente (fig. 6). Caratteristico è il loro addensamento in corrispondenza del neurite, che ne è interamente circondato in tutta la sua estensione (fig. 10, 11, 12).

Alle volte essi stanno molto dappresso all'elemento gangliare, e vi si addossano addirittura, tanto da lasciarvi una marcata impronta sul suo contorno (fig. 5, 6, 7).

I rapporti che questi elementi assumono con la capsula sono di semplice contiguità: nelle sezioni sottili tale condizione vien messa chiaramente in evidenza. La fig. 1 rappresenta una cellula gangliare di vitello: in essa si veggono appunto i due strati dell' involucro pericellulare nettamente distinti tra loro, aventi semplici rapporti di contiguità.

Ben più importanti ed interessanti sono i rapporti che assumono con la cellula gangliare che circondano.

Dalla loro periferia partono dei prolungamenti in numero vario e di diversa lunghezza e spessore: alla loro origine tali prolungamenti sono più spessi e manifestamente filari; subito dopo si ramificano, divenendo più sottili e, talora, lungo il loro percorso si presentano varicosi. Si originano per lo più irregolarmente, alle volte paralleli tra loro come i denti di un pettine. Dalla cellula da cui prendono nascenza si dirigono verso l'elemento gangliare con un decorso irregolare, sinuoso, e dividendosi ed anastomizzandosi tra loro, formano una rete più o meno intricata a maglie irregolari (fig. 1 a 12): talora nei punti d'incrocio dei diversi rami non è raro vedere qualche corpuscolo o piccolo nucleo (fig. 11 e 12).

La rete così costituita circonda interamente la cellula gangliare. Le diverse figure lasciano chiaramente vedere simile disposizione; anzi nella fig. 7 si osserva l'estremo polo di una cellula, situata ad un fuoco più basso, tutto avviluppato dalla rete pericellulare, posta ad un fuoco più alto; la stessa figura lascia inoltre notare, addossata alla cellula gangliare, una delle cellule endocapsulari, che coi suoi prolungamenti anastomizzati a quelli di altre cellule, concorre a formare l'intricata rete.

Nè qui si arrestano i rapporti tra questi elementi e la cellula gangliare, poichè dal descritto reticolo pericellulare partono rami più sottili che si addentrano nella cellula, ove, continuando a dividersi ed ad anastomizzarsi tra loro, formano una seconda rete, intracellulare, che si estende fino in vicinanza del nucleo.

Essa vien messa in evidenza molto chiaramente con il metodo al cloruro d'oro

secondo Apathy: nell'usare questo metodo però ho trovato opportuno prolungare il bagno nel cloruro d'oro fino a dodici, diciotto e più ore, per pezzi della grandezza di circa un mezzo centimetro cubico; ed usare per la riduzione una soluzione d'acido formico al 4 o 5 %.

La fig. 9 (cellula di ganglio spinale di vitello, trattato appunto secondo il metodo da Apathy con le modifiche dette) mostra tale rete interna allo stesso livello del nucleo, fatto che lascia cadere ogni dubbio che essa possa essere extracellulare: anche le altre figure lasciano vedere frammenti del reticolo intracellulare.

Inoltre la fig. 8 fa notare due reticoli, esterno l'uno, a fuoco più alto, l'altro interno ed a fuoco più basso; che anzi alcuni rami del reticolo pericellulare, chiaramente si veggono penetrare nell'interno della cellula e concorrere con le loro diramazioni a formare la rete interna.

Del pari interessanti sono i rapporti degli elementi endocapsulari col neurite della cellula, comunque esso si disponga. Già precedentemente ho detto come essi si addensano in sua corrispondenza (fig. 10, 11, 12). I prolungamenti che ne partono circondano il neurite fin dal primo inizio (fig. 10 e 11) avvolgendosi intorno ad essi in modo da formare degli anelli concentrici (come meglio si osserva nelle sezioni dove il neurite appare tagliato trasversalmente), e con le loro divisioni ed anastomosi concorrono a formare un reticolo perineuritico: spesso anche in corrispondenza del neurite notansi dei piccoli nuclei, dai quali partono rami che concorrono anch'essi alla formazione della rete (fig. 11, 12).

Questo comportamento delle cellule endocapsulari intorno al neurite, si osserva lungo tutto il decorso del neurite, ed in effetti in sezioni dove questo è venuto tagliato in più punti si vede sempre circondato dalla sua rete (fig. 12). La fig. 11, in cui è raffigurata una cellula di ganglio lombare di agnello, mostra il neurite sia alla sua origine dalla cellula, sia, dopo essere stato interrotto nelle sue volute, in sezione longitudinale per un tratto abbastanza lungo, ed in tutto il suo non breve decorso si osserva la ricca rete che lo circonda.

Tale rete evidentemente è in connessione con lo scheletro mielinico della fibra nervosa che si origina dal neurite, e per mezzo delle radici posteriori anche col nevroglio centrale del midollo spinale.

In tutte le specie animali che ho esaminate io ho sempre riscontrata la stessa disposizione, come del resto si osserva dalle figure annesse, e non ho notate differenze notevoli dall' una all' altra specie. Solo voglio richiamare l' attenzione sulla ricchezza della rete pericellulare e degli elementi che concorrono a formarla negli animali di mole più grande, di fronte a quelli più piccoli : evidentemente questo è in istretto rapporto col processo di nutrizione, di modo che si spiega come essi abbondano là dove la cellula ha raggiunto un maggior volume in relazione alla lunghezza del neurite, e forse anche in relazione all' estensione del territorio che essa, per mezzo della fibra cui dà origine, è destinata ad innervare (Pierret, Donaldson, Cajal).

Il Daae nel 1888 descrisse nel cavallo tra le cellule normali delle cellule atipiche, il cui neurite si divideva in diversi rami che, per mezzo di fibre sottili ed amieliniche, si anastomizzavano tra loro non solo, ma anche col corpo cellulare.

Cajal nel 1905 confermò tale struttura e considerò la rete come un fenestramento della cellula: descrisse anche altre forme atipiche, quali le cellule clavate, le cellule corrose.

Le ricerche di Cajal furono generalmente accettate, anzi, specialmente per opera di Levi, Dogiel ed altri si iniziò tutta una serie di studii su queste cellule atipiche.

Il Levi ne distingue diversi tipi: cellule fenestrate; cellule con lobulazioni, con appendici a clava; cellule con plessi pericellulari fatti da fibre che si originano dalla cellula stessa; cellule con prolungamenti terminali simili a dendriti. Sia alla zona fenestrata che alle altre strutture assegna una funzione nutritiva; servirebbero a facilitare gli scambi nutritivi.

Gli anficti di Lenhossek (anche secondo Cajal) contraggono intimi rapporti con la zona fenestrata, insinuandosi nelle maglie della rete; ed in orthagoriscus anche fibre collagene dello strato esterno della capsula penetrano nell' interno della zona fenestrata, nello spazio limitato dalle trabecole (Levi).

Dogiel a sua volta distingue anch' egli diverse specie di cellule atipiche, ma non accetta la denominazione di cellule fenestrate. Inoltre afferma che nell' interno della capsula di ogni cellula terminano fibre simpatiche formando delle reti pericellulari, che sarebbero a loro volta tutte connesse tra loro per mezzo di sottili fili in modo da formare una rete continua.

Donaggio, fondandosi sul fatto che nei preparati trattati coi suoi metodi 1, 2 e 7 la zona fenestrata ed il cilindrasse si colorano con tinta diversa dalla parte centrale della cellula, crede che il cosiddetto fenestramento sia un sistema di prolungamenti cellulari della stessa natura del prolungamento cilindrassile.

Dal punto di vista istopatologico si sono occupati di tali cellule atipiche il Nageotte ed il Marinesco; il Nageotte trovò grande aumento di fibre clavate nei ganglii dei tabetici; esse sarebbero organi riparatori e chiama il fenomeno rigenerazione collaterale; in ganglii di coniglio trapiantati sotto la cute osservò anche la comparsa di abnormi prolungamenti, che raggruppa in sei tipi. Marinesco vide cellule fenestrate in casi di polinevrite e di rabbia, e si occupò anche lui delle modificazioni dei ganglii trapiantati sotto la cute.

Oltre queste reti e plessi pericellulari il Babes ed il Kremnitzer descrissero canestri pericellulari provenienti da fibre amieliniche, che si originano da cellule radicolari posteriori, già viste da Lenhossek.

Cajal e Oloriz notarono pure delle terminazioni periglomerulari che circondano il neurite nel suo tratto intracapsulare.

Riguardo a tali cellule atipiche, nella lunga serie di preparati da me osservati, debbo confessare di non averne notate mai, anche nei preparati trattati col metodo di Cajal: debbo anche dire che nelle specie da me prese in esame, tranne che nell' uomo, le cellule atipiche non sono in gran quantità.

A volte ho notato dei vacuoli, e, specie in materiale appartenente a soggetti vecchi (uomo, bue) anche, come del resto dimostrano le figure 2 e 6, il contorno della cellula più o meno irregolare, sinuoso, forse per fenomeno di senescenza, ma mai delle cellule fenestrate.

In pezzi trattati col cloruro d'oro secondo il metodo di Löwit, ho ottenuto delle immagini raffigurate nella fig. 13: forse in esse si potrebbe vedere un certo fenestramento: ma se si pon mente che lo stesso materiale da me trattato col metodo di Löwit, cioè ganglii spinali di vitello, e che mi ha dato simili immagini, fu anche trattato con gli altri metodi della fissazione in liquido di Flemming e successiva colorazione in ematossilina e scarlatto, dandomi le immagini che si veggono nelle figure 1, 8, 9, 11, 12, bisogna riconoscere come in questo caso tale zona periferica sia tutto un artefatto dipendente dal metodo usato, e fatto appunto a spese dello strato endocapsulare pericellulare.

Col metodo di Cajal non si pone in evidenza la rete pericellulare, ed anche in questo caso mi son potuto convincere che si tratti di artifizio di tecnica; poichè in alcuni preparati non riusciti, non essendo avvenuta interamente la riduzione, ho potuto benissimo osservare il reticolo pericellulare, reticolo che non si osserva più nei preparati in cui la riduzione è venuta completa. Fo notare che il materiale era sempre del medesimo animale.

Di modo che dalle ricerche da me eseguite, risulta come tale fenestramento, e le altre strutture atipiche bisogna nei mammiferi attribuirle ad artefatti dovuti ai metodi usati, ed anche collegarle a fenomeni di senescenza cellulare: in ogni modo bisogna in massima riportarle allo strato di elementi cellulari, che si trovano distesi sulla faccia interna della capsula, ed a sviluppo esagerato dei prolungamenti che da essi partono: come anche a questo strato bisogna riportare tutte le reti descritte intorno alle cellule gangliari e diversamente interpetrate dagli osservatori.

Tutto ciò osservato nei ganglii cerebrospinali mi indusse a ricercare se altrettanto s'avvera nei ganglii simpatici.

Anche per essi le mie ricerche si sono rivolte esclusivamente ai mammiferi ed oltre che dell'uomo mi son servito del coniglio, gatto, asino, cavallo. Come pei ganglii cerebrospinali ho avuto massima cura di procurarmi materiale freschissimo: per il materiale di cavallo e di asino mi sono rivolto alla Scuola di Medicina Veterinaria.

Dei diversi ganglii ho esaminato a preferenza il cervicale superiore, il cervicale inferiore, il celiaco (semilunare).

I metodi usati sono stati gli stessi di quelli adoperati per i ganglii cerebrospinali detti innanzi.

Data l'indole delle mie ricerche anche nel simpatico ho rivolto principalmente l'attenzione alla costituzione della capsula pericellulare.

Essa non è stato oggetto di molto studio da parte dei ricercatori, come nei ganglii spinali; fu ritenuta come in questi, essenzialmente costituita da fibre connettivali rivestite all'interno da uno strato di cellule piatte (Fraentzel, Löwentahl, Dogiel).

Secondo Biondi nel ganglio sottopalatino dell'uomo è poco evidente; inoltre questi vi ha riscontrato dei nuclei che riporta agli anficiti di Lenhossek.

Terminazioni nervose pericellulari a guisa di nidi, provenienti da diverse vie furono nel simpatico dei mammiferi descritte da varii autori: Aronson, Retzius,

van Gehuchten, Smirnow, Kölliker, Cajal, Sala. Pitzorno ha inoltre descritto nei selacei e nei chelonei cellule con appendici a clava, e cellule con fenestramento formato da due occhielli; cellule con cavità occupate da connettivo, ed anche degli elementi che presentano una cavità in cui è annidata una cellula più piccola.

Voglio anche qui ricordare la rete di canalicoli intracellulari descritta da Holmgren e confermata da Henschen, che però non accetta la concezione del trofospongio di Holmgren.

Io nella struttura della capsula pericellulare delle cellule simpatiche ho riscontrato in massima la stessa costituzione che si osserva nei ganglii spinali.

Anche nel simpatico bisogna distinguere due strati: lo strato esterno e lo strato interno: lo strato esterno forma la capsula propriamente detta.

Essa è meno differenziata che nei ganglii cerebrospinali; risulta costituita da fine fibrille connettivali concentriche che limitano lo spazio in cui è annidata la cellula gangliare col suo rivestimento. Nell' uomo tale disposizione è più evidente (fig. 14 e 15); nel cavallo al contrario la capsula è ancora meno differenziata, tanto che a volta lo strato pericellulare endocapsulare sembra in diretto rapporto col connettivo interstiziale (fig. 16, 17).

Lo strato interno è costituito da cellule che sia per la loro struttura, sia per il loro comportamento ricordano perfettamente quelle dei ganglii cerebrospinali. Nel simpatico però esse sono un po' più piccole, ed in numero di molto inferiore; relativamente numerose sono nell' uomo e nel cavallo dove possono raggiungere il numero di sei, sette, ed anche più (fig. 14, 15, 16, 17, 18).

Sono in genere disposte in un unico strato lungo la parete della capsula, alle volte più dappresso alla cellula gangliare tanto da addossarsi addirittura ad essa. In alcune sezioni ne ho veduta qualcuna situata in una specie di nicchia formata dal protoplasma, che in certo modo la circondava quasi interamente (fig. 14).

In un caso ho anche notato due cellule endocapsulari annidate in due vacuoli della stessa cellula (fig. 21). Tale disposizione è da mettersi in rapporto alla compenetrazione del nevroglio nel corpo della cellula descritta dal prof. Paladino, compenetrazione che egli, nei lobi elettrici della torpedine, ha visto raggiungere proporzioni eccezionali, nei casi di vacuolizzazione per senescenza, o anche per condizioni patologiche.

Tralascio d' indagare se si tratti di un fenomeno della cosidetta neurofagia (Marinesco, Metchnicoff, Valenza) non rientrando ciò nel fine delle mie ricerche.

I prolungamenti che partono dagli elementi pericellulari sono nel simpatico molto sottili e fini e formano una delicata rete a maglie più strette che nei ganglii cerebrospinali (fig. 14 a 18) e che si continua anch'essa in una rete endocellulare (fig. 20).

Negli elementi del simpatico ho ottenuto in qualche taglio le cosidette immagini negative della rete intracellulare nevroglica (Paladino). La fig. 19 rappresenta appunto tale immagine negativa intracellulare che nell'assieme può ricordare il trofospongio di Holmgren: esse sono dovute al rapidissimo e completo indurimento

del protoplasma da una parte, e dall'altra alla incompleta colorazione dei rami del nevroglio (Paladino), fatto che si verifica nella zona periferica dei pezzi trattati col liquido di Flemming per l'azione dell'acido osmico, zona dove appunto si notano di solito tali immagini.

Con i prolungamenti della cellula gangliare, gli elementi endocapsulari non assumono alcun rapporto diretto; sia il prolungamento cilindrassile che i dendritici sono nel loro breve tratto intracapsulare circondati dalla rete pericellulare, che non assume intorno ad essi nessuna disposizione speciale (fig. 14, 16, 18).

Dai risultati da me ottenuti posso concludere:

L'involucro pericellulare sia nei ganglii cerebrospinali che nei simpatici è costituito di due strati: uno esterno, la capsula propriamente detta, ed uno interno, formato da cellule che assumono mercè i loro prolungamenti speciali rapporti con la cellula gangliare.

I due strati suddetti hanno tra loro semplici rapporti di contiguità.

Lo strato esterno è formato nei ganglii cerebrospinali da elementi appiattiti, endoteliformi; nei ganglii simpatici da fibre connettivali.

Lo strato interno coi suoi prolungamenti forma intorno alla cellula gangliare un reticolo pericellulare, che si continua in un altro reticolo endocellulare.

Nei ganglii cerebrospinali esso contrae rapporto anche col neurite, formando intorno ad esso una rete.

Tale rete perineuritica si continua con lo scheletro mielinico della fibra nervosa che si origina dal neurite, e, per mezzo delle radici posteriori, probabilmente è anche in rapporto col nevroglio centrale del midollo spinale.

Istituto d'Istologia e Fisiologia generale dell'Università di Napoli.

BIBLIOGRAFIA

Acquisto, *Sulla struttura delle cellule nervose dei ganglii spinali dell'uomo.* Mon. zool. Ital., Vol. X, 1899.

Arnold Julius, *Bemerkungen eines Beiteilingten über Spiralfarsen und pericelluläre Fadennetze an den Ganglienzellen des Sympathicus.* Anat. Anz., Bd. 14, 1880.

Apolant, *Ueber die sympathischen Ganglienzellen der Nager.* Arch. f. Mikr. Anat., Bd. 47, 1896.

Bianchi V., *Il mantello cerebrale del delfino.* Atti della R. Accad. di Sc. Fis. e Mat. di Napoli, 1908.

Bruchner, *Note sur la structure de la cellule simpatique chez l'homme.* C. R. Soc. Biol., Paris, Vol. V, 1898.

— *Structura Simpaticului.* Thèse de Bucarest, 1901.

Biondi, *Sulla fine struttura dei ganglii annessi al simpatico craniano dell'uomo.* Ricerche fatte nel Lab. d'Anat. norm. d. R. U. di Roma, ecc., Vol. XVI, 1912.

Capobianco e Fragnito, *Nuove ricerche sulla genesi e sui rapporti mutui degli elementi nervosi e nevroglici.* Ann. di Neur., 1898.

Carazzi D., *Artefatti, pigmento e vacuoli nelle cellule dei ganglii spinali dei mammiferi.* Mon. zool. ital., 1907, Vol. XVIII.

Cesa Bianchi, *Di una particolarità di struttura nella cellula nervosa dei ganglii spinali.* Mon. zool. ital., Vol. XVII, 1906.

— *Le inclusioni del protoplasma della cellula nervosa gangliare.* Arch. ital. di Anat. ed Emb., Vol. VII, 1907,.

— *Alcune osservazioni alla Nota « Artefatti, pigmenti e vacuoli, ecc. ».* Mon. zool. ital., Vol. XVIII, 1907.

Daae, *Zur kenntniss den Spinalganglien bei einem Säugethière.* Arch. f. Mikr. Anat., Bd. 31, 1888.

De Berardinis, *Ricerche sul nevroglio del nervo ottico.* Mon. zool. ital., Vol. VI, 1895.

Dehler Adolf, *Beitrag zur kenntniss vom feinere Bau der sympathischen Ganglienzellen des Frosches.* Arch. f. Mikr. Anat., Bd. 46, 1896.

Dogiel, *Zur frage über die Ganglien der Darmgeflechte bei den Säugethieren.* Anat. Anz., Bd. 10, 1895.

— *Zwei arten sympathischer Nervenzellen.* Vorlaüfige Mittheilung in Anat. Anz., Bd. 11, 1896.

— *Der Bau der Spinalganglien des Menschen und der Säugethieren.* G. Fischer, Jena, 1908.

Donaggio, *Sui rapporti tra capsula pericellulare e vasi sanguigni nei ganglii spinali dell'uomo.* Riv. spec. di Fren., Vol. XXVI, 1900.

— *Nuovi dati sulle propaggini nervose del citoplasma e sulle fibre collagene dei gangli spinali.* Riv. spec. di Fren., Vol. XXXVII, 1911.

Donaldson, *On a law determining the number of medullated Nerve-fibers in the ventral roots of the spinal Nerves in the growing withe Rat.* Journ. of. compar. Neurol., Vol. XIII, 1903.

Fraentzel, *Beitrag zur kenntniss von Struktur der Spinalen und sympathischen Ganglienzellen.* Virch. Arch., Bd. 38, 1867.

Golgi, *Opera Omnia.*

Halvar von Fieandt, *Eine neue Methode zur Darstellung des Gliagewebes nebst beiträgen zur kenntniss des Baues und der Anordnung der Nevroglie des Hundehirns.* Arch. f. mikr. Anat., Vol. LXXVI, 1910.

Held H., *Ueber den Bau der grauen und Weissensubstanze.* Arch. fur Anat. und. Physiol., 1903, anat. abt.

— *Kritische Bemerkungen zu der Verteidigung der Neuroblasten und der Neuronentheorie durch Ramon y Cajal.* Anat. Anz., Bd. 30, 1907.

Henle, *Traité d'Anatomie generale.* Tome II, 1843.

Henschen, *Ueber Trophospongienkanälchen sympathischer Ganglienzellen beim Menschen.* Anat. Anz., Bd. 24, 1903.

Holmgren, *Beitrage zur Morphologie der Zelle 1° Nervenzellen.* Anat. Hefte, H. 59, 1901.

— *Ivi 2° Verschieden Zellarte.* Anat. Hefte, H. 75, 1904.

Jonnesco e Bruckner, *Structure du simpatique cervical.* C. R. 13. Cong. intern. de Med., 1900, Sect. d'hist. et d'Embr.

Key e Retzius, *Studien in der Anatomie des Nervensystems.* Arch. fur. Mikr. Anat., Bd. 9, 1873.

— *Studien in der Anatomie des Nervensystems und des Bindegewebes.* Stockholm, 1876.

Kölliker, *Handbuch der Gewebelhere des Menschen.* Bd. 2, 1896.

Laignel-Lavastine, *Citologie normale des ganglions solaires.* Arch. de Medic. exper. et d'Anat. path., Année 16, 1904.

Lenhossek M., *Ueber den Bau der Spinalganglienzellen des Menschen.* Arch. f. Psyc., Bd. 29, 1891.

— *Bemerkungen über den Bau der Spinalganglienzellen.* Neurol. Centrabl., Bd. 17, 1898.

— *Zur kenntniss. der Spinalganglienzellen.* Arch. f. Mik. Anat., Bd. 69, 1906.

— *Das Ciliarganglien der Reptilien.* Arch. f. Mik. Anat., Bd. 80, 1912.

Levi, *I ganglii cerebrospinali.* Arch. ital. d'Anat. ed Embr., Vol. VII, 1908.

— *Appunti alla pubblicazione di Donaggio « Nuovi dati sulle propaggini nervose ecc. ».* Mon. zool. ital., Vol. XXII, 1911.

Löwentahl, *Ueber eigentümliche Zellengebilde in Sympathicus des Frosches.* Monatschr. Anat. un Physiol., Bd. 11, 1887.

Marano, *Contributo alla migliore conoscenza delle fibre del Mauthner.* Atti della Società ital. per il progresso delle Scienze, 1910-1911.

— *I rapporti del nevroglio con le cellule e le fibre nervose nel midollo spinale dei Teleostei.* Ann. di Neur., 1911.

Marinesco, *La cellule nerveuse.* O. Doin. et fils, Ed. Paris.

Merton, *Ueber ein intracelluläres Netzwerk der Ganglienzellen von Tethys leporina.* Anat. Anz., Bd. 30, 1907.

Nageotte, *Règeneration collaterale des fibres nerveuses terminées par des massues de croissance.* Nouv. Iconog. de la Salpetriere, 1906.

— *Note sur la régeneration amielinique des racines posterieurs dans le tabers et sur les massues d'accroissement qui terminent les fibres.* C. R. d. l. Soc. d. Biol., Tom. LX, 1906.

— *Variation du neurone sensitif periferique dans un cas d'amputation de la partie superieure de la cuisse.* C. R. d. l. Soc. d. Biol., Tom. LXIII, 1907.

Nageotte, *Etude sur la greffe des ganglions rachidiens: variation e tropisme du neurone sensitif.* Anat. Anz., Bd. 31, 1907.

Nemiloff, *Beobachtungen über die Nervenelement bei Ganoiden und Knochenfischen.* Teil I. *Der Bau der Nervenzellen.* Arch. f. Mikr. Anat., Bd. 72, 1908.

— *Ueber die Beziehung der sog. « Zellen der Schwannschen Scheide zum Myelin in den Nervenfasern von Säugethieren ».* Arch. f. mikr. Anat., Bd. 76, 1910.

Paladino, *De la continuation de la nevroglie dans le squelette myèlinique des fibres nerveuses et de la constitution pluricellulaire du cylindraxe.* Arch. it. d. Biol., Tom. XIX, 1892.

— *Contribuzione alla migliore conoscenza dei centri nervosi mercè il joduro di palladio.* Rend. della R. Accad. di Sc. Fis. e Mat. di Napoli, 1892.

— *Dei limiti precisi tra il nevroglio e gli elementi nervosi nel midollo spinale e di alcune quistioni istofisiologiche che vi si riferiscono.* Boll. della R. Accad. Med. di Roma, Anno XIX, 1893.

— *Ulteriori studi sui rapporti tra il nevroglio e le fibre e le cellule nervose nell'asse cerebro-spinale dei vertebrati.* Rend. della R. Accad. di Sc. Fis. e Matem. di Napoli, 1900.

— *Su alcuni punti controversi della struttura intima dei centri nervosi.* Mon. zool. ital., Anno XII, 1901.

— *Ancora sui più intimi rapporti tra il nevroglio e le cellule e le fibre nervose.* Rend. della R. Accad. di Sc. Fis. e Mat. di Napoli, 1908.

— *La dottrina della continuità nell'organizzazione del nevrasse nei vertebrati, e i mutui ed intimi rapporti tra il nevroglio e cellule e fibre nervose.* Rend. della R. Accad. di Sc. Fis. e Mat. di Napoli, 1911.

— *Instituzione di Fisiologia,* 3ª edizione, A. Morano e figli, editori, Napoli, 1904.

Pitzorno, *Sulla struttura dei ganglii simpatici nei selacei.* Monz. zool. ital., Anno XXI, 1910.

— *Su alcune particolarità delle cellule del cordone simpatico dei chelonei.* Monz. zool. ital., 1910.

— *Ulteriori studii sulla struttura dei ganglii simpatici nei selacii.* Monz. zool. ital., Anno XXII, 1911.

— *Su alcune pretese anastomosi tra le cellule dei ganglii simpatici.* Monz. zool. ital., Anno XXIII, 1912.

Prenant, Bouin et Maillard, *Traité d'Histologie.* Vol. II, Paris, Reinwald, 1911.

Ramon y Cajal S., *Sobre la existencia de terminaciones nerviosas pericellulares en los ganglios nerviosos raquidianos.* Barcelona, 1890.

— *Las cellulas del gran simpatico del Hombre adulto.* Trab. del Labor. de Investig. Biol., Tom. IV, 1891.

— *Pequenas contribuciones al conoscimiento del sistema nervioso.* Barcelona, 1891.

— *Algunos detalles mas sobre las cellulas simpaticas.* Barcelona, 1891.

— *Notas preventivas sobre la retina y gran simpatico de los mamiferos.* Estraido de la Gaceta Sanitaria, 1891.

— *Los ganglios y plexos nerviosos del intestino de los mamiferos.* Estraido de la Gaceta Sanitaria, 1903.

— *Die Struktur des sensiblen Ganglien des Menschen und der Thiere.* Ergebn. der Anat. und. Entw. kerausg von Merkelund Bonnet, Bd. 16, 1907.

Ramon y Cajal e Oloriz, *Los glanglios sensitivos corneales de los mamiferos.* Rev. trim. microg., Vol II, 1907.

Ranson S. Walter, *The structure of the spinal ganglia and of the spinal nerves.* The Journ. of the comp. Anat., Vol. XXII, 1912.

Ranvier, *Traité tecnique d'Histologie.* Paris, 1889.

Retzius, *Untersuchungen über die Nervenzellen der Cerebrospinal ganglien und der ubrigen peripheren Kopfganglien* ecc. Arch. f. Anat., 1880.

Retzius, *Zur kenntniss der Ganglienzellen des Sympathicus.* Biol. forenin., Forhandl., 1890.

— *Zur kenntniss der Ganglienzellen des Spinal ganglien.* Biol. Unters. N. F., Bd. 4, 1892.

— *Ueber den Typus der Sympathischer Ganglienzellen der Lohren Wibelthiere.* Biol. Unters. N. F., Bd. 4, 1892.

— *Weiteres zur Frage von der Freien Nervendigungen und anderen Strukturverhältnissen bei den Spinalganglien.* Biol. Unters. N. F., Bd. 9, 1900.

Schwalbe, *Lehrbuch der Neurologie.* Erlangen, 1881.

Smirnow, *Die Struktur der Nervellenzen in Sympathicus der Anfibien.* Arch. f. mikr. Anat., Bd. 35, 1890.

— *Zur kenntniss der sympathischer ganglienzellen beim Frosche.* Anat. Hefh. I Abth., Bd. 14, 1900.

— *Einige Beobactungen über den Bau der Spinalganglienzellen bei einen viermonatlischen menschlichen Embryo.* Arch. f. mikr. Anat., Bd. 59, 1911.

Valentin, *Traité de Neurologie.* Encyclopedie Anat., Paris, 1843.

Van Gehuchten, *Anatomie du systeme nerveuse de l'homme*, 4ª edition, Louvain, Paris.

finita di stampare il dì 28 Febbraio 1913

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1. — Cellula di ganglio spinale di vitello. I due strati dell'involucro pericellulare con la rete pericellulare e frammenti di rete intracellulare a livello del nucleo $\frac{\text{oc. 3 Kor.}}{\text{obb. } ^1/_{12} \text{ imm. Reich., tubo 16.}}$

Fig. 2. — Cellula di ganglio spinale di bue. I due strati dell'involucro pericellulare con la rete pericellulare. Idem.

Fig. 3. — Cellula di ganglio spinale di gatto. Idem. Idem.

Fig. 4. — Cellula di ganglio spinale di agnello. Idem. Idem.

Fig. 5. — Cellula di ganglio di Gasser di gatto. Idem. Idem.

Fig. 6. — Cellula di ganglio spinale di uomo. Idem. Idem.

Fig. 7. — Cellula di ganglio spinale di bue. I due strati dell'involucro, rete pericellulare che avviluppa l'estremo polo di una cellula: osservasi anche una delle cellule endocapsulari addossata alla cellula gangliare. Idem.

Fig. 8. — Cellula di ganglio spinale di vitello: rete pericellulare che circonda l'estremo polo di una cellula, e rete intracellulare (a diverso fuoco). Alcuni rami della rete extracellulare penetrano nella cellula e concorrono alla rete interna. Idem.

Fig. 9. — Cellula di ganglio spinale di vitello. Rete intracellulare in continuazione della pericellulare a livello del nucleo. Idem.

Fig. 10. — Cellula di ganglio spinale lombare di agnello. Rete perineuritica lungo tutto il decorso del neurite. Idem.

Fig. 11. — Cellula di ganglio spinale di vitello. Rete pericellulare e perineuritica: sia nella rete pericellulare che in corrispondenza della rete perineuritica, notansi corpuscoli o nuclei di nevroglio. Frammenti di rete intracellulare. Idem.

Fig. 12. — Cellula di ganglio spinale di vitello. Rete perineuritica intorno al neurite tagliato trasversalmente in più punti. Notansi dei corpuscoli di nevroglio. Frammenti di rete intracellulare. Idem.

Fig. 13. — Cellula di ganglio spinale di vitello trattato col metodo di Löwit. Idem.

Fig. 14 e 15. — Cellule di ganglio cervicale superiore di uomo. I due strati dell'involucro. Nella fig. 15 si osservano anche frammenti di rete intracellulare. Idem.

Fig. 16 e 17. — Cellule di ganglio cervicale superiore di cavallo: lo strato interno è in rapporto col connettivo interstiziale. Idem.

Fig. 18. — Cellula di ganglio celiaco (semilunare) di cavallo. Rete pericellulare che circonda l'estremo polo della cellula; un elemento endocapsulare addossato alla cellula. Idem.

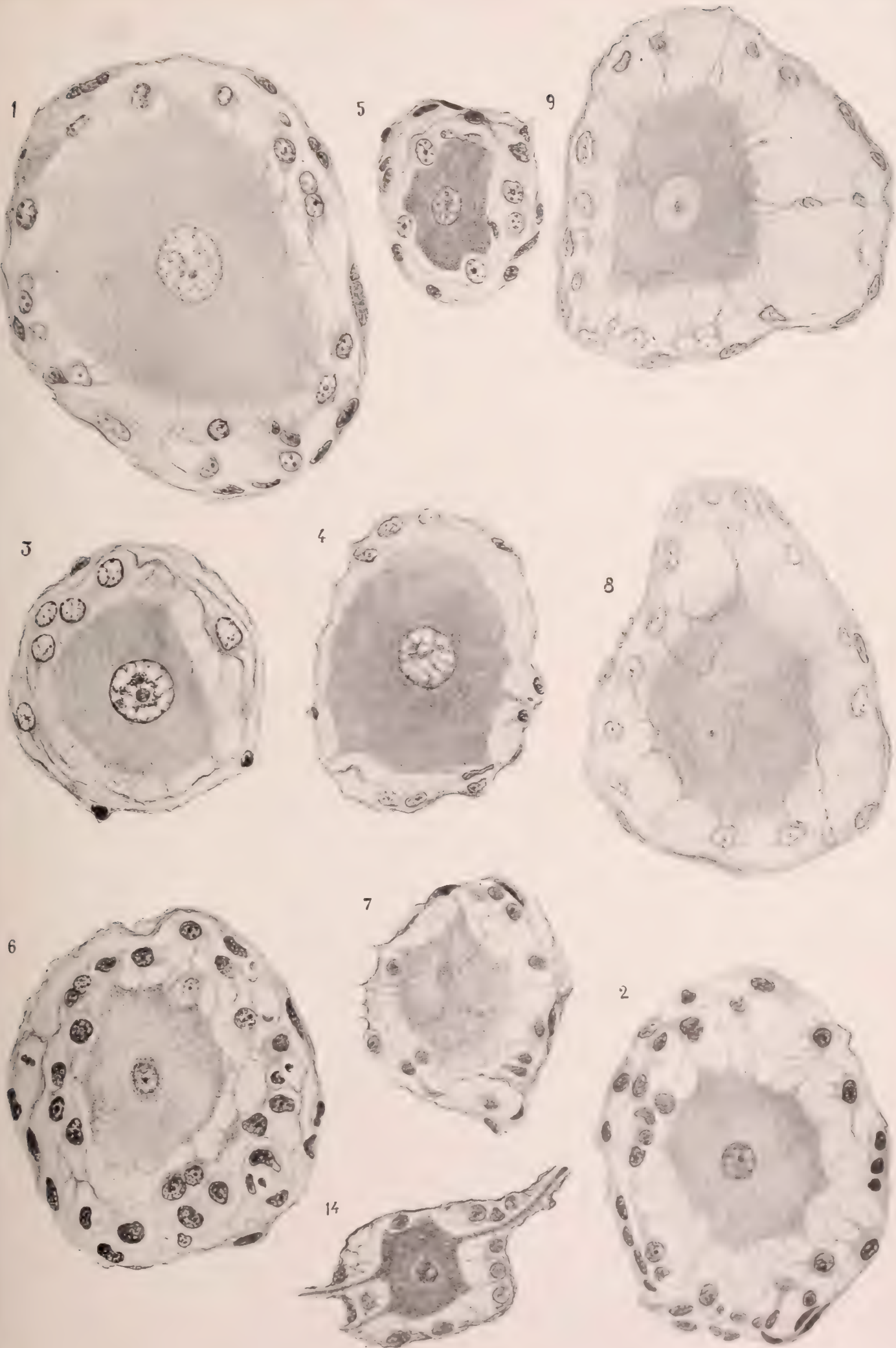
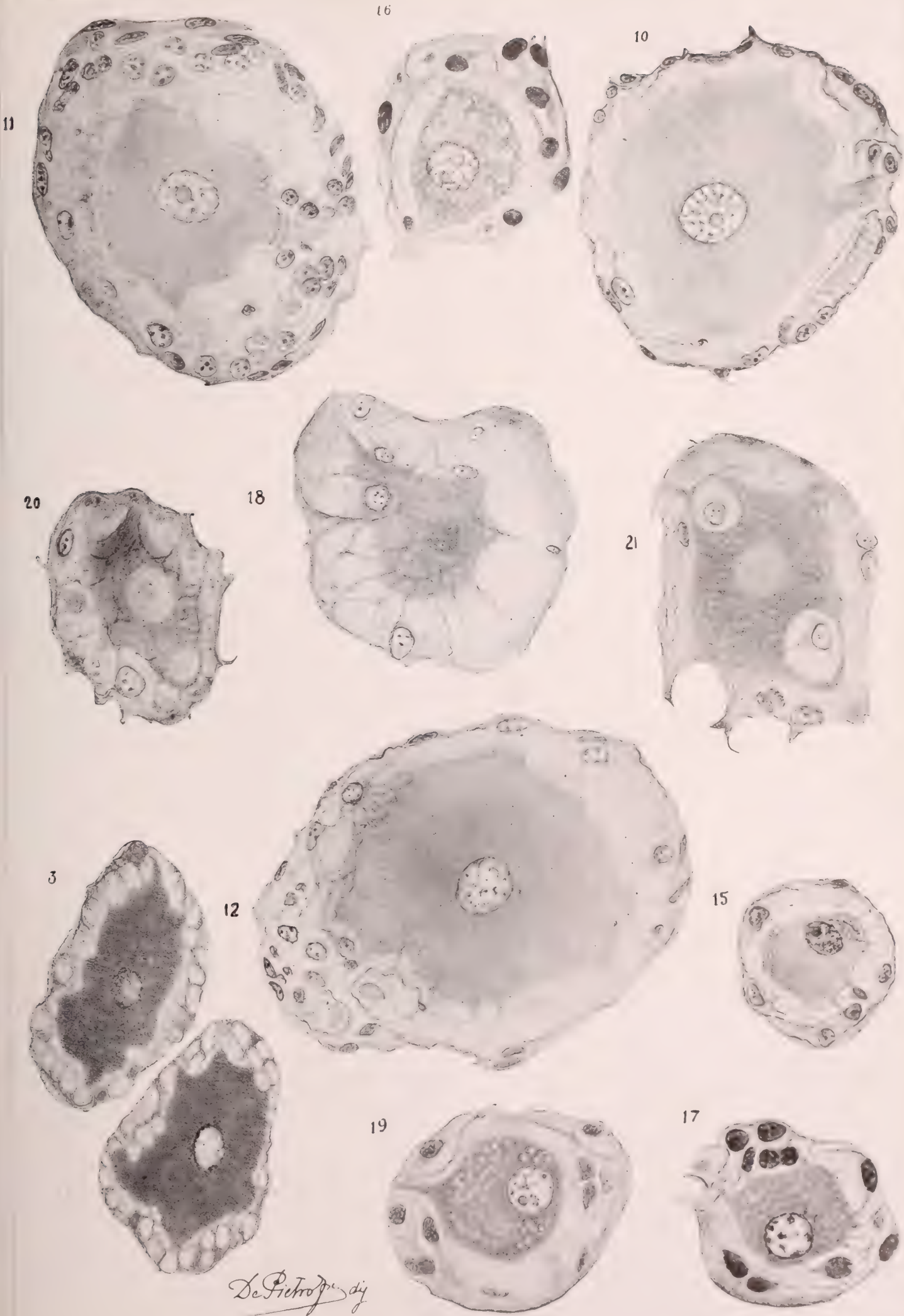
Fig. 19. — Cellula di ganglio cervicale superiore di cavallo. Immagine negativa della rete intracellulare. Idem.

Fig. 20. — Cellula di ganglio cervicale superiore di asino. Rete intracellulare a livello del nucleo. Idem.

Fig. 21. — Cellula di ganglio celiaco di cavallo: cellule dello strato endocapsulare contenute in vacuoli della cellula gangliare. Idem.

TIP. DE RUBERTIS

TIP. DE RUBERTIS

Vol. XV, Serie 2.ª N.° 14.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

IL PERIODO DI RIPOSO DEL VESUVIO INIZIATOSI NEL 1906

STUDII MORFOLOGICI

di O. DE FIORE

presentati nell'adunanza del dì 7 Giugno 1913.

I.

Dopo il catastrofico parossisma eruttivo del 1906 il Vesuvio, spossato dall'immane sforzo, tacque e tutte le sue manifestazioni d'attività si ridussero a deboli esalazioni di vapori, i quali elevandosi in tenui fili dagli orli della grande voragine craterica testimoniavano l'assopimento e non la morte del vulcano. Ora, dopo circa 7 anni di riposo, si annunzia un prossimo risveglio: le esalazioni si fanno più energiche, dei fremiti sempre più frequenti scuotono la massa poderosa del monte e tutto un complesso di fatti accenna ad un non lontano ridestarsi del vulcano, il quale nel suo lungo riposo ha di già accumulate ed accumula ancora le forze necessarie a manifestazioni novelle.

Si rinnoveranno dunque i fenomeni che caratterizzano i periodi eruttivi Vesuviani: intanto è opportuno esaminare quelli che preludiano e conducono al risveglio. In generale si studiano le manifestazioni eruttive dei vulcani e si trascurano quelle dei periodi di riposo: in queste pagine mi propongo di raccogliere, sistematicamente, quanto più è possibile sullo stato d'un vulcano durante la sua calma e ciò avrà il duplice scopo di colmare una lacuna nella storia del Vesuvio ed, illustrando i fenomeni che in esso si sono svolti e seguiranno in rapporto al periodo eruttivo passato ed al futuro, di formulare delle conclusioni generali che forse si potranno estendere ad altri vulcani di simile meccanismo.

Purtroppo però tali studii per varii motivi indipendenti dalla mia volontà, sono parziali ed estesi con più cura specialmente a certe categorie di fenomeni. Mancano infatti delle numerose e periodiche osservazioni termiche ed analitiche sulle fumarole ed i loro prodotti, ma ciò è specialmente compito di chi ha l'agio di soggiornare sui luoghi e dispone dei mezzi adeguati allo scopo. Mancano oltre esatti

rilievi periodici del cratere, i quali permettano di seguirne le variazioni, ma per ciò sono necessarî strumenti e mezzi che io attualmente non posseggo. Malgrado tali difficoltà ritengo utili le ricerche compiute ed i risultati ottenuti.

Prima d'incominciare l'esposizione dei fatti avvenuti dopo l'ultima eruzione, credo opportuno esaminare quel parossisma e specialmente il meccanismo esplosivo al quale devesi la forma attuale del cono Vesuviano che ha influito notevolmente sui fenomeni del periodo di riposo ed influirà forse su quelli del futuro periodo eruttivo. Esaminerò poi dettagliatamente le modificazioni prodotte dai fenomeni esogeni sulla forma esistente immediatamente dopo l'eruzione per studiare le trasformazioni avvenute, le quali possono, in linea generale, influenzare la futura attività del vulcano.

In questa prima memoria dunque esporrò esclusivamente il meccanismo eruttivo che trasformò l'edificio vulcanico dandogli l'aspetto posseduto all'inizio del periodo di riposo e le successive modificazioni delle forme ad opera degli agenti esogeni.

Ringrazio qui vivamente tutti coloro che hanno contribuito con aiuti e consigli al completamento del presente lavoro e specialmente l'Ing. F. A. Perret, il quale m'ha fornite varie informazioni e molte belle fotografie che illustrano queste pagine.

II.

BIBLIOGRAFIA DELL'ERUZIONE VESUVIANA DEL 1906 E DEL PERIODO DI RIPOSO 1906-1913.

1906. 1. Alfano G. B., *L'incendio vesuviano dell'aprile 1906.* Riv. Fis. Mat. Sc. Nat., VII, N. 84; Pavia, 1906.

» 2. — *Sullo stato della questione circa la causa dei fori circolari nei vetri etc.* Idem, VII, N. 96; Pavia, 1906.

» 3. — *Sulle cause che determinano la traiettoria dei detriti del Vesuvio durante le eruzioni.* Nuovi Lincei, XXIX; Roma, 1911.

» 4. Anonimo, *The eruption of Vesuvius.* Nature, LXXIII, 565, 588; London and New Jork, 1906.

» 5. Bassani F. e Galdieri A., *Notizie sull' attuale eruzione del Vesuvio (aprile 1906).* Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., (3), XII, 123; Napoli, 1906.

» 6. — *Sulla caduta dei proiettili vesuviani in Ottajano durante l'eruzione dell'aprile 1906.* Idem, (3), XII, 321.

» 7. — *Sui vetri forati d'Ottajano nella eruzione vesuviana dell'aprile 1906.* Idem, (3), XIII, 230.

» 8. Baratta M., *L'eruzione del Vesuvio. Aprile 1906.* Riv. Geogr. It., XIII, 321; Firenze, 1906.

» 9. Baroni I., *I fasti del Vesuvio.* Lettura, VI, N. 5; Milano, 1906.

» 10. Bellini R., *Spuren von Selen auf der Vesuv-lava von 1906.* Centralbl. für Min. Geol. und Pal., Jahrg. 1907, 611; Stuttgart, 1907.

» 11. Brun A., *Quelques recherches sur le volcanisme (II Part.)* [*Vesuv 1906*]. Archiv. Sc. Ph. et Nat., XXII; Genéve, 1906.

» 12. — *Recherches sur l'exhalaison volcanique.* Paris et Genéve, 1911.

» 13. Brunhuber A., *Beobachtungen über die Vesuveruption im April 1906.* Beilage zu den Berichten des naturwissen-Schaftichen Vereins Regensburg, X; Regensburg, 1906.

» 14. Bruttini A., *Sulla cenere vulcanica caduta in Puglia.* Boll. Soc. Agric. It., XI, 9; Roma, 1906.

» 15. Casoria E., *Sulla composizione chimica delle ceneri vesuviane cadute in Portici nei giorni 9 e 10 aprile 1906.* Annali della R. Scuola Sup. d'Agricoltura, VII; Portici, 1906.

» 16. — *Le sabbie e le ceneri vesuviane cadute in Portici nell'Aprile dell'anno 1906.* (2.ª Mem.), Idem; Portici, 1906.

» 17. — *La lava di Boscotrecase ed il lapillo di Ottajano.* Idem; Portici, 1908.

» 18. Ciaramella G., *Osservazioni di un profano sull'eruzione dell'aprile 1906.* Nel numero unico: « Il Vesuvio e la grande eruzione dell'aprile 1906 », 61; Napoli, 1907

1906. 19. Ciaramella G., *I paesi vesuviani nell'eruzione.* Idem, 39.

» 20. — [Relazione sulla quistione de' vetri forati]. Atti del Congresso dei Naturalisti in Milano (Sett. 1906), 295.

» 21. Comanducci E. ed Arena M., *Analisi chimica della cenere caduta in Napoli la notte del 4-5 aprile 1906.* Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., (3), XII, 267; Napoli, 1906.

» 22. Conforti L., *Alla bocca del Cratere.* Secolo XX, Anno V, N. 5; Milano, 1906.

» 23. — *Il Vesuvio nella sua storia.* Napoli, 1906.

» 24. Contarino F., *Sull'altezza delle polveri vesuviane cadute in Napoli dopo le eruzioni del 22 ottobre 1822 e dell'aprile 1906 e sull'abbassamento subito dal cratere per le stesse eruzioni; da misure fatte dall'Osservatorio di Capodimonte.* Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., (3), XII, 333; Napoli, 1906.

» 25. Cosyns, *Analyse des cendres du Vésuve.* Bull. de la Soc. Belge d'Astronom., Mai 1906; Bruxelles.

» 26. De Lorenzo G., *L'eruzione del Vesuvio. Aprile 1906.* Nuova Antologia, 16 aprile 1906; Roma.

» 27. — *L'eruption du Vésuve et les Volcans.* La Revue du Mois, I, 385; Paris, 1906.

» 28. — *The eruption of Vesuvius in April 1906.* Proc. Geol. Soc., 1905-06, 100; Q. Journ. Geol. Soc., LXII, 426; London, 1906.

» 29. — *Come cresce il Vesuvio.* Natura, I; Milano, 1906.

» 30. De Luise L., *Notizie sull'eruzione vesuviana nell'Aprile 1906.* Portici, 1906.

» 31. — *Sull'altezza della vetta vesuviana.* Portici, 1906.

» 32. De Marchi L., *Una visita al cratere del Vesuvio dopo l'eruzione.* Mondo sotterraneo, III, N. 12; Udine, 1906.

» 33. Deprat J., *Modifications apportées au Cône vesuvien par l'éruption d'Avril 1906.* B. Soc. Geol. Fr., (4), VI, 253; Paris, 1906.

» 34. Doelter C., *Ueber einige Beobachtungen bei der Vesuveruption 1906.* Anz. k. Akad. Wissensch., 295; Wien, 1906.

» 35. di Paola G., *Fenomeni elettrici nell' Eruzione del Vesuvio dell' Aprile 1906.* Boll. Soc. Nat., XX; Napoli, 1906.

» 36. Flammarion C., *L'eruption du Vesúve.* Bull. Soc. Astr. de France, Mai 1906; Paris, 1906.

» 37. Friedlaender B. ed Aguilar E., *Su di alcuni problemi ed osservazioni di Vulcanologia.* Boll. Soc. Nat., XX; Napoli, 1906.

» 38. — *Un' ipotesi per spiegare le eruzioni del tipo 1872 e 1906.* Nel numero unico: « Il Vesuvio e la grande eruzione dell' Aprile 1906 »; Napoli, 1907.

» 39. Galli I., *Turbine grandinoso e vetri forati a Velletri.* Roma, 1907.

» 40. Gargiulo F., *Il Vesuvio attraverso i secoli e l'eruzione del 7-8 aprile 1906.* Napoli, 1906.

» 41. *Il Vesuvio e le sue eruzioni in rapporto a Torre Annunziata.* Torre Annunziata, 1906.

» 42. Gill H. V., *On a possible connection between the eruption of Vesuvius and the Earthquake at S. Francisco in April 1906.* Sc. Proc. R. Dublin Soc., (n.), XI, 107; Dublin, 1906.

» 43. Goldschmit V., *Salmiak von Vesuv.* Zeitsch. f. Krist., XLV, 221, 1908.

1906. 44. Grossouvre A. (de), *Analyse quantitative des Gaz occlus dans les laves des derniéres Eruptions de la Mont. Pelée et du Vesuve.* C. R. Paris, CXLVIII, 991; Paris, 1909.

» 45. Hobbs W. H., *The grand eruption of Vesuvius in 1906.* Journ. of Geol., XIV, 651; London, 1906.

» 46. Johnsen A., *Vesuvasche von April 1906.* Centralb. f. Min. Geol. and Pal., Jahrg. 1906, 385; Stuttgart, 1906.

» 47. Johnston-Lavis, *The eruption of Vesuvius in April 1906.* Sc. Trans. of the Royal Dublin Soc., (2), IX, 139; Dublin, 1909.

» 48. — *A New Vesuvian Mineral. Cloromanganokalite: Kcl, NaCl, $MnCl_2$*; Nature, LXXIV; London and New York, 1906.

» 49. Kernot, *Analisi chimica delle ceneri vesuviane dell'aprile 1906.* Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, (3), XII, 449; Napoli, 1906.

» 50. Kolderup C. F., *Vesuvs Verksombed vaaren 1906.* Naturen, XXXI, 47; Bergen, 1907.

» 51. Lacroix A., *L'éruption du Vésuve en Avril 1906.* Revue gén. des sciences, 150; 30 nov. 1906; Paris, 1906.

» 52. — *Sur l'éruption du Vésuve et en particulier sur les phenomènes explosifs.* C. R. Paris, CXLII, 941; 1906.

» 53. — *The eruption of Vesuv in April 1906.* Ann. Rep. Smith. Inst. etc., 1907, 223; 1907.

» 54. — *Pompéi, Saint-Pierre, Ottajano.* Revue scient.; Paris, 1906.

» 55. — *Les derniers jours d'Herculanum et de Pompei.* La Géographie, XVIII, 281; Paris, 1908.

» 56. — *Contribution a l'étude des brèches et des conglomérats volcaniques.* (Antilles 1902-03, Vésuve 1906). Soc. Geol. Fr., (4), VI, 635; Paris, 1906.

» 57. — *Les avalanches sèches et les torrents boueux de l'éruption récente du Vésuve.* C. R. Paris, CXLII, 1244; 1906.

» 58. — *Les conglomerats des explosions vulcaniennes du Vésuve, leurs minéraux, leurs comparaison avec les conglomérats trachitiques du Mont Dorè.* Idem, 1020; 1906.

» 59. — *Les produits laviques de la récente éruption du Vésuve.* Idem, CXLIII, 13; 1906.

» 60. — *Étude minéralogique des produits silicatés de l'éruption du Vésuve. (Avril 1906). (Conséquences a en tirer a un point de vue général).* Nouvelles archives du Museum, (4), IX; Paris, 1907.

» 61. — *Sur une espece minérale nouvelle des fumerolles à haute temperature de la récente éruption du Vésuve.* C. R. Paris, CXLIV, 1398; 1907.

» 62. — *Les minéraux des fumerolles de l'éruption du Vésuve en avril 1906.* Bull. Soc. Franc. de Min., 1907; Paris, 1907.

» 63. — *Les cristaux de sylvite des blocs rejetés par la récente éruption du Vésuve.* C. R. Paris, CXLII, 1249; 1906.

» 64. Martinelli G., *Notizie sui terremoti osservati in Italia durante l'anno 1906.* Soc. Sism. It., Appendice al XIII; Modena, 1910.

» 65. Matteucci R. V., Nasini R., Casoria E., Fiechter A., *Appunti sull'eruzione vesuviana 1905-06.* B. S. Geol. It., XXV, 846; Roma, 1906.

» 66. Mercalli G., *Notizie vesuviane. (1906, gennaio-aprile 4).* S. Sism. It., XIII, 193; Modena, 1908.

1906. 67. Mercalli G., *L'eruzione vesuviana dell'Aprile 1906.* Natura ed Arte, XV, 763; Milano, 1906.

» 68. — *La grande eruzione vesuviana cominciata il 4 Aprile 1906.* Mem. Nuovi Lincei, XXIV; Roma, 1906.

» 69. — *La grande eruzione vesuviana dell'Aprile 1906.* Rassegna Nazionale; Firenze, 1906.

» 70. — *Le fasi dell'eruzione vesuviana dell'Aprile 1906.* Nel numero unico: «Il Vesuvio etc.», 5; Napoli, 1906.

» 71. — *Ottajano e le eruzioni vesuviane posteriori al 1631.* Idem, 35.

» 72. Meunier St., *Sur l'origine vésuvienne du brouillard sec observé à Paris dans la matinée du mercredi, 11 avril 1906.* C. R. Paris, CXLII; 1906.

» 73. Michael R., *Ueber Beobachtungen während des Vesuv-Ausbruches im April 1906.* Zeitschr. deutsch. geol. Gesell., LVIII, Monatsb. 121; 1906.

» 74. Montù C., *Il Vesuvio e le sue eruzioni.* Torino, 1906.

» 75. Nasini e Levi, *Radioattività di alcuni prodotti vulcanici dell' ultima eruzione del Vesuvio (aprile 1906) e confronto con quella di altri più antichi.* Lincei, (5), XV, 2° sem. 391; Roma.

» 76. Oglialoro A., *Poche notizie sulle sabbie emesse dal Vesuvio.* Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., (3), XII, 135; Napoli, 1906.

» 77. Paris G. e Roncati F., *La pioggia di sabbia caduta l'8 aprile 1906.* Giornale di Viticultura ed enologia, XIV, N. 8; Avellino, 1906.

» 78. Pastore A., *Eruzione del Vesuvio (aprile 1906).* Napoli, 1906.

» 79. Perret F. A., *Notes in the electrical phenomena of the Vesuvian eruption april 1906.* Am. Journ. Sc.; Brooklin, 1907.

» 80. Philipp H., *Beobachtungen über die Vesuveruption on Marz-April 1906.* Briefliche Mitteil. anden Oberrheinischen Geologischen Verein, 1906.

» 81. — *Ueber die Vesuveruption April 1906.* B. Oberrhein. Geol. Ver., XXXIX, 16, 1907.

» 82. — *Einige Bemerkungen über seine Beobachtungen an Vesuv in April 1906.* Idem, 143, 1906.

» 83. Pirro R., *Il Vesuvio e le sue eruzioni.* Napoli, 1906.

» 84. Prinz W., *L' éruption du Vesuve d' avril 1906.* Ciel et Terre. N. 5-7; Bruxelles, 1906.

» 85. Quensel P. D., *Untersuchungen an Aschen, Bomben und Laven des Ausbruches des Vesuv 1906.* Centralbl. f. Min., Geol. u. Pal., Jahrg. 1906, 497; Stuttgart, 1906.

» 86. Ricciardi L., *Il Vesuvio ed il Vulcanismo.* Napoli, 1906.

» 87. Sabatini V., *Sull'eruzione del Vesuvio 1906.* B. Com. Geol. It., (4), XXXVII, 158; Roma, 1906 — (Nota prelim.).

» 88. — *L'eruzione vesuviana dell'Aprile 1906.* Idem, 169, 1906, Roma.

» 89. — *I vetri forati di S. Giuseppe e d'Ottajano durante l'eruzione vesuviana del 1906.* Idem, (4), XXXVIII, 277.

» 90. — *I diversi modi di attività dei vulcani italiani e l'ultima eruzione vesuviana.* Atti Soc. Ligustica etc., XVIII; Genova, 1907.

» 91. Sasso G., *Cronaca dell'eruzione del Vesuvio, aprile 1906.* Portici, 1906.

1906. 92. Scarpa O., *La lava del Vesuvio è radioattiva?* Nel numero unico: «Il Vesuvio e la grande eruzione nell'aprile 1906», 34; Napoli, 1906.
» 93. — *Sulla radioattività delle lave del Vesuvio.* Lincei, (5), XVI, 1° sem., 44; Roma, 1905.
» 94. Sjögren H., *The eruption of Vesuvius.* Nature, LXXIV, 7; London and New York, 1906.
» 95. Stoklasa J., *Ueber den Ursprung des Ammoniaks in den Producten der Vesuveruption in April 1906.* Centralbl. f. Min. Geol. u. Pal., Jahrg. 1907, 161; Stuttgart, 1907.
» 96. Szthmáry (von) L., *Chemische und petrographische Untersuchung des lavastromes des Vesuv.* Földst. Közl., XXXVII, 131, 180; 1907.
» 97. Toniolo A. R., *L'eruzione del Vesuvio. Aprile 1906.* Riv. Fis. Mat. Sc. Nat., VII, N. 77; Pavia, 1906.
» 98. — *Studio orometrico sulle variazioni del cono vesuviano dopo l'eruzione del 1906.* Idem, X; Pavia, 1909.
» 99. Zambonini F., *Notizie mineralogiche sull'eruzione vesuviana dell'aprile 1906.* Atti Acc. Sc. Fis. Mat., (2), XIII; Napoli, 1908.
» 100. — *Sulla galena formatasi nell'ultima eruzione vesuviana dell'aprile 1906.* Lincei, (5), XV, 2.° sem.; Roma, 1906.
» 101. — *Sulla radioattività della cotunnite vesuviana.* Idem, 975.
» 102. — *Mineralogia vesuviana.* Atti Acc. Sc. Fis. e Mat., (2), XIV; Napoli.
» 103. — *Appendice alla Mineralogia Vesuviana.* Idem, (2), XV; Napoli.
» 104. Zinno S., *Analisi della cenere caduta nei giorni 5, 6, 7 aprile corrente dalla eruzione vesuviana.* Acc. Pontaniana, XXXVI; Napoli, 1906.
» 105. Wegner Z., *Die Beohactungen über den Ausbruch des Vesuv im april 1906.* Centralbl. f. Min. Geol. u. Pal., Jahrg. 1906, 506, 529; Stuttgart, 1906.

Dopo l'eruzione.

» 106. Aguilar E., *Escursioni al Vesuvio.* Soc. Nat., XXI; Napoli, 1906.
» 107. Bollettino Meteor. Sism. dell'Oss. Pio X in Valle di Pompei. N. 1, Aprile, 1908 (notizie sui fenomeni del periodo di riposo).
» 108. Mercalli G., *Il Vesuvio dopo l'eruzione del 1906.* Natura ed Arte, XVII; Milano, 1908.
» 109. — *Le frane interne.* Nel numero unico: «Il Vesuvio etc.», 27; Napoli, 1906.
» 110. Perret F. A., *Vesuvius: characteristics and phenomena of the present repose-period.* Am. Journ. of. Sc., XXVIII; Brooklin, 1907.

1907. 111. Alfano G. B., *I fenomeni geodinamici della Sorgente minerale in Valle di Pompei.* Riv. Fis. e Sc. Nat.; Pavia, 1909.
Bollettino Meteor. Sism. dell'Oss. Pio X in Valle di Pompei. N. 1, Aprile, 1908 (notizie sui fenomeni del periodo di riposo).
» 112. Baratta M., *Il nuovo rilievo del cono Vesuviano.* Riv. Geog. It., XIV; Firenze, 1907.
» 113. — *La nuova carta del Vesuvio* (1 : 25,000) *dell'Istituto geografico militare.* Soc. Geogr. It., XV, 862; Roma, 1908.
Mercalli G., *Il Vesuvio dopo l'eruz. 1906.* Op. cit.
Perret F. A., *Vesuvius.* Op. cit.

1908. Alfano G. B., *I fenom. geod.* Op. cit.
Bollettino Meteor. Sism. dell' Oss. Pio X in Valle di Pompei. Anno I, N. 1-8.
» 114. Lacroix A., *Sur les minéraux des fumerolles de la récente éruption de l'Etna et sur l'existence de l'acide borique dans les fumerolles actuelles du Vésuve.* C. R. Paris, CXLVII, 161; 1908.
Mercalli G., *Il Vesuvio.* Op. cit.
Perret F. A., *Vesuvius.* Op. cit.
» 115. Zambonini F., *Su alcuni minerali non osservati finora al Vesuvio.* Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., (3), XIV; Napoli, 1908.

1909. Bollettino Meteor. Sism. dell'Oss. Pio X in Valle di Pompei. Anno II, N. 1-12; Anno III, N. 1.
» 116. Meli R., *Escursioni geologiche al Vesuvio e nei dintorni di Napoli etc. nell'anno 1909.* Roma, 1909.
Perret F. A., *Vesuvius.* Op. cit.
» 117. Revelli P., *La profondità del Cratere vesuviano nel giugno 1909.* Riv. Geogr. It., XVI; Firenze, 1909.

1910. Bollettino Meteor. Sism. dell'Oss. Pio X in Valle di Pompei. Anno III, N. 2-12; Anno IV, N. 1.
» 118. Sieberg A., *Streifzüge in süditalienischen Erdbeben- und Vulkangebieten, mit besonderer Berücksichtigung des Ätna und seiner letzten Eruption.* Aus der Natur; Leipzig, 1909.

1911. 119. Agamennone G., *Lo stato attuale del Vesuvio.* Riv. d'Astronomia e Sc. aff., VI; Torino, 1912.
Bollettino Meteor. Sism. dell'Oss. Pio X in Valle di Pompei. Anno IV, N. 2-12.
» 120. Friedlaender I., *Der Crater des Vesuv in März 1911.* Naturviss. Woch., (neue), X; Jena, 1911.
» 121. — *Carte del cono eruttivo e del cratere del Vesuvio.* Napoli, 1913 (in italiano, tedesco, inglese e francese).
» 122. Malladra A., *Il fondo del cratere vesuviano.* Rend. Acc. Sc. Fis. Mat.; Napoli, 1912.
» 123. *Relazione sulla delimitazione della zona pericolante del Vesuvio.* Napoli, 14 agosto 1911 (dattilografata).

1912. Bollettino Meteor. Sism. dell'Oss. Pio X in Valle di Pompei. Anno V, N. 1-12.
Malladra A., *Il fondo del cratere.* Op. cit.

1913. Bollettino Meteor. Sism. dell'Oss. Pio X in Valle di Pompei. Anno VI, N. 1-6.
» 124. Mercalli G., *Il riposo attuale del Vesuvio.* Rend. Acc. Sc. Fis. Mat.; Napoli, 1913.

III.

CENNI SULL'ERUZIONE DEL 1906.

I periodi d'attività del Vesuvio sono inevitabilmente chiusi da una eruzione parassimale, catastrofica: dopo un tempo variabile di riposo, rincomincia l'attività del vulcano. Allora lo svolgersi dei fenomeni è essenzialmente il seguente, soggetto a lievi variazioni attribuibili a cause diverse:

Innalzamento del magma nel condotto centrale e sua estuberazione, con esplosioni di materiale coevo incandescente (esplosioni stromboliane [1]). Loro effetto immediato è il colmarsi del cratere di esplosione e sprofondamento prodottosi col parossisma precedente e ciò avviene in un lasso di tempo direttamente proporzionale all'attività eruttiva ed inversamente all'ampiezza del cratere. Ai fenomeni esplosivi si aggiungono, specialmente dopo un certo tempo dall'inizio dell'attività, gli efflussi lavici intracraterici che contribuiscono molto efficamente al riempimento del cratere ed all'accrescimento del nuovo cono inclusovi. Dopo un certo tempo, variamente lungo a seconda dell'attività, il nuovo cono supera i bordi del vecchio cratere, che vengono così coperti dai nuovi materiali, e fondendosi con esso forma un edificio conico unico e quasi regolare.

Durante questi fenomeni d'accrescimento e spesso anche quand'essi non sono ancora molto avanzati, s'inizia la fase degli efflussi lavici, di modo che fenomeni esplosivi centrali e fenomeni effusivi laterali e centrali si verificano contemporaneamente. Si formano delle fratture radiali sul cono; ad altezze variabili, precedute da varî fenomeni premonitori, quali: tremiti del suolo sempre più accentuantisi, frane, aperture di nuove fumarole e fenditure. Le fratture danno luogo alla produzione

[1]) Farò notare come presentemente s'imponga una nuova classificazione e nomenclatura delle manifestazioni eruttive e di tutti i fenomeni vulcanici in generale. Le vecchie distinzioni delle esplosioni, le moderne classificazioni dell'attività non solo non sono basate su caratteri naturali invariabili, ma cadono invece nell'errore fondamentale di considerare tutti i vulcani come aventi lo stesso meccanismo eruttivo, mentre invece è noto come questo varî profondamente da vulcano a vulcano. Bisogna dunque distinguere varie categorie di vulcani e per tutti essi stabilire una scala d'attività uniforme e costantemente crescente, basata specialmente: *a*) sulla costituzione e dimensione dell'edificio vulcanico; *b*) sulla natura chimica e fisica del magma; *c*) e sul modo e forma con cui questo è emesso. Ma di tale questione così complessa e difficile non è il caso di occuparsi in queste pagine: qui mi limiterò solo a dire che, per non ingenerare in seguito confusione nella descrizione dei fenomeni che esporrò, non mi attengo alla nomenclatura tutt'ora in vigore e specialmente a quei termini usati da diversi autori con vario significato, usandone invece una che discuterò altra volta. Fra parentesi indico i termini attualmente in vigore.

di bocche d'efflusso lavico, le quali si comportano in modo diverso a seconda delle loro posizioni potendo fluire per tempi e portate variabili. Spesso l'efflusso dura degli anni. In ogni caso costantemente si verificano due fenomeni: 1) coll'apertura di nuove bocche in posizione più bassa, cessano d'agire quelle in posizione più elevata; 2) ostruendosi le inferiori si rimettono in attività le più alte. Questi due fenomeni hanno la spiegazione in due leggi idrauliche ben conosciute: nel primo caso infatti la produzione di sgorghi a valle fa cessare l'efflusso a monte; nel secondo, l'ostruirsi degli sbocchi a valle produce rigurgito a monte.

Intanto l'azione costruttrice delle esplosioni e degli efflussi ha riedificato il cono il quale allora raggiunge un'altezza considerevole e si verifica perciò l'ultima fase del periodo: la catastrofe, nella quale i fenomeni succedonsi rapidamente nel modo che segue:

a) accresciuta attività centrale con forti proiezioni di materiale coevo (esplosioni stromboliane), tremiti del suolo, frane ed altri fenomeni concomitanti.

b) squarciamento del cono, secondo le sue generatrici, con un sistema di fratture che si propagano verso il basso e dalle quali, da bocche sempre a livello decrescente, sgorga la lava fluidissima. Le cause che determinano lo squarciamento del cono, in proporzioni tali come mai per lo innanzi durante il periodo erasi verificato, sono essenzialmente le seguenti, comuni a tutti i vulcani a magma molto fluido e condotto elevato:

— il peso della colonna lavica che occupa il condotto centrale; (tale peso nel 1906, secondo Mercalli, fu a 600 m. d'altezza pari a 1.885.000 kg. $\times$ m^2);

— la tensione dei vapori contenuti nel magma e riscaldati ad altissima temperatura, i quali aggiungono una forza incalcolabile a quella precedente;

— la temperatura del magma capace di fondere od almeno di rammollire le rocce con cui esso viene a contatto;

— l'energia chimica decompositrice dei gas ad altissima temperatura, la quale deve molto favorire l'azione precedente con una serie di reazioni, certo in parte a noi sconosciute, sulle rocce circostanti.

Da questo complesso di cause, e forse per altre che ancora ignoriamo, il cono centrale si squarcia: ciò poi avviene alla fine del periodo perchè allora è raggiunta la massima altezza dell'edificio vulcanico, condizione necessaria perchè s'abbia un condotto lungo ed una colonna lavica molto elevata, la quale eserciti sulle pareti del cono una pressione sufficiente a fenderle vincendone tutte le resistenze. Ciò succede dunque solo quando le forze interne superano e vincono quelle opposte dell'edificio vulcanico. Contemporaneamente all'efflusso seguono i fenomeni esplosivi e per l'azione combinata dei due fattori si svuota il condotto centrale.

c) Lo svuotamento del condotto centrale produce una cessazione delle esplosioni con materiale coevo (stromboliane) le quali vengono sostituite da quelle che rigettano i frammenti del cono terminale (ultra-vulcaniane) che così, più o meno rapidamente vien demolito. Quando poi lo svuotamento del condotto è molto avanzato avviene:

d) la distruzione del cono a causa di un fenomeno, forse comune a tutti i vulcani, che sarà esposto in seguito. Ed allora l'efflusso lavico e le esplosioni con materiale antico autogeno raggiungono la massima violenza. Distrutta tutta quella

parte recente del cratere formatasi durante il periodo d'attività moderata, incomincia la demolizione del vecchio cratere le cui pareti crollano in parte nell'abisso e vengono respinte frantumate, polverizzate, sotto forma di violente esplosioni di materiale antico (ultra-vulcaniane) le quali formano i maestosi pini, disseminatori di terrore e morte, coi quali si raggiunge l'acme della fase esplosiva. Il meccanismo della demolizione è essenzialmente dovuto ad esplosioni e frane e più specialmente alle prime; esso verrà dettagliatamente esposto in seguito. Tale fase dura per un tempo variabile e chiude inevitabilmente il parossisma; soltanto proseguono spesso i crolli e le emissioni di vapori che possono dare l'illusione di un prolungamento dell'attività. Prodotto di tutti questi grandiosi fenomeni esplosivi è un grande cratere la cui ampiezza è proporzionale all'intensità esplosiva dell'eruzione e nel quale dopo un certo tempo avverranno i nuovi fenomeni del periodo d'attività successivo.

***

Questi sono a grandi linee i fenomeni che si succedono al Vesuvio: tali furono essenzialmente quelli del periodo eruttivo iniziatosi nel 1875-XII e chiusosi col parossisma del 1906 del quale è opportuno dare qualche cenno.

Dopo una lunga serie di fenomeni ai quali si dovette più volte la costruzione e la demolizione parziale o totale del conetto centrale, questo crollò nel 1903 dando luogo alla formazione di un piccolo cratere di sprofondamento (vedi carta: tav. 1ª) che si andò riempiendo completamente negli anni seguenti per una moderata attività esplosiva: così, malgrado qualche franamento interno, il conetto terminale, costruito nel cratere del 1903 verso la fine del marzo 1906 era alto 1335 m., e tale si mantenne fino al giorno del parossisma, rendendosi ben visibile a Napoli.

La sera del 27 maggio 1905 si aprirono due bocche nel cono, a NE: una a 1245 m. e l'altra a 1180 m. s. l. d. m. La superiore dopo circa un mese cessò di funzionare, l'altra invece proseguì il suo efflusso fino al **4 aprile 1906**, giorno in cui l'emissione si fece più copiosa.

Il **giorno 3 aprile** le esplosioni centrali di materiali piroclastici coevi, accompagnati da fortissime detonazioni, divennero violente.

Il **giorno 4** alle h. 5.30 c. il cono cedette a SE a circa 1175 m. s. l. d. m. e sulla nuova frattura laterale si formò una bocca messasi subito in attività effusiva, mentre ancora funzionava l'altra sul versante opposto. Alle h. 15 incominciò la distruzione del conetto terminale, il cui materiale costituente venne rigettato sotto forma di blocchi frantumati (esplosioni ultra-vulcaniane). Intanto la nuova frattura laterale si propagava verso il basso, fra i commovimenti del suolo, dando luogo alla formazione di una novella bocca effusiva ad 800 m. s. l. d. m. dalla quale incominciò l'efflusso alle h. 24.

Quasi subito, il **giorno 5**, cessò l'attività della bocca del 1905 posta a NE del cono. Contemporaneamente se ne apriva una a N, che cessò d'agire poco dopo.

Il **giorno 6** ad h. 8 si squarciò ancora il suolo, a 600 m. s. l. d. m. in località Boscocognoli poco ad E dalle bocche precedenti ed anche da qui sgorgò fluidissima ed abbondantissima la lava. Durante la notte 6 7 le proiezioni di materiale coevo erano fortissime.

Il giorno 7, dalle h. 12 alle h. 16 s'ebbe una leggera calma, ma dopo le h. 19 le detonazioni divennero formidabili, e le esplosioni producevano una vera fontana di fuoco innalzantesi a circa 1-2 km. sull'orlo del cratere, il cui cono era rivestito da un manto ardente. Alle h. 21 le esplosioni variarono leggermente di natura poichè ai materiali incandescenti coevi si aggiunsero quelli provenienti dalla rincominciata demolizione del cratere (esplosioni miste). Tali esplosioni, veramente grandiose, durarono fino alle h. 22.45: subentrò una leggera calma che segnalò l'inizio del massimo effusivo. Infatti fra le h. 22 e le h. 23 sul tormentato suolo si formò ancora una bocca, a 750 m. s. l. d. m. e ne sgorgò fluidissima la lava, mentre il magma che occupava il condotto centrale fino alla sommità traboccava sotto forma di colata da una profonda slabbratura dell'orlo craterico a NNE [1]). Ciò durò per poco poichè il condotto fu rapidamente svuotato. Allora gli efflussi diminuirono di portata ed il sopravvento fu dei fenomeni esplosivi iniziandosi la fase parossimale e distruttiva dovuta a fenomeni che si esamineranno in seguito.

Il giorno 8 ad h. 0.30 e poi ad h. 2.30 furono avvertite nei dintorni del vulcano 2 scosse di terremoto violente, che secondo il Mercalli furono concomitanti allo sprofondamento della parte superiore del cratere. È dubbio se tale sprofondamento sia realmente avvenuto, in ogni caso esso è stato effetto e non causa del commovimento sismico [2]). Le esplosioni intanto avevano demolita la parte del cratere costituita dai materiali recenti del periodo 1875, XII-1906, IV; distrutta la quale venne attaccata l'altra formata dai materiali del vecchio cratere del 1872 (esplosioni ultra-vulcaniane). Le esplosioni, formidabili, lanciavano in alto, fino a 4-5 km. d'altezza al minimo, enormi conipidî dai quali cadeva una continua pioggia di ceneri e lapilli che ricovrì d'un triste manto grigio-rossiccio le campagne circostanti. Si ripetevano insomma i terribili fenomeni che resero celebre l'eruzione del 79. Dopo la caduta dei lapilli autigeni antichi e coevi, nelle prime ore del giorno 8, verso le h. 9 incominciò l'emissione delle ceneri.

---

[1]) Questa fu detta « Échancrure » dal Lacroix. È naturale che questo autore abbia usata una parola della propria lingua per indicare tale accidentalità topografica, ma non vedo la ragione per cui questa parola debba essere usata anche da autori italiani, quando « slabbratura » indica esattamente la formazione in questione.

Alcuni sostennero e tuttavia sostengono che questa slabbratura sia stata la causa della distruzione di Ottajano e di altri paesi vesuviani, perchè essa costrinse i materiali detritici a seguire la direzione verso la quale si apriva. Io non credo che la slabbratura sia stata causa dell'inclinazione del getto vulcanico, ma piuttosto effetto di questo fenomeno. Se si fosse trattato di una feritoia aperta in una parete, essa avrebbe potuto regolare la direzione del getto, così come un rubinetto d'acqua regola la direzione del fluire di questa a seconda della propria posizione. Ma nel caso della slabbratura io non comprendo come essa posta inferiormente al getto abbia potuto farlo inclinare sull'orizzonte. Piuttosto fu prodotto degli effetti di tale inclinazione poichè le pareti del cono bombardate dai proiettili furono demolite da questi ed erose profondamente dalla colata lavica che traboccò da quel punto del cratere. L'inclinazione delle proiezioni dovette essere causata da quelle delle bocche esplodenti e forse dal vento. Non si tratta infine che di una delle tante depressioni degli orli craterici frequenti in molti vulcani. La formazione fu forse agevolata dal fatto che il cono in quel luogo essendo costituito da banchi di materiale incoerente più abbondanti che altrove e corrispondendo ad una frattura radiale, sono meno solidamente compaginate da altrove.

[2]) Ciò per l'ampiezza della zona scossa che testimonia una certa profondità dell'ipocentro e pel fatto che mai una scossa che avviene su un'altura, qualsiasi la causa che la origina, si propaga oltre la base di questa.

Nei **giorni 8-9** queste furono fine e grigio rossiccie; dal **10** al **13**, abbondantissime, più fine ancora delle precedenti, color rosso mattone ed infine impalpabili, grigio-chiare: furono queste ultime che diedero al vulcano uno strano aspetto nevoso.

Nella **notte 10-11** s'ebbe un ultimo sgorgo lavico dalla bocca di Boscocognoli.

Le esplosioni di materiale antico proseguirono con intensità sempre decrescente, ma con varie alternative, fino alla fine di aprile con recrudescenze nei **giorni 13, 15, 20, 21.**

L'eruzione poteva dirsi terminata e con essa chiudevansi il periodo eruttivo 1875, XII-1906, IV, incominciando così quello di riposo che continua tutt'ora.

***

Tralasciando l'esame del materiale coerente (lave in colate) credo opportuno dare qualche cenno sulla **natura e distribuzione dei prodotti incoerenti**, poichè ad essi sono dovuti in parte la variazione di configurazione del cono ed una serie di fenomeni che esporrò in seguito.

I risultati dello studio di tale materiale possono nelle linee generali riassumersi in quanto segue.

Riguardo alla natura:

I materiali ejettati variarono profondamente nelle diverse fasi dell'eruzione sia per l'aspetto fisico che per la composizione chimica, ed a seconda delle esplosioni che li originarono.

Nelle prime esplosioni (stromboliane) dei giorni 6-7 consistevano in frammenti molto vetrosi, con parziali stiramenti della massa, che impartivano loro un aspetto fibroso ed una notevole leggerezza e fragilità. Questi proiettili erano di materiale coevo. Naturalmente questo materiale rimase sepolto sotto lo strato dei prodotti delle esplosioni successive.

In queste, essendo il magma coevo unito a frammenti delle roccie provenienti dall'impalcatura del cratere formatosi dopo il 1875, i materiali erano costituiti da grandi blocchi di lave compatte o scoriacee, non incandescenti, proiettati, quale formidabile mitraglia, a costituire i conglomerati caotici che ora possono osservarsi in qualche sezione naturale sui fianchi del cono o nell'Atrio del Cavallo.

Nelle esplosioni del giorno 8 questi materiali dell'impalcatura recente presero il sopravvento, aumentando la loro proporzione su quelli coevi.

Infine venne attaccata la parte antica dell'impalcatura e precisamente quella formante le pareti del cratere d'esplosione e di sprofondamento del 1872 ed allora incominciò l'emissione delle ceneri, nei giorni 8-21, costituenti i grandi pini di materiale successivamente più fino e: grigio-rossiccio, rosso-mattone, grigio-chiaro, bianchiccio. Tale colorazione e la progressiva diminuzione di grossezza delle ceneri fu dovuta forse al fatto che procedendo il lavoro demolitore erano espulsi materiali sempre più alterati, perchè costituenti le parti più interne del cono soggette ad azioni chimiche alteratrici più prolungate ed energiche [1]).

---

[1]) Sarebbe molto interessante stabilire se le ceneri furono espulse colla colorazione osservata o se questa fu acquisita nell'aria. Nel primo caso si tratterebbe di un fenomeno di ossidazione interna, nel secondo esterna dovuta ad agenti atmosferici. Le osservazioni del Perret, teste oculare dell'eruzione, fanno inclinare a questa seconda supposizione.

Riguardo alla distribuzione i fatti principali sono i seguenti:

Il materiale diminuì in grossezza in rapporto diretto della distanza dal centro eruttivo.

L'accumulo avvenne specialmente sul settore NE del vulcano a causa di circostanze non ben definite: per l'inclinazione delle bocche esplodenti e forse pel vento; o meglio ancora e più probabilmente per le due cause riunite. L'azione del vento è stata indubbiamente la causa per la quale il materiale più fino, così abbondante in ogni luogo, predominasse specialmente nel fianco NE del cono.

La distribuzione a NE avvenne a ventaglio, su una vastissima superficie. I valori degli spessori misurati in diversi luoghi, e riportati nella tabella che seguirà, dimostrano che oltre ad una diminuzione progressiva dello spessore degli strati in ragione diretta alla distanza dal centro eruttante, s'ebbe anche, come è logico, una diminuzione di spessore nei due lati del ventaglio.

Lo spessore massimo s'ebbe alla base NE del M. Somma, nei dintorni d'Ottajano, mentre le ceneri più fine, trasportate dalle correnti atmosferiche si distribuirono su una enorme zona, spingendosi fino all'Europa del N., alla Dalmazia, al Montenegro ed in Sicilia.

Nell'Atrio del Cavallo ed in Val d'Inferno lo spessore medio secondo le misure eseguite raggiunse circa il mezzo metro, però tale spessore è stato in seguito molto aumentato dalle numerose valanghe scivolate dai fianchi del cono e dalle pareti interne del M. Somma durante e dopo l'eruzione. A questa causa devesi aggiungere l'azione idrica di trasporto manifestatasi dopo la fine dell'eruzione e ciò può spiegare la straordinaria potenza attuale degli strati detritici alla base del cono e specie fra questo ed il M. Somma ed il completo livellamento del fondo delle valli prima così accidentato.

Spessore dei materiali incoerenti secondo:

Mercalli		Johnston-Lavis	
Località	Spessore m.	Località	Spessore m.
S. Giovanni a Teduccio	0.05	Atrio del Cavallo (Colle Umberto)	0.45
Pugliano	0.10	Cancello Cook	0.20
Torre del Greco	0.20	Eremo	0.27
Osteria Eremo	0.20	Punta del Nasone	0.67
Hôtel Eremo-Cook	0.22	Lagno Purgatorio	0.47
Oltre l'Osservatorio	0.25	Lagno S. Patrizio	0.18
Strada Cook. Mezzo kilometro dopo il Cancello	0.40	Ottajano	0.51
		S. Giuseppe d'Ottajano	0.51
Castello del Principe d'Ottajano	1.25	Casili	0.35-0.64
Ottajano	0.80	Terzigno	0.12
S. Teresa	0.70		
Napoli	0.025		

IV.

IL MECCANISMO DI DISTRUZIONE ED I SUOI EFFETTI.

Prima del parossisma già descritto il cono Vesuviano, per lo speciale meccanismo d'accrescimento che si verifica nei lunghi periodi di moderata attività esplosiva ed effusiva, presentavasi costituito dal vecchio edificio rimasto dopo l'eruzione 1872, includente nel suo cratere di esplosione e sprofondamento il materiale del periodo 1875, XII — 1906 (vedi fig. 3ª). Perciò tutta la parte che sopravanzava in altezza gli orli del vecchio cratere 1872 era costituita da materiale recente, il quale aveva inoltre formato un mantello sui pendii del cono con i proiettili espulsi e rotolati durante le più forti esplosioni terminali. In alto il gran cono presentava un anello pianeggiante costituito dall'orlo craterico antico, nel mezzo del quale sorgeva il conetto terminale in perenne attività. Questo, colle sue continue projezioni, proseguiva ininterrottamente l'opera di riunione delle linee di pendio proprie con quelle del gran cono, separate fra loro dall'anello di cui sopra. Esternamente il cono oltre che essere coperto dai materiali recenti incoerenti sovrapposti agli antichi, era rinforzato da colate laviche di varia potenza, provenienti dagli efflussi terminali e subterminali. Altre colate e delle cupole, dovute agli efflussi radiali lenti (1891-92; 1894-99), rinforzavano l'ampia base riposante sul piano dell'antico Somma.

Questo stato di cose perdurò fino alla vigilia del parossisma: poi avvenne la distruzione di tutta la parte interna dell'edificio descritto e la produzione della forma attuale, molto simile per origine e per aspetto, malgrado lievi differenze, a quella del 1872.

***

La forma attuale è dovuta all'azione di fenomeni endogeni ed esogeni: questi agirono dopo i primi ed agiscono tutt'ora, modificando continuamente gli aspetti del cono e del cratere.

I fenomeni endogeni si riducono quasi esclusivamente alle esplosioni. Quelli esogeni provocarono frane, valanghe, erosioni e colate lutee.

Le **esplosioni** a materiale coevo non produssero sensibili fenomeni di distruzione neppure durante il loro acme: testimoniavano invece non solo che la colonna lavica aveva raggiunta la sommità del condotto centrale (fig. 2ª A), ma che le forze le quali determinano i parossismi erano ormai al loro massimo e che preste erano le condizioni necessarie allo svolgersi del fenomeno.

Le esplosioni a materiale autogeno recente non coevo iniziatesi il giorno 4 aprile

alle h. 15 palesano che il magma ebbe un movimento di discesa nel condotto per l'efflusso che producevasi alla bocca formatasi a SE ad h. 5.30 c. Forse il livello della colonna lavica raggiunse i 1200 m. circa s. l. d. m. Le esplosioni erano allora determinate dai vapori che violentemente sprigionavansi dal magma e che, non trovando sfogo sufficiente nello stretto orificio del conetto terminale, lo demolivano frantumandolo e proiettandone i frammenti nello sforzo di aprirsi un varco verso l'esterno. Contemporaneamente tali vapori portavano in alto, per circa 100 metri lungo il condotto, dei brani di magma coevo che mescolati al vecchio materiale davano luogo alle esplosioni miste (fig. 2ª B). Il prolungarsi delle fratture verso il basso produsse un discendere progressivo del livello del magma nel condotto: così non avvenne essenzialmente nessuna variazione nella natura delle esplosioni, ma forse diminuì la percentuale di materiale coevo (fig. 2ª C).

Ciò durò soltanto fino a che, nella notte 6-7, il magma fu risalito alla sommità del condotto: allora le esplosioni ridivennero a materiale coevo (stromboliane) e fortissime, rimanendo tali fino al giorno 7, h. 12. Dalle h. 12 alle h. 16 seguì una lieve calma relativa, alle h. 19 le esplosioni si fecero novellamente formidabili e raggiunsero il massimo assoluto dell'eruzione (fig. 2ª D).

Poco dopo l'inizio di questa nuova ripresa di violenta attività, alle h. 21, proseguì la demolizione del cono, verificandosi delle esplosioni di materiale coevo ed autogeno recente (miste) dovute però ad un meccanismo essenzialmente differente da quello delle manifestazioni esplosive precedenti. Infatti, il magma che era risalito (notte 6-7) nel condotto, produceva delle energiche esplosioni nelle quali si mescolavano i prodotti recenti ed i frantumi della parte più elevata dell'edificio vulcanico; non erano insomma i vapori che si sprigionavano dal magma a basso livello nel condotto i quali producevano le esplosioni, sibbene il magma stesso che aveva raggiunto l'orificio craterico e distruggeva il cono (fig. 2ª E).

Queste esplosioni durarono fino a quando si verificò il massimo assoluto dell'attività effusiva, il giorno 7 ad h. 22.55 circa ed un conseguente novello abbassarsi, del magma nel condotto. Tale fenomeno fu appunto quello che determinò la catastrofe colla demolizione del cono, che credo sia dovuta ad un fenomeno costante in tutte le eruzioni. Alla fine di queste i gas del magma restante nel vulcano si espandono liberamente e violentemente per la mancata pressione esercitata fin'allora dalla colonna lavica già fluita dal cratere centrale e dalle bocche laterali: si forma così un'impetuosa colonna di vapori e ceneri che ascende turbinando nel condotto ed è capace di produrre i fenomeni distruttivi e le conseguenti formidabili espulsioni di ceneri che caratterizzano la fine delle eruzioni tanto al Vesuvio che all'Etna ed altrove. Per l'eruzione del 1906 s'è generalmente ammesso che la distruzione sia stata causata da uno sprofondamento del cratere dovuto al mancato sostegno della colonna lavica abbassatasi nel condotto. Ho già accennato al fatto: non lo ritengo probabile perchè credo la solidità dell'edificio vulcanico tale da non esservi bisogno del sostegno delle lave nel condotto perchè il cono centrale non crolli. Tale supposizione è anche suffragata da molte osservazioni di casi consimili in altri vulcani. Oltre, se la causa del crollo fosse quella, questo sarebbe dovuto avvenire al primo abbassarsi della colonna lavica nel condotto, verificatasi il 4 aprile. Con ciò non intendo escludere assolutamente i crolli: però essi furono soltanto parziali, li-

mitati a pezzi di pareti che precipitavano nel cratere per effetto delle scosse di terremoto, strettamente locali, causate dalle esplosioni. Tali crolli dunque sono piuttosto una varietà di frane, anzichè degli sprofondamenti. Le due scosse di terremoto più forti furono dovute forse ad interni moti del magma: in ogni modo, come già ho fatto notare, non effetto, ma causa dei crolli e ciò per le ragioni esposte. Crolli e distruzione furono molto agevolati dall'indebolimento subito dall'edificio a causa delle esplosioni precedenti e delle numerose fratture radiali prodottesi durante l'eruzione. Il meccanismo di queste esplosioni a materiale autogeno antico era forse il seguente: dal magma a livello molto basso si sprigionavano i gas che formavano una poderosa corrente ascendente; gli orli del cratere venivano strappati e lanciati in alto: parte si sollevava stritolata col pino, il resto rotolava sui fianchi del cono e formava delle valanghe [1]). Il materiale franante dalle pareti del cratere che si sfasciavano sotto gli sforzi riuniti dei movimenti del suolo, delle esplosioni, del calore che le sgretolava (e tutta questa opera di demolizione era agevolata dall'alterazione profonda delle rocce) si trovava in opposizione colla forza suddetta e veniva da essa ricacciato verso l'esterno, polverizzato, a formare i grandiosi pini (fig. 2ª G, H). Col progredire dell'eruzione le ceneri si rendevano sempre più fine e più chiare e ciò era dovuto quasi esclusivamente al fatto che la demolizione, estendendosi nelle regioni sempre più interne e profonde dell'edificio vulcanico, incontrava materiale progressivamente più alterato dalle azioni chimiche.

Le esplosioni divenivano sempre più deboli e corrispondentemente meno vistose erano le emissioni di ceneri. Questo proveniva del fatto che le frane si producevano più raramente ed in minore scala perchè si raggiungeva, coll'andare del tempo, un certo grado d'assestamento delle pareti e perchè i gas provenienti dal magma diminuivano sempre più in quantità: alla fine del mese di maggio erano quasi interamente cessate. La diminuzione di forza delle esplosioni si poteva arguirla anche dalla sola osservazione del loro modo di presentarsi. Nei primi giorni si susseguivano rapidamente, incalzando velocemente l'una l'altra; dopo si sollevavano maestosamente, con un caratteristico movimento di globi roteanti e rotolanti l'uno sull'altro; infine salivano con grande lentezza restando qualche minuto sospese sul cratere fino a che non le disperdesse il vento.

In ogni caso le nubi cineree si sollevavano verticalmente. Non furono osservate con certezza esplosioni tali da potere costituire le vere nubi ardenti peleane, ed il Lacroix stesso parlando del Vesuvio dice: « Dans aucun cas, il ne s'est produit

[1]) Una dimostrazione sperimentale del fenomeno può ottenersi usando l'apparecchio della fig. 1.ª Un conetto di sabbia umida mescolata a poca argilla, viene forato dal vertice alla base ed allo imbocco del foro corrispondente a questa si fa giungere un tubo A che dà una caduta continua di sabbia secca e, più in basso ancora, un altro tubo B che fornisce un getto di gas od aria a forte pressione. Questo fa ascendere la sabbia secca nel foro che simula le pareti del condotto e si vede che gli orli del foro stesso si staccano a brani mentre quello si allarga gradatamente per tutta la sua lunghezza. Se l'esperienza è ben condotta si potrà riprodurre soddisfacentemente il fenomeno del quale ci occupiamo.

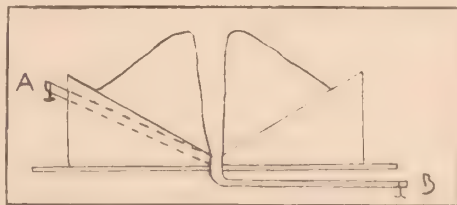



Fig. 1.ª

de nuées suffisamment denses pour affecter la forme péléenne;..... les nuées..... partant du cratère restaient immobiles sur ses bordes, affectant parfois un lèger mouvement de descente qui n'a jamais été complet ». In conclusione non si verificò tale fenomeno e l'autore lo spiega dicendo che: « Il semble que, dans ces cas, il eùt suffi d'une densité un peu plus grande pour déterminer la production de nuées péléennes ». Potrebbe piuttosto dirsi che tale fenomeno non poteva verificarsi

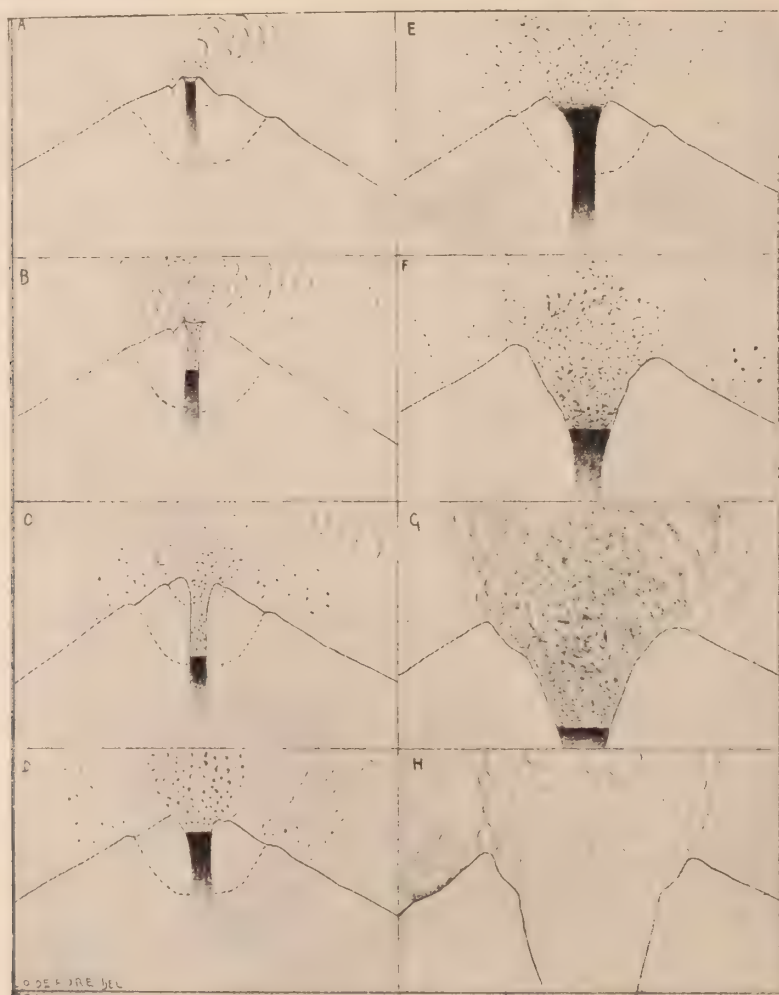



Fig. 2.ª — Il meccanismo di distruzione del cono.

A. fino al 4 aprile — B. dal 4 aprile, h. 15 — C. il 6 aprile — D. dalla sera del 6 alle h. 12 del 7 — E. giorno 7 dalle h. 21 alle h. 22 — F. giorno 7, h. 22.55 — G, H. fine dell'eruzione.

La parte nera del disegno rappresenta il magma ed il suo livello nel condotto.

al Vesuvio durante la parte finale del parossisma, poichè le nubi ardenti sono esclusivamente composte di materiale coevo, incandescente, qualunque sia il loro meccanismo d'espulsione e d'avanzamento.

Il Sabatini crede che le esplosioni salienti con lentezza (alle quali diede il nome di « sbuffi pesanti ») potessero produrre le nubi peleane, ammettendo che

la formazione di queste dipenda « non dalla natura del magma eruttivo, ma dal rapporto tra le quantità di sostanze solide e di vapor d'acqua del fumo emesso e forse dal modo di apertura della bocca ». Non è qui il caso di discutere sul modo d'emissione, d'avanzamento e sull'espansione delle nubi ardenti: è certo però che esse sono costituite da materiale coevo. Questa sola considerazione basterebbe dunque ad accertare il fatto che nella fase esplosiva del parossisma vesuviano del 1906 non vi furono nubi ardenti. Ma un altro ne viene a suffragare questa dimostrazione. Il 10 aprile, lo stesso Autore constatò « diverse volte il faticoso sollevarsi delle volute di fumo al disopra del cratere, e il loro lentissimo riversarsi di poco all'esterno dell'orlo, rotolando intorno a sè stesse e sulle altre che di sotto le sospingevano. Tale lentezza di movimento dava tempo alle volute stesse di dissociarsi e ne cadevano valanghe di ceneri e di blocchi che con velocità vertiginosa, discendevano sui fianchi del cono ». In questa descrizione non è difficile riconoscere le valanghe che il Lacroix descrive così bene (e che io includo nella prima categoria delle valanghe verificatesi durante l'eruzione) dovute secondo questo a proiezioni deboli che avevano appena la forza di lanciare i loro materiali sugli orli del cratere, dai quali o ricadevano nell'interno di questo o rotolavano sugli esterni pendii del cono. Il « riversarsi di poco all'esterno dell'orlo » è dovuto ad un fatto che si verifica costantemente in tutte le eruzioni esplosive, tanto a materiali coevi che a materiali antichi e che ho potuto osservare e fotografare varie volte all'Etna ed allo Stromboli. Tendendo naturalmente i gas ad espandersi, appena il materiale eruttivo giunge all'orlo (la densità complessiva della massa di gas e solidi che costituisce la proiezione non influisce sul fenomeno) la colonna da quello formata assume un diametro maggiore di quello del cratere: da ciò il fatto delle nubi di vapori e di ceneri che coprono, sia pure per poco spazio, gli orli esterni di questo. Le nubi però, mai rotolano sui pendii del cono. Tale fenomeno d'espansione si può con facilità riprodurlo sperimentalmente, facendo uscire un getto di vapore acqueo non molto violento e con lentezza da un tubo di vetro o di metallo. Del resto, lo stesso Lacroix riconobbe che al Vesuvio nel 1906 non vi furono nubi ardenti: egli che ne ha osservate tante e così bene, poteva giudicare sulla natura del fenomeno in modo tale da non lasciare alcun dubbio in proposito.

Le esplosioni del Vesuvio in quei giorni erano quasi esclusivamente di materiale autogeno antico, non incandescente, benchè riscaldatissimo. In conclusione non si ebbe la produzione di brecce di materiali incoerenti, di diversissimo calibro, caoticamente sparsi, costituiti da materiale autogeno coevo, caratteristiche delle nubi peleane; ma solo la formazione di valanghe di materiali fini, di calibro quasi uniforme, composti da prodotti autogeni antichi.

Immediatamente dopo le esplosioni, riguardo al modellamento del cratere, vengono per importanza le frane interne.

Non si può dire con precisione quando cessarono le vere esplosioni e ad esse subentrarono le emissioni di ceneri dovute alle grandiose frane interne che si verificavano senza interruzione. Probabilmente fra i due fenomeni non vi fu un vero distacco, ma solo graduali passaggi dall'uno all'altro. Negli ultimi giorni dell'eruzione furono numerosissime ed imponenti e spesso scambiate, per le emissioni di

ceneri che le accompagnavano, con vere esplosioni: ciò à contribuito a rendere difficile la precisazione della fine dell'eruzione. Avevano luogo dapprima con maggior frequenza ed imponenza; in seguito raramente ed in più piccole proporzioni: si verificava dunque una diminuzione continua del numero e del volume.

Le frane furono uno dei fenomeni più caratteristici e salienti del periodo di riposo e perciò più diffusamente se ne dirà in seguito.

Altre frane, non meno notevoli delle precedenti, furono quelle che interessarono l'ossatura esterna del cono, e precisamente il materiale preesistente all'eruzione. Ad esse è dovuto in parte il modellamento dell'edificio attuale. Incisero quello più o meno profondamente in diversi luoghi ma specie a SE e a S. L'ossatura della montagna fu in tali regioni messa a nudo dagli smottamenti ed essi si distinguono nettamente dai canali d'erosione secca od idrica formatisi nel materiale recente. Il franamento principale si verificò, come si disse, sui pendî S-SE del cono da dove furono asportati, secondo il Sabatini, 300.000 m^3 di materiali che formarono un grandioso conoide di deiezione, ancora visibile sotto lo smottamento. L'origine di questa frana credo che bisogni ricercarla nel fatto che appunto in quel radiante del cono si aprirono le bocche laviche del 4 aprile, che minarono il suolo. Il risultato precipuo di tali franamenti fu quello d'indebolire notevolmente l'edificio vulcanico.

La discesa di valanghe di detriti dal sommo alla base del cono diede origine alla formazione di grandi canali radiali, molto caratteristici, ai quali fu dato il nome di Barrancos.

I pendî del cono erano ricoperti da una enorme quantità di detriti per un considerevole spessore: in essi, molto mobili, si formarono i profondi canaloni d'erosione secca dovuti al discendere di valanghe formatesi per varî meccanismi.

La cenere, costituente in massima parte il mantello che ricopriva il cono, era fortemente riscaldata, sebbene non incandescente, e si trovava accumulata in uno speciale stato di semi fluidità dovuto al calore. Questo si conservava molto lungamente e tale fatto messo in rapporto all'altro, cioè, che le ceneri depositate sul suolo si vedevano abbassare, i loro strati diminuendo di spessore col raffreddamento, fanno supporre che quelle fossero intimamente mescolate ai gas molto caldi, che perdevano il loro calore con gran lentezza a causa del cattivo potere conduttore delle ceneri. Ad ogni modo è certo il fatto che tanto più calde erano queste, tanto maggiore era la loro mobilità.

Ciò posto, la formazione delle valanghe avveniva per tre meccanismi principali e differenti.

Il primo, che si dovette verificare specialmente quando le esplosioni proiettavano materiale di grosso calibro, è dovuto alla caduta di questo sui pendî del cono, i quali venivano così incisi dal rotolio dei blocchi rigettati. In questa categoria rientrano le esplosioni che il Lacroix ritenne « dues à la chute de paquets de matériaux lourds et sans doute de grand taille, lancés sans force du cratère, retombant sur ses bords, puis roulant ensuite sur les pentes du cône ». Può essersi verificato tale fenomeno: però, queste esplosioni « senza forza », la parabola dei proiettili delle quali era talmente piccola da raggiungere solo gli orli del cratere, sono poco probabili

mettendole in rapporto alla violenza formidabile del getto continuo di materiali che usciva dal condotto. È più facile che i blocchi che il Lacroix ritiene prodotto delle esplosioni siano dovuti al fenomeno che originava le valanghe della categoria seguente.

Un secondo modo di formazione delle valanghe era dovuto alla distruzione dell'edificio ad opera delle esplosioni parossimali. Si disse già che durante l'acme dell'eruzione gli orli erano asportati dalle esplosioni: parte del materiale che li costituiva, polverizzato, era lanciato in alto assieme al pino; il resto, in blocchi di varie dimensioni, rotolava sui pendî del cono: erano appunti quelli che incidevano questi e che visti a distanza potevano anche essere scambiati con proiettili provenienti direttamente dalle esplosioni.

Il terzo modo fu quello detto dal Lacroix « par decollement ». Presentando il cono, come tutti gli edifici vulcanici, un pendio più accentuato presso l'orlo su cui le ceneri erano in equilibrio instabile, al menomo urto esse scivolavano sui fianchi, formando delle maestose cadute di detriti, velocissime. Secondo il Mercalli una di queste, il 13 aprile, a SW del cono aveva la velocità di circa 300 m. al minuto. Le cause che mettevano in moto le ceneri potevano essere: o i tremiti del suolo che accompagnavano i fenomeni esplosivi, o l'urto dei proiettili rigettati dalle esplosioni od un aumento di peso che rompeva l'equilibrio della massa cinerea sul pendio. Specialmente queste valanghe erano quelle che avevano l'apparenza di nubi peleane.

Effetto di tali valanghe secche fu la formazione di profondi canali radiali. Questi all'inizio dovettero formarsi o pel rotolio di grandi blocchi i quali tracciarono un solco nella massa dei detriti o per lo scivolare di piccole quantità di ceneri, le quali aumentavano progressivamente di volume. In ogn'uno de' due casi il risultato fu la produzione di solchi che poi si trasformarono in canaloni, raggiungendo delle profondità notevoli (fino a 50 m. circa) sicchè, una volta tracciati, naturalmente tutte le valanghe successive s'incanalavano in essi approfondendoli sempre più. Alla base del cono, in corrispondenza ai canaloni, si formavano delle conoidi di dejezione alla loro volta solcate da altri canali dovuti però all'erosione idrica e formatisi in seguito.

La mirabile regolarità dei canaloni nel lato NNW (vedi fig. 6, sezioni e tav. I, fig. 2, carta) è dovuta al fatto che là il materiale incoerente s'accumulò in maggior copia e con una certa uniformità di calibro, mentre negli altri fianchi l'accumulo era meno potente ed omogeneo: in varî luoghi le frane, mettendo a nudo l'ossatura del cono, disturbavano naturalmente e molto la regolarità della formazione.

V.

LO STATO DEL VESUVIO ALL' INIZIO DEL PERIODO DI RIPOSO.

Molte misure riguardanti le dimensioni del cratere furono eseguite dopo il parossisma ed i fenomeni descritti, da varî operatori e in diverse date: i risultati sono poco concordanti ed oscillano fra limiti molto ampî; si vedrà però in seguito come in alcuni casi le differenze sieno più apparenti che reali. Ad ogni modo tali dati devono essere accettati con riserva e bisogna loro dare un valore esclusivamente relativo: **1**) perchè ottenuti da diversi operatori, con svariati sistemi di misura per lo più poco precisi (a stima) i quali perciò non sono certamente esenti da notevoli errori; **2**) perchè le misure furono eseguite in epoche diverse mentre mutava continuamente il profilo del cratere e da ciò derivava il fatto che spesso nel medesimo luogo variavano valori successivamenti trovati; **3**) perchè per valutare gli abbassamenti avvenuti dopo l'eruzione non è stato sempre accettato lo stesso valore per la quota d'altitudine del conetto terminale prima dell'eruzione.

Infine il calcolo della cubatura del materiale asportato all'edificio ad opera delle esplosioni e degli sprofondamenti, è quasi sempre affetto, oltre che dagli errori comuni ed inevitabili, da uno dipendente dal fatto che si diede generalmente al cono un profilo regolare, non corrispondente alla realtà nè prima nè dopo l'eruzione come si può agevolmente constatare nel profilo (vedi fig. 3ª).

I valori riguardanti la profondità del cratere, i suoi diametri minimo e massimo, le varie altitudini degli orli, i dislivelli causati dall'abbassamento dopo l'eruzione, sono compendiati nella tabella che segue, dove sono elencati cronologicamente secondo la data di osservazione, col nome dell'operatore che eseguì le misure:

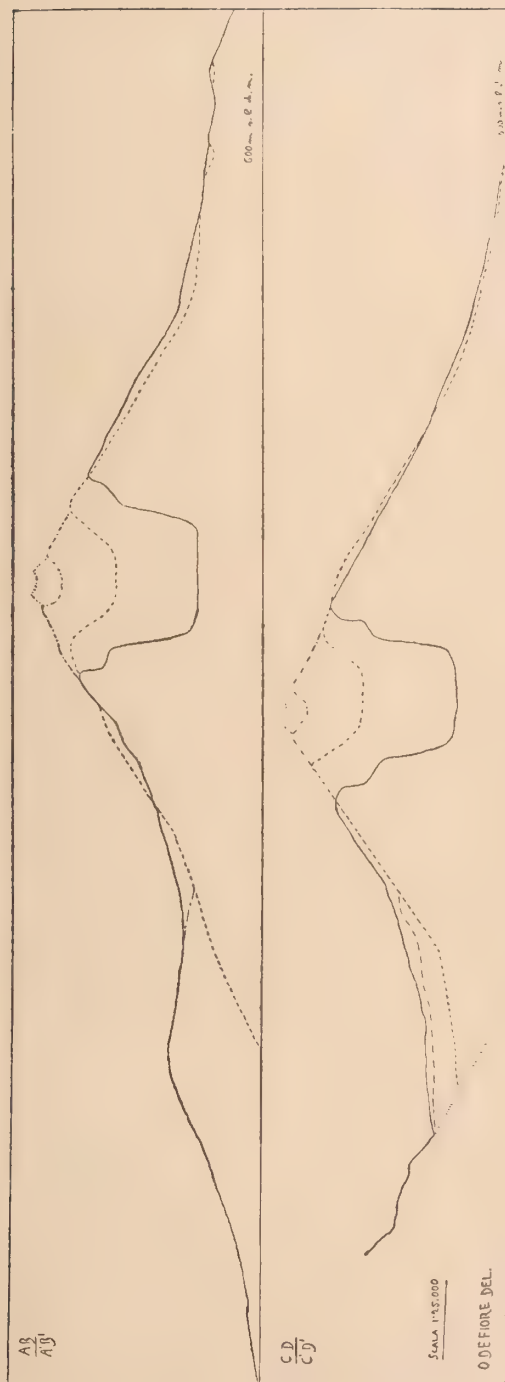



Fig. 3.ª — Il profilo del cono prima e dopo l'eruzione.

Le sezioni sono eseguite secondo le linee AB, A'B' e CD, C'D' tracciate sulle carte topografiche dello Stato Maggiore Italiano riprodotte nella tav. I, fig. 1ª e 2ª. Scala 1 : 25000.

- - - - - - - Profilo dopo l'eruzione del 1872.
— — - Profilo della cupola lavica 1891-94 (Colle Margherita).
—•—•—•— Profilo del cono terminale nel 1903.
· ·· ·· ··· Profilo del conetto 1903-1906.
———— Profilo dopo l'eruzione del 1906.

Data		Osservatore	Profondità	Diametro				Altezza		Dislivello	
				mass. m.i	a	min. m.i	a	m.i	a	mi	a
		Matteucci V. R.	600-700	720	NNNE / SSSW	640	WWNW / EESE			220	EENE
										102	WWSW
		Wegner Z.	200-300								
IV	22	Sjögren Hj.	300	900				1128		207	
V	2	De Loczy L.	200					1123		103	
	3	Lacroix A.	300	650	E-W	640	N-S				
	4	Mercalli G.	250 c.	500						85-90	W
										100	SE
										180-19	NNE
	5	De Marchi L.	300 e più	600		500				90	
VI	fine	Sabatini V.	400	700	$W_{20}S$	500		1158	NE	177	
								1210	ESE	125	
								1250	SW	85	
		De Luise L.						1245	W		
								1135	NNE		
IX		Fiechter		720	NNE / SSW	620	WSW / ESE	1190	N		
								1190	S		
								1140	E		
								1218	W		
								1134	NE		
								1155	SE		
								1200	SW		
								1200	NW		
								1185	NNW		
XI		Johnston-Lavis	400								

Una delle quistioni più controverse è stata quella riguardante l'entità dell'abbassamento del cono.

Ammettendo che prima dell'eruzione l'altezza assoluta di questo fosse di 1335 m., dalle misure eseguite dai vari autori e dianzi riportate risulta che il valore dell'abbassamento oscillava fra 85 e 207 m. Apparentemente può sembrare che tali valori siano compresi fra limiti troppo ampî: però i massimi che sembrano esagerati si devono attribuire al fatto che l'orlo del cratere presentava dislivelli molto notevoli,

non essendo in ogni luogo della medesima altitudine, ma più basso a NE in corrispondenza della slabbratura della quale già si disse. Secondo le misure del Fiechter, le quali servirono alla costruzione della Carta topografica (vedi Tav. I), i valori dell'abbassamento oscillavano fra 232 m. e 117 m.: ben maggiori dunque di quelli trovati dagli operatori precedenti. Sui risultati di quel topografo non può cadere alcun dubbio ed essi in parte confermano gli altri ottenuti in precedenza: bisogna però pure notare che era decorso molto tempo fra le prime misure e quelle del Fiechter e che perciò, date le profonde e continue modificazioni della configurazione del cono, i valori dovevano necessariamente variare, crescendo.

In conclusione, l'entità del lavoro di distruzione e dei suoi effetti non fu così grande come apparve immediatamente dopo l'eruzione, ma aumentò gradatamente e sensibilmente in seguito.

La parte distrutta del cono era tutta quella recente, costruita dal 1875 in poi e parte di quella anteriore al 1872. Infatti l'orlo dell'antico cratere 1872, visibile ancora parzialmente nel luogo detto « il piano delle fumarole » posto a SW e S del cono terminale, col parossismo esplosivo dell'aprile scomparve completamente, perchè era stato espulso assieme a tutto quanto gli sovrastava (vedi fig. 3ª e 4ª).

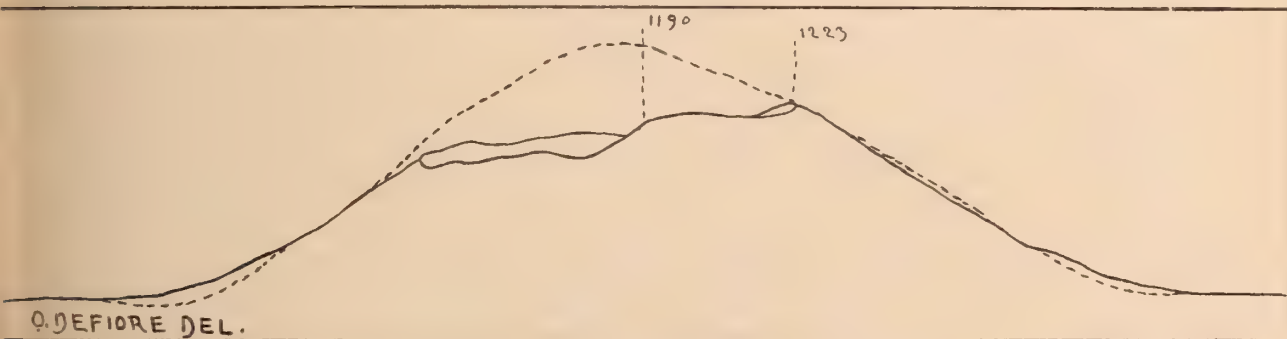



Fig. 4.ª — Cono Vesuviano visto dal M. Somma dopo l'eruzione del 1906. Profilo tratto da una fotografia del Johnston-Lavis.

– – – – Profilo nell'ottobre 1903.
——— Profilo nel maggio 1906.

I pendî esterni del cono aumentarono generalmente di spessore: poco in alto, molto in basso, sollevando il livello del suolo in taluni luoghi fino a qualche decina di metri. Questo massimo accumulo si verificò specialmente alla base del cono, dove il trasporto delle enormi masse di materiale fu dovuto alle frane ed alle valanghe secche avvenute dopo l'eruzione, di modo che tutta quella pianura anulare che circonda il cono centrale (formata dall'antico Somma, nella quale sorge eccentricamente il giovane cono, che la riveste di prodotti storici) [1]) ebbe il livello sollevato ed il cono acquistò così una forma più tozza e schiacciata, dovuta al fatto che il rivestimento di detriti non fu uniforme su tutta la superficie dell'edificio, in alto ed in

[1]) Questa piattaforma, sulla quale sorge il giovane cono, riceve i seguenti nomi: Atrio del Cavallo, Gli Atrî, Valle dell' Inferno, Pedementina e Piano delle ginestre, a seconda dei vari luoghi.

basso. Oltre non su tutti i punti della base l'accumularsi del materiale fu uguale in spessore, poichè, per le cause esposte di già, i detriti provenienti dalle esplosioni si ammassarono a preferenza a N e NE negli Atrî. La conseguenza più importante di tale fatto è la parziale fusione del recinto ancora visibile del Somma col cono Vesuviano, causato dal riempirsi degli Atrî e della Valle d'Inferno: in complesso è stato mosso un passo verso l'unificazione dei due edifici in una sola forma conica.

Il cono non si presenta così regolare come dovrebbe perchè il materiale costituente è stato rimosso ed asportato ed i suoi fianchi sono stati profondamente incisi.

Le frane, oltre i prodotti recenti, scavarono anche la massa antica del cono interessando tutta l'ossatura del vulcano e mettendo a nudo i vecchi tufi e le lave alternantisi in banchi. Ecco dunque una prima causa di dissimmetria.

Ma oltre le frane un altro agente esercitò vigorosamente le proprie forze sull'edificio e precisamente l'erosione secca seguita poi da quella idrica ed, in minor quantità, da quella eolica. Delle cause che determinavano le valanghe che costituirono il maggior fattore dell'erosione secca, si disse altrove.

Il prodotto di queste furono lunghi e profondi canali radiali i quali dipartendosi dall'alto del cono s'estendevano verso il basso. I canali presentavano una prima parte poco profonda, iniziantesi inferiormente all'orlo esterno del cratere; seguiva la parte più accentuata la quale scendeva molto in basso sul cono; infine succedeva una conoide di dejezione molto notevole.

La morfologia di tali canali ne spiega bene la genesi. Nella prima parte avevano origine le frane, di poca entità all'inizio, ma rapidamente crescenti di volume e velocità. Esse nella seconda parte scavavano i materiali sui quali scorrevano e questa era così profonda perchè una volta formatasi, naturalmente tutte le valanghe susseguenti percorrevano la medesima via incidendola ognor più. Oltre, da questo tratto erano tolti i materiali che assieme ai precedenti costituivano la terza parte della formazione, cioè la conoide di dejezione, la cui superficie aveva l'inclinazione propria dei materiali detritici umidi o secchi.

Queste conoidi alla lor volta erano solcate da canali minori d'erosione secca, ma per lo più d'erosione idrica, la quale contribuì notevolmente ad ingrandire tutti i canali preesistenti ed a formarne dei nuovi.

L'esterno del cono, specie sugli orli, era rivestito da una fanghiglia tenace, lubrica, coperta d'efflorescenze multicolori, dovute ai sali solubili contenuti nelle ceneri che la formavano. Era originata dalle pioggie che riducevano in fango le ceneri ed era del tutto simile a quella che in generale trovasi su tutti i coni vulcanici [1]).

***

Gli orli della voragine craterica erano frastagliati irregolarmente: talvolta terminavano con spigoli netti, ma è notevole il fatto che nei primi giorni dopo l'eruzione, a causa dell'azione livellatrice delle ceneri, gli angoli e gli spigoli erano attenuati in linee di profilo curve.

[1]) Vedi: De Fiore O., *Il periodo hawaiano dell'Etna nel 1910-11.* Riv. Geogr. It., Firenze, 1911.

L'altitudine assoluta s. l. d. m. variava notevolmente presentandosi maggiore a NW anzichè altrove ed abbassandosi a NNE a formare la slabbratura della quale s'è detto. La slabbratura era lunga circa 80 m. e consisteva in un ripiano di qualche metro di larghezza, solcato da fratture che continuavano nel pendio esterno del cono e sulle pareti interne del cratere. Su queste fratture si localizzarono delle fumarole.

Tutto l'insieme dava all'edificio l'aspetto d'un cono obliquamente tronco colla parte più bassa a NE.

La profondità del cratere, elemento molto controverso, non fu misurata nei primi giorni dopo l'eruzione a causa dei vapori che ne occultavano il fondo. In seguito, per il continuo crollar delle frane, questo si risollevò ed il valore primitivo fu alterato.

Dalla profondità minima di 250 m. (Mercalli) si giunse ad una massima di 600-700 m. Ma, come dissi, nessuna di tali misure essendo stata fatta con strumenti, non si può accettarne come rigorosa alcuna [1]).

S'è ammesso che dopo l'eruzione si sia sollevato il livello del fondo e così deve essere stato per l'azione delle frane: allora, conoscendo la profondità di circa 300 e più metri che esso aveva varî anni dopo l'eruzione, bisogna ammettere che quella fosse immediatamente dopo questa superiore ai 300 m. D'altro canto la quota superiore ai 300 m. osservata in questi ultimi anni si riferisce non al livello medio del fondo, ma a punti nei quali erano avvenuti sprofondamenti parziali.

In conclusione non può assegnarsi con sicurezza una cifra che denoti la profondità del cratere: attenendoci al valore più probabile si può dire che esso fu di circa 350 m.

Le pareti del cratere presentavano prima una scarpata fino alla profondità di circa 80-100 m. con l'inclinazione di 40°-50°, poi scendevano a picco fino al fondo,

[1]) Il De Marchi, dal fatto che i vapori delle fumarole si sollevavano lentamente dal fondo senza la caratteristica di un'emissione violenta, credette di poterne arguire che « il camino craterico si sprofondasse centinaia di metri ancora al disotto del punto più basso (300 m.) cui giungeva lo sguardo ». Ma se per camino s'intende il condotto ciò non può essere poichè per le frane esso fu ostruito; se poi si chiama camino la voragine craterica, l'osservazione dello svolgersi lento dei vapori dice nulla, perchè è molto raro che le fumarole, anche quando siano ad emissione violenta spingano con forza i vapori a più di 50 m. circa d'altezza. Viste dall'alto, specialmente quando sono molto numerose, possono ben facilmente indurre in errore e far credere che le volute di vapori si sollevino dal profondo. Il De Marchi basa anche la supposizione che il cratere si sprofondasse a molte centinaia di metri sul fatto che il fondo avrebbe dovuto essere almeno al livello delle bocche effusive, tanto più che le lave emesse (10 milioni di m^3) corrispondono esattamente (?) alla cubatura del cilindro rappresentante il cratere. Credo che tale supposizione sia insostenibile perchè: 1) ignorando la vera forma del condotto e le sue dimensioni interne, non si può stabilire una cubatura del cratere; 2) le lave emesse non erano soltanto quelle che occupavano il condotto da 700 m. circa a 1335 m. perchè molti fatti ci inducono a credere che le ultime emissioni siano state dovute ad efflussi provenienti dal profondo: in ogni caso si sa che il magma s'abbassò e risollevò nel condotto e ciò contraddice il meccanismo di semplice svuotamento ammesso dal De Marchi; 3) non è necessario che il fondo fosse esattamente al livello delle bocche effusive perchè le imponenti frane avevano dovuto riempire in parte il cratere sollevandone il fondo.

formando così un lungo tubo, mentre la parte superiore rappresentava un imbuto (vedi Tav. II, fot. 5-6). Secondo il Mercalli, questa era la parte originatasi per sprofondamento ed esplosione, mentre quella inferiore cilindrica erasi originata per semplice collasso.

La struttura delle pareti era simile a quella che si osserva nell'interno dei crateri di tutti gli strato-vulcani. Grandi banchi di lave, compatte o scoriacee, s'alternavano a strati di prodotti incoerenti e tutto questo complesso di materiali era traversato qua e là da dicchi, fra i quali notevoli alcuni vuoti e riempiti parzialmente da successivi sgorghi magmatici, osservati dal Johnston-Lavis.

***

Le fumarole [1]) attualmente in attività si misero in vigore poco dopo l'eruzione: cioè quando ebbero forato lo strato compatto e spesso di detriti che le soffocava. Un esempio molto interessante di tale evoluzione è dato dalla batteria craterica degli orli di SW. Dapprima, immediatamente dopo l'eruzione, non venivano vapori alla luce nel luogo ove essa ora esplica la sua grande attività. In seguito le esalazioni incominciarono qua e là lungo una determinata linea orizzontale poco al di sotto dell'orlo craterico; proseguendo nel tempo le fumarole aumentarono di numero ed intensità fino a che, avendo minato il suolo in cui si svolgevano, produssero la grande frana del 1911, III, dopo la quale le fumarole furono in piena attività. A causa della scomparsa di gran parte della parete loro sovrastante, si vennero a trovare più vicine all'orlo. In tale stato rimasero in seguito: anzi nuovi spiragli esalanti si aprirono più in basso; ciò del resto è naturale, poichè tendendo i vapori ad uscire dai punti più vicini al loro luogo di produzione, tentano di aprirsi un vano presso il fondo del cratere, senza prima attraversare l'alta parete per venire alla luce. Questa serie di fatti può essere studiata bene esaminando le fotografie, eseguite in epoche successive, della Tav. II, che mostrano l'evoluzione del fenomeno.

---

[1]) Per non causare confusione negli studî che seguiranno e per spiegare i termini usati nel presente, credo opportuno esporre una classificazione ed una nomenclatura delle fumarole che si possa applicare a tutti gli edifici vulcanici.

Una prima distinzione molto importante è quella, già dovuta al Perret, che divide le fumarole in primarie e secondarie. Modificandola, io credo che la classificazione possa essere così delineata:

Primarie sono tutte quelle che si sviluppano da fessure dell'edificio vulcanico, dalle lave risiedenti nel cratere e dalle bocche esplosive ed effusive laterali od eccentriche.

Secondarie quelle che si producono nelle lave già estuberate, fluenti od in via di raffreddamento.

A seconda della loro posizione sull'edificio vulcanico:

Centrali sono quelle che si sprigionano direttamente dal condotto centrale, suddividendole in:

crateriche interne se sul fondo o nell'interno del cratere;

esterne, se sui pendî esterni del cono centrale.

Laterali sono quelle distribuite sui fianchi dell'edificio principale, ad eccezzione di quelle del cono centrale e più propriamente sono tutte quelle in relazione alle eruzioni omonime.

Eccentriche, sono quelle che si sviluppano all'imbasamento dell'edificio vulcanico, là dove non si formano più eruzioni laterali, radiali o no.

A seconda dell'associazione divido le fumarole in:

isolate.

a gruppo, se irregolarmente distribuite sul suolo.

in batteria, se disposte linearmente in senso orizzontale o verticale o radialmente sul cono.

Altre fumarole si aprirono nelle pareti del M. Somma, durante l'attuale periodo di riposo.

Attualmente la distribuzione delle fumarole è la seguente:

Fumarole centrali:

Interne: Nello sprofondamento semi-anulare (anello) formatosi nel 1911 esisteva una batteria di fumarole notevolmente attive, le più vigorose delle quali erano sul fondo a N, là dove incominciava l'avvallamento. Nel 1912 (21 gennaio) il franamento avvenuto soffocò questa batteria e di essa sopravvisse solo il gruppo a N, cioè dove l'emanazione era prima più forte. Ora le fumarole sono novellamente attive a N e SE.

Nel centro del cratere esisteva una fumarola che fu soffocata dalla stessa frana.

Altra molto notevole è quella chiamata comunemente « gialla » a circa 950 m. s. l. d. m. a S.

Un altro gruppo, attualmente attivo, esiste nelle pareti a SW, nell'interno.

Un gruppo trovasi sulle pareti del cratere, circa a metà della loro altezza a S. È costituito da fumarole acide.

Presso gli orli del cratere si allineano le seguenti batterie: quella di SW, attualmente la più imponente, con uno sviluppo lineare di circa 500 m. e della quale s'è descritta l'origine; la batteria di NE sviluppata quasi come la precedente; poi le due batterie di S e NW più piccole delle due descritte.

Proprio sull'orlo di NNE trovasi un gruppo ubicato sulla slabbratura: questo rappresenta la congiunzione fra le batterie interne e le fumarole esterne.

Esterne: Un gruppo molto notevole ed interessante è quello che dalla slabbratura s'estende radialmente sui pendî NE del cono circa fino alla sua base, verso l'Atrio del Cavallo. Queste sono attualmente più sviluppate ed attive fra NNE e NE.

Fumarole laterali:

Sul prolungamento della linea radiale dalla quale si sviluppano le fumarole precedenti, sorgono due gruppi esterni nell'Atrio del Cavallo. Incominciano all'intersezione del pendio del cono col piano dell'Atrio e s'estendono fino alla base delle pareti del M. Somma. Tutte sono spiccatamente solfidriche e molto notevoli per la loro costituzione. Sono formate da un conetto soffiante delle lave del Colle Margherita, ricoperto da uno strato spesso di ceneri che, qua e là essendo abraso delle pioggie, mostra sottostante la roccia.

A NE da queste sorgono poche fumarole acquose sulle pareti del M. Somma, che si misero in attività nella primavera del 1910.

Dall'esame dell'ubicazione dei gruppi si rileva subito che le fumarole sono distribuite da SW a NE, forse lungo una frattura che taglia biradialmente il cono centrale in tale direzione e forse più precisamente in quella NNE-SSW. Oltre l'attività maggiore è localizzata a SW colla batteria che sorge sulle pareti del cratere in quel luogo.

VI.

I FENOMÈNI DEL PERIODO DI RIPOSO.

Anno 1906.

V. Un temporale con produzione di torrenti fangosi si verificò nei giorni 27 e 28. Le colate discesero fra Ottajano e Cercola e sul loro percorso distrussero varî ponti della ferrovia Circumvesuviana.

V. Nella notte 17-18 dopo un violento temporale si formarono dei torrenti lutei che discesero verso i dintorni di Resina dove demolirono una casa rurale, producendo due vittime umane. Queste colate avevano le loro origini sullo spiazzo della Stazione inferiore della Funicolare, dove convergevano varî canali radiali del cono. Il 20-21 nuovi torrenti lutei si formarono nell'Atrio del Cavallo e discesero pel fosso della Vetrana dirigendosi verso Cercola, S. Sebastiano e Massa dove giunsero verso il mattino, producendo gravi danni. Una cava di pozzolana profonda circa 18 m. e con 80-100 m. di lato fu colmata totalmente in 15 minuti. In taluni luoghi il fango era alto 1.40 m. Contemporaneamente a queste colate lutee un'altra scendeva su Pollena e dintorni ed una terza, originatasi al Colle Umberto, minacciava la strada dell'Osservatorio.

VI. Frane interne nei giorni 4, 5, 8 ed 11.

VIII. Nei giorni 5 e 14 avvennero delle frane interne. Nei giorni 20 e 22 da Napoli vedevasi sollevare sul cratere della cenere proveniente quasi con certezza da frane interne.

X. Nei giorni 3, 17 e 30 si verificò ancora il sollevarsi di nugoli di ceneri dovuti a frane interne. Negli ultimi del mese dei torrenti lutei si diressero verso Torre del Greco.

XI. Il giorno 10, in concomitanza ad una scossa di terremoto, notevole frana interna. Altre frane avvennero nei giorni 13, 14 (h. 16.0), 25 (h. 15.35) 26, 27. Le più forti furono quelle dei giorni 14 e 24; tutte causarono emissione di ceneri. Nei primi del mese alcune colate lutee discero verso Torre del Greco ed altre verso Boscotrecase.

XII. Il giorno 20 ad h. 16.30 grande frana con caduta di ceneri in quasi tutti i paesi vesuviani e fino a Napoli dove giunse ad h. 21. Il 21 nuova frana e nuova pioggia di cenere a Napoli alla stessa ora del giorno precedente.

Anno 1907.

I. 7. Violenti torrenti lutei verso Resina.

VIII. 30. Frana molto notevole le cui ceneri si sollevarono, per pochi minuti fino a 400 m. d'altezza circa.

X. 9-10. Colate lutee verso Resina e Torre del Greco.

27-28. Nuove colate verso Resina, S. Sebastiano, Cercola, Pollena. Presso S. Anastasia fu abbattuto il ponte Sarlo e presso Torre del Greco una casa.

XI. Il giorno 6 alle h. 12 dal cratere si sollevarono delle ceneri dovute forse a frana. Il 27 e 28, nelle ore pom. nuove frane con sollevamento di ceneri.

XII. Il 27, un'altra frana interna, simile a quella dell'VIII, 30.

Anno 1908.

IV. 21. Boati provenienti dal cratere.

V. 16 (h. 22.30) 19 (h. 22.30); boati provenienti dal cratere uditi fino a Valle di Pompei e Ponticelli.

VII. 8 (h. 8.45); boati uditi a Napoli, Barra e Torre Annunziata. Contemporaneamente registrazione sismica a Valle di Pompei.

X. Il giorno 13, scosse di terremoto al cono centrale registrate a Valle di Pompei.

IV. 14. Nelle ore pom., le colate lutee giungendo a Resina e Torre del Greco, vi produssero danni.

V. 28. Piccola frana interna.

VI. Nei giorni 7, 10, 16 altre piccole frane interne.

VII. Durante il mese le frane furono pochissime.

IX. Nei giorni 9, 10, 16, 17, 20, 21, 22, 28 fu notevole il fenomeno del sollevarsi di nubi cineree, provenienti da frane interne.

X. Il medesimo fenomeno il giorno 13. Il 24 violenti torrenti lutei discesero fra S. Giovanni a Teduccio e Torre del Greco e fra S. Sebastiano e Pollena. Vi furono danni ingenti e vittime umane. Fra Portici e Torre del Greco il fango fu alto 25 cm. circa: alla Chiesa dell'Ospedale Incurabili fu di m. 1.10; sulla via di circonvallazione di Torre del Greco di m. 1.25. In varî luoghi furono sradicati gli alberi. Il 29 nube cinerea sul cratere.

Anno 1909.

I. Nei giorni 11 e 15 alle h. 15 colonne di ceneri dovute a frane interne a SW. Il 12 nuove frane con forte emissione di ceneri.

II. I giorni 1 e 18 le ceneri si sollevarono da NE; il giorno 26 da NE e SW in gran quantità.

VI. 11-12. Ceneri sollevantesi da SW.

VII. 31. Colonna di cenere ad h. 17.

XI. 3. Colata fangosa (verso dove?)

Il giorno 8 giugno il Revelli stimò la profondità del cratere pari a 160 m., calcolando come tale la differenza di livello fra il piano del fondo ed il culmine dell'orlo. La stessa profondità nell'aprile era stata stimata pari a 200 m. dal Meli: le misure successive indicano come tali stime sieno state errate.

Anno 1910.

V. Nel giugno il Perret fotografò sul fondo del cratere a SW un conetto di ceneri a doppio recinto, dovuto certamente ad una piccola esplosione. Sull'origine probabile di questa si dirà altrove. Essa deve aver avuto luogo forse nel maggio.

VII. 9. Grande frana che causò una caduta di cenere abbondante a S. Giuseppe ed Ottaiano. Il 25 ad h. 9.25 una nuova frana fece sollevare le ceneri a circa 200 m. d'altezza.

VIII. 3, h. 15.5, frana imponente con ceneri elevatesi ad 800 m. Il 19 ad h. 14.51, frana a SSW con piccola colonna di ceneri.

XI. Forse nella stessa località o ad W avvenne una nuova grande frana.

Anno 1911.

III. Il giorno 12 ad h. 15.20 circa si staccò una zona di suolo per una lunghezza di circa 300 m. ed 80 di larghezza dell'orlo SW del cratere, la quale precipitò nell'interno di questo. La stazione superiore della funicolare venne così a trovarsi sull'orlo e nelle sue mura si formarono delle fenditure di 10-30 cm. di larghezza. Il suolo fu scosso nell'istante dal franamento e si abbassò di circa 50 cm. nelle vicinanze della zona crollata, la quale corrispondeva al punto dell'orlo craterico rimasto

Fig. 5.ª — Profilo del cratere da SW a NE, nel 1911, VIII.
– – – – *a a.* Profilo prima della frana del 1911, III, 12.
b b. Materiali del talus della frana.
c. Valle semianulare (anello).
———— Profilo dopo la frana del 1911.

Nota. Per errore la quota più alta è segnata 1123, mentre deve leggersi 1223.

più alto dopo l'eruzione del 1906. Il materiale franato formò una conoide di deiezione immensa il cui apice trovavasi a $^2/_3$ d'altezza delle interne pareti del cratere da SSW ad W, mentre la base si estendeva forse fino alle opposte pareti dove si allineavano altre conoidi di dejezione che in taluni punti venivano a contatto colla nuova. I pendî esterni del cono nelle vicinanze della zona franata erano solcati da fenditure che interessavano anche i muri di sostegno dei binarî della funicolare, le cui rotaie erano smosse. Le fenditure più profonde erano a circa 90 m. dall'orlo un poco ad E della funicolare in prossimità di una fumarola esistente da molto

tempo. Ma in numero e larghezza aumentavano ancor più ad W della Stazione in prossimità del centro della zona franata. Nella parte dell'orlo corrispondente a tal luogo avvenivano di continuo frane e molto spesso in gran numero e notevoli per volume: le ceneri sollevantisi ad opera loro si vedevano molto spesso da Napoli. Il suolo aveva in quella regione dei lievi movimenti che perduravano nel mese di giugno. Le ceneri della grande frana si sollevarono a circa 500 m. d'altezza. Nello stesso giorno ad h. 17.15 avvenne una nuova frana e contemporaneamente fu registrata una scossa di terremoto a Valle di Pompei.

Nel primo semestre il centro del cratere aveva la profondità di 217 m., calcolando: l'altezza massima a SSW = 1185 m. s. l. d. m.; il centro del cratere = 968 m. s. l. d. m. Però, secondo il Malladra, tale cifra non rappresentava la profondità massima del cratere, perchè si riferiva ad un punto ubicato sul pendio della grande frana.

IX. Nel settembre la profondità era di 241 m. alla base delle pareti di SSE.

La notte dal 21 al 22 una violenta tempesta si produsse nel golfo di Napoli: le abbondantissime pioggie produssero una grande quantità di colate lutee che discesero da tutti i pendî del Vesuvio nei paesi sottostanti, dove raggiunsero l'altezza di due o tre metri, causando danni enormi e vittime umane.

XI. Verso la fine di questo mese forse avvenne una modificazione del fondo del cratere perchè o per sollevamento a SW o per abbassamento a NE si formò una valle semianulare che incominciando a N passava per E e giungeva a S. La sua maggiore profondità fu stimata dal Malladra pari a 30-40 m. a ENE. Lo stesso autore opina che sia stata opera di un lento sprofondamento senza bruschi moti del suolo [1]).

XI. 1. Frana interna con sollevamento di ceneri.

Anno 1912.

I. Il giorno 21 verso le h. 11.50 s'avvertì sull'orlo del cratere e sui suoi pendî una forte scossa sussultoria, la quale si propagò fino all'Osservatorio Vesuviano, dove si mossero i sismoscopi, a Valle di Pompei dove fu ampiamente registrata ed a S. Vito, dove fu avvertita.

Contemporaneamente tutta la grande frana del 12 marzo 1911 erasi abbassata in massa per circa 30 m. d'altezza e 200 m. di lunghezza, mentre nella parte inferiore del suo pendio s'era formato un enorme avvallamento imbutiforme tagliato nel materiale di frana, del diametro di 100 m. circa e della profondità di almeno

[1]) Questa valle doveva certamente esistere nell'agosto, perchè essa figura nella carta topografica levata dal Castiglione in quell'epoca. Questa carta ed il profilo da essa ricavato lo dimostrano a sufficienza (vedi fig. 5ª). Riducendo il profilo del Malladra, alla scala del 10.000 risulta subito una proporzionalità fra le orizzontali e le verticali, che non può osservarsi nel disegno originale, la quale si accorda molto bene con quello ottenuto dalla carta del Castiglione. Le differenze non sono nè molte, nè notevoli. La profonda insenatura dell'« anello » esiste anche in questa: muta solo il profilo della frana del 1911 a causa dei fenomeni che avvennero nel gennaio 1912. Da ciò si deve dedurre che la valle in questione già parzialmente esisteva nel 1911, VIII e che altri sprofondamenti l'accentuarono.

20 m. Un grande fracasso di pietre cadenti, soffi e boati, accompagnarono il grandioso fenomeno. Oltre le modificazioni descritte se ne produssero altre nella distribuzione delle fumarole. Infatti una fumarola esistente nel centro del cratere scomparve; la fumarola gialla fu coperta e, per così dire, soffocata dai detriti in modo tale che solo dopo un certo tempo riprese il suo solito vigore; le fumarole della valle semianulare del **1911** (anello) le cui più attive erano a **N**, diminuirono di forza ed attività e ne sopravvisse solo un gruppo nel punto nel quale, a **N**, incomincia l'avvallamento.

Anno 1913.

V. Il giorno **9** nei materiali della frana del **1911** e precisamente nello stesso luogo od in prossimità di quello, in cui erasi formato lo sprofondamento del **1912**, si aprì un nuovo imbuto, dal quale sgorgarono grandi fiotti di nebbie.

VII.

LE MODIFICAZIONI AVVENUTE DURANTE IL PERIODO DI RIPOSO E LE LORO CAUSE.

Nel capitolo IV s'è detto dei mutamenti prodotti dall'eruzione sul vecchio edificio vulcanico e nel capitolo successivo si sono descritte le forme, quali erano al principio del periodo di riposo. Queste furono però modificate notevolmente da allora e presentano ora profondi mutamenti dovuti sovratutto all'azione delle forze distruttrici esogene.

Non esporrò qui dettagliatamente tutto il lavorio che produsse le modificazioni, nè le cause che le hanno originate: mi limiterò soltanto a descrivere, nelle linee generali, le categorie più importanti di variazioni.

Le modificazioni più notevoli sono state prodotte dalle frane e dall'erosione idrica.

***

Durante l'eruzione molte e numerose furono **le frane** esterne ed interne, ma specie degli orli, provocate dai fenomeni eruttivi, le quali contribuirono validamente a plasmare le forme recenti distruggendo il vecchio edificio conico in gran parte.

Dopo l'eruzione le frane continuarono quasi ininterrottamente e spesso imponenti.

Furono originate da varie *cause.*

Le più interessanti sono state quelle prodotte dal lavoro di disfacimento delle fumarole nel complesso di banchi rocciosi costituenti le pareti del cratere, indebolite già dalle violenze dell'eruzione. Trattando delle fumarole e precisamente della origine della batteria craterica di SW, ho accennato al fatto che essa abbia potuto influire sulla formazione della frana del 1911. Io credo che molte frane abbiano avuta la stessa origine. In tal caso il loro meccanismo di formazione sarebbe il seguente. Le fumarole s'infiltrano attraverso i banchi tufacei porosi a quelli lavici fratturati, aprendosi un vano verso l'esterno. Naturalmente il calore, la pressione esercitata dai gas, le loro azioni chimiche alteratrici indeboliscono le rocce già poco solidamente compaginate ed aprono per lunghi tratti delle zone interne di distacco fra le due parti di una medesima serie di banchi. Una di queste viene così separata dall'altra su cui s'appoggia: quando il lavorio di decomposizione sarà molto avanzato la parte esterna o superiore, scivolera (se il piano di separazione è inclinato) o precipiterà (se tale piano è verticale) verso il fondo del cratere, abbandonando il proprio sostegno. Da ciò i grandi franamenti delle pareti dove esistono batterie di

fumarole o fumarole molto vigorose. Le frane che ànno tale origine si distinguono perchè la superficie rocciosa lasciata allo scoperto dal crollo è imbiancata e disfatta dell'alterazione chimica.

Ma per lo più l'origine delle frane non è questa: spesso si formano perchè dei banchi lavici perdono il loro sostegno costituito da uno strato di lapilli o ceneri sottostanti, erosi dal vento o dalle pioggie. Altre volte larghi pezzi dell'orlo s'inabissano per il proprio peso che ha servito a creare delle sottili fenditure continuamente allargantesi sotto l'azione di scosse od infiltrazione lenta di acque e vapori. Nei casi precedenti per lo più le frane sono voluminose; v'è però il caso in cui il franamento avviene su vasta scala rispetto allo spazio, ma con caduta di poco materiale: talvolta è il vento che determina questo franare lento e continuo, ma più spesso è il sole. Il calore irraggiato da questo asciuga le rocce frammentarie che incontra (banchi di ceneri, di lapilli etc.), le quali perdendo la loro coerenza, dovuta all'umidità che le impregna, si sgretolano e cadono. Si verifica spesso perciò un migrare delle frane a seconda del volgere del sole, poichè le pareti soleggiate sono soggette al franamento, mentre le altre rimangono immuni. Naturalmente tale fenomeno si verifica a preferenza nei giorni caldi e sereni e specialmente durante l'estate.

Poco o nulla v'è a dire sul *meccanismo* delle frane. Una caotica valanga di massi che piombano nel vuoto o balzano sui pendî con formidabile fragore ed un crepitio incalzante dovuto all'urto dei blocchi fra loro; un rimbalzare di sassi che raggiungono velocemente il fondo del cratere; dense nubi di ceneri che scivolano sui pendî delle pareti o delle conoidi di dejezione e poi risalgono verso l'alto: ecco il modo di presentarsi di una frana. Interessanti sono le forme assunte dalla polvere che si solleva dal materiale cadente. Si formano prima dei globi densi che raggiungono il fondo e poi s'espandono lentamente innalzandosi e simulando delle esplosioni; intanto altre nuvole di polvere si sollevano da tutta la zona percorsa della frana. Le nubi cineree si sollevano in volute, s'espandono, raggiungono e superano l'orlo, dando, quando sono molto vistose, l'impressione di nubi dovute ad esplosioni eruttive. Negli ultimi giorni dell'eruzione le frane su larga scala con produzioni di grandi volute di ceneri erano molto frequenti e taluna di esse poteva veramente trarre in ìnganno circa la propria natura. Per il sollevarsi di queste nubi non v'è assoluto bisogno di supporre che esse siano prodotte dalla spinta verso l'alto che l'aria compressa dalla frana nel fondo del cratere comunica ai materiali di queste. Come anche non è giusto il termine di « esplosione » applicato a questo fenomeno [1]).

Riguardo alla *distribuzione* delle frane nel tempo: per quelle dovute all'azione delle fumarole non si può stabilire un massimo, il quale dovrebbe però coincidere colla fine di un prolungato periodo di energica attività di queste; mentre che v'è un massimo estivo per quelle causate dal soleggiamento ed un massimo invernale poco sicuro per le frane originate dall'infiltrazione delle acque nel suolo, dall'erosione di banchi incoerenti e cause simili esogene. Però, dato l'alternarsi ed il so-

[1]) Il **Mercalli** chiama queste frane col nome di esplosioni « adinamiche ». Non credo che il nome possa andare, perchè non so immaginare delle esplosioni « senza forza ».

vrapporsi di tutte queste cause, non può stabilirsi un massimo assoluto od un andamento generale del fenomeno. Solo può dirsi che nei primi tempi dopo l'eruzione le frane erano più numerose che oggidì: cioè si verificò una diminuzione col procedere del tempo, dovuta al fatto che i materiali assunsero una posizione d'equilibrio ognor più stabile e definitiva.

Effetti principali delle frane sono quelli di demolire le pareti del cratere e specialmente l'orlo; scavare nelle pareti interne di quello dei lunghi canali che si dirigono verso il centro di questo, dovuti all'erosione secca; formare alle basi di tali canali grandi conoidi di dejezione disposte lungo la linea d'intersezione delle pareti del cratere col fondo ed infine risollevare questo.

***

Un agente che contribuì molto validamente a modellare le attuali forme, modificando le antiche, è stata l'**erosione idrica** che si esercitò specialmente all'esterno del cono sui materiali recenti. Durante l'eruzione si formarono i canali d'erosione secca le cui linee generali vennero seguite da quella idrica successiva. Questa approfondì, modificò, distrusse alcuni di quelli e così, pur restando intatte le primitive linee generali, vennero alterati i particolari.

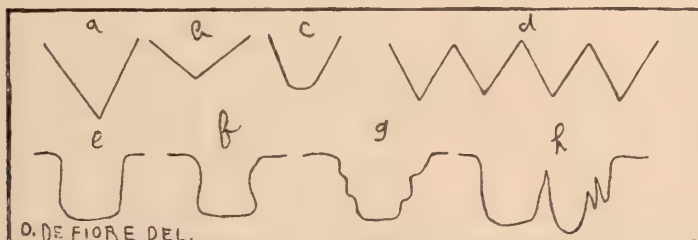



Fig. 6.ª — Sezioni di canali d'erosione secca ed idrica. Dal vero.

a, *b*, *c*: canali d'erosione secca prodotti dalle frane durante l'eruzione.

d: serie di canali contigui d'erosione secca nei pendî NW del cono, dopo l'eruzione.

e, *f*: canali d'erosione idrica a pareti verticali o convesse. Valle d'Inferno.

g: canale con terrazzamento interno. Valle d'Inferno.

h: confluenza di due canali con lame d'erosione. Valle d'Inferno.

L'effetto dell'erosione fu duplice: distruzione dell'edificio ed asportazione dei materiali in alto, formazione di conoidi di dejezione o colate lutee in basso.

L'erosione s'esercitò specialmente sui materiali recenti incoerenti composti da strati ad elementi di grossezze diverse, spesso disposti caoticamente. Non è raro il caso in cui per effetto dell'erosione si possa vedere non solo tutta la serie dei materiali emessi dall'ultima eruzione, ma anche quelli sottostanti.

Nelle parti elevate del cono i canali sono poco profondi, diventano però tali verso metà altezza; in basso seguono le conoidi di dejezione. Queste si producono solo quando il materiale è grosso o il fango è poco liquido: col variare della grossezza

e fluidità dei materiali varia anche l'angolo d'inclinazione della superficie e dei fianchi delle conoidi. Numerosi canalicoli secondari le solcano in tutte le direzioni, assumendo specialmente una disposizione pennata rispetto all'asse maggiore della conoide. Quasi sempre il fango costituente dà luogo alla formazione di efflorescenze alla superficie, secondo un meccanismo speciale.

I canali solcano anche le parti pianeggianti dell'edificio e perciò ne troviamo un ampio sistema nelle due pianure conosciute col nome di Valle d'Inferno ed Atrio del Cavallo ed in tutti quei tratti piani o leggermente inclinati che circondano il cono e dai quali esso sorge.

I canali degli Atrî, per la maggior parte, sono la continuazione di quelli che discendono dal gran cono, ma non ne mancano dovuti all'azione delle acque che scorrono giù dal Colle Umberto e dal Colle Margherita. Presso gli sbocchi degli Atrî i sistemi si confondono ed uniscono, ma nell'interno si possono individuare e seguire, spesso per lunghi tratti, dei profondi canali. Generalmente sono scavati nei materiali recenti tagliandone e mettendone a nudo gli strati, individuando i quali si può avere un'idea del meccanismo che accumulò quegli immensi depositi in fondo alle valli.

Nella Valle d'Inferno i canali hanno la profondità maggiore. Si presentano come corridoi tortuosi: le pareti ed il fondo sono di materiali recenti; ma talvolta s'incontrano quelli preesistenti all'eruzione. Il maggiore dei canali che io abbia visto e misurato aveva circa 8 metri di profondità e quasi la stessa era quella di un altro scavato fra il Colle Umberto ed il cono centrale. Il primo era praticato fra i materiali fini, il secondo fra quelli caotici a grossi elementi. Credo che questi non siano i più profondi: è certo però che i più imponenti devono trovarsi nei tre punti di sbocco delle valli, dove le acque raccolte sulle vaste superficie dei pendî NE-N-NW del cono, delle pareti interne del M. Somma e delle pianure degli Atrî, passano accumulate in grande quantità e con forza e velocità notevoli.

Questi canali, malgrado che varî l'inclinazione del suolo sul quale si formano, sono morfologicamente simili a quelli del cono centrale. Dapprima una parte poco profonda, poi un cañons ed infine, non la produzione di distinte conoidi di dejezione, ma di vaste superficie ricoperte di detriti, blocchi e fango. Notevole è il ricoprimento delle colate laviche recenti per opera di queste masse detritiche.

In questi canali sono interessanti la formazione di lame molto simili a quelle dei canons dei terreni argillosi ed il crollo di banchi lavici compatti pel mancato sostegno del terreno incoerente sottostante, abraso.

La distribuzione topografica di tali canali è regolata dalle accidentalità del suolo.

Descrivendo i sistemi che solcano l'edificio ed intagliano i materiali recenti, è bene avvertire che spesso uso la parola canale non per indicare proprio le formazioni che vanno distinte con questo nome, ma piuttosto le direzioni dal fluire delle acque, tracciate spesso sul suolo da lievi strie o da piccoli rilievi sabbiosi paralleli, che somigliano a minuscoli canali forniti di argini.

Dal cono centrale discendono radialmente dei sistemi semplici che ne raggiungono la base: verso questa essi sono complicati da altri secondarî ed i canali minori aumentano sempre più in una certa regione del cono, dove il pendio si fa meno

accentuato, nella quale se ne vedono alcuni veramente in miniatura. Come già s'è notato, molti solcano le conoidi di deiezione. Là dove le forme del cono intersecano il piano su cui esso giace, i canali ridiventano più semplici e molto larghi, o per meglio dire, il suolo è eroso e sconvolto su tutta la superficie: ciò è dovuto alla fusione dei sistemi superiori ed ivi si formano quei canali che poi si dirigono verso gli sbocchi degli Atrî e quelli che discendono giù dal grandioso cono formato dall'edificio principale (M. Somma, rivestito dai prodotti del Vesuvio). I canali compresi nei settori SE-S-SW-W del cono, discendendo da questo generalmente proseguono mantenendo inalterata la direzione primitiva; perdono però le loro caratteristiche di profondità e di essere scavati nei materiali recenti perchè ivi lo strato di questi è poco spesso e riveste delle vaste superficie laviche che oppongono una notevole resistenza all'azione erosiva. Su quei settori del cono, scorrono solchi vasti e profondi dei quali i maggiori sono in prossimità del grande franamento esterno di S prodottosi durante l'eruzione. I canali che discendono dal pendio di NW, giungendo alla base del cono subiscono una deviazione poichè urtano contro il massiccio del Colle Umberto: alcuni volgono verso l'W ed altri verso il N-NW; i primi scendono sulla pianura dove ora sorge la Stazione inferiore della funicolare ed unendosi a quelli provenienti dai pendî W del cono danno origine alle colate lutee che si dirigono verso Resina (vedi 1906, V); gli altri girando attorno al Colle Umberto, passano fra questo ed il Colle Margherita dapprima e fra quello e le pareti di M. Somma di poi, dirigendosi verso il fosso della Vetrana, dove si formano le grandi colate lutee che scendono su Cercola, Massa, S. Sebastiano, etc., per ostacolare le quali furono costruite le grandi dighe che formarono a monte dei grandi laghi di fango. Non tutte le colate lutee, però, discendono pel fosso della Vetrana, perchè alcune, d'origine strettamente locale, passano fra il Colle Umberto ed il Colle del Salvatore, nel quale poco sotto l'Osservatorio Vesuviano, si sono prodotti dei grandi e profondi canali d'erosione idrica, che hanno in taluni luoghi tagliata la strada, scavati in gran parte fra i materiali antichi. I canaloni che discendono dai pendî del cono compresi nel settore che incomincia a NNW e passando per N e NE termina ad E, si riuniscono nell'Atrio del Cavallo e nella Valle dell'Inferno e le loro acque sboccano in piccola parte dai canali già descritti verso il fosso della Vetrana, il resto, quantità ben maggiore della precedente, a SE della Valle d'Inferno. Questo enorme volume di acque e materiali fluitati scava dei profondi solchi d'erosione nei banchi antichi del M. Somma ed è appunto in tal luogo che si può osservare il fenomeno di una colata lavica crollata pel mancato sostegno dei banchi sottostanti abrasi e le più belle sezioni di questi. Da questo sbocco esce la quantità maggiore di acque perchè esso è come il canale di sfogo di tutte quelle che cadono nel vasto bacino collettore compreso fra la cerchia interna del M. Somma, il luogo ove l'Atrio del Cavallo confina colla Valle d'Inferno presso il Colle Margherita, l'orlo del cratere ed il limite SE della Valle d'Inferno.

Però i sistemi di canali non sono così semplici come ho descritto fin'ora, se non nelle linee generali, perchè al sistema principale bisogna aggiungere altri tre sistemi minori. Il primo è quello che solca le pareti interne del M. Somma: i canali non sono distinti poichè le rocce che le compongono offrono una valida esistenza all'erosione: vi è però una grande denudazione della compagine rocciosa e fluitazione

di materiali. Altro sistema, molto secondario, è quello che discende dai pendî del Colle Margherita. Per la sua forma speciale, i canali sono numerosi, ma piccoli verso NW e N e si uniscono a quelli che passano fra il Colle Umberto e M. Somma percorrendo la strada seguente: dapprima scendono fra il Colle Margherita e M. Somma, poi fra questo ed il Colle Umberto, allora si congiungono ai principali e si dirigono verso il fosso della Vetrana. L'ultimo sistema, e più importante del precedente, è quello del Colle Umberto. I canali scendono radialmente dal vertice della cupola lavica verso la periferia e così si ricongiungono nel modo che segue con quelli che provengono dal cono centrale: quelli di SE e S si uniscono ai canali di W del cono; gli altri di SW ed W scendono direttamente dai pendî del colle ed infine gli ultimi di NW, NNE ed E sboccano nei canali del Colle Margherita che poi finiscono nel fosso della Vetrana.

In conclusione, tutte le acque che si raccolgono nello spazio compreso fra l'orlo del cratere e la cresta del M. Somma producono profonde erosioni nella regione degli Atrî ed i canali hanno tre sfoghi principali: uno ad E SE, il secondo a SW, l'ultimo a NW.

***

Siccome da questi sbocchi non discende sola acqua, ma un complesso di sostanze fluitate che forma per lo più **le colate lutee** conosciute col nome di torrenti di fango, così questi provenendo da tre punti principali, naturalmente si distribuiscono a preferenza su tre regioni, con lievi variazioni dovute alle accidentalità del suolo. Si spiega così la maggiore frequenza delle alluvioni fangose su certi paesi.

Sul *meccanismo* delle colate lutee v'è poco da dire. Anzitutto devono certamente considerarsi come l'equivalente delle conoidi di dejezioni: la differenza principale consiste, come si disse, nella fluidità delle masse. Riguardo all'origine essa è così semplice e chiara che non credo opportuno soffermarmici. Sarebbe molto interessante avere dati sicuri sulla velocità e sul modo d'avanzata di queste colate. Io ho potuto esaminarne alcune già ferme, ma di una certa importanza, nelle alte e nelle basse regioni del cono, e da quanto vidi credo che il loro moto varî un poco a seconda della fluidità.

La *struttura* delle colate non può essere oggetto di speciali ricerche, data la sua semplicità. Per lo più è composta di materiali di calibro omogeneo che portano blocchi di varie dimensioni, e talvolta enormi. La distribuzione del materiale nello spessore della colata è tale che il volume degli elementi di quello diminuisce verso l'alto. Le colate lutee originano in tal guisa i conglomerati, mentre le valanghe secche e le frane danno luogo alla formazione di brecce.

La sezione latitudinale della colata è tanto più breve quanto più la colata è densa. A causa di questo fatto spesso la colata si presenta come un rigonfiamento emicilindrico adagiato sul suolo: considerandone la fronte non saprei meglio paragonarla per la forma che ad un colaticcio di cera o di pece disposto orizzontalmente.

Le sezioni si appiattiscono coll'aumentare della fluidità ed in certi casi si formano delle morene laterali poco più alte del centro della colata. Questa non sempre ha forma convessa: talvolta si nota una tendenza alla concavità. Infine è notevole nelle

colate non molto fluide nè troppo dense, la produzione di una serie di cordoni paralleli, curvi, con la convessità verso la fronte delle colate, che si estendono da un lato all'altro di questa. Sono identici alle conosciute forme delle lave a corde ed avendo la medesima origine meccanica, le une possono a servire alla spiegazione del modo di formazione delle altre.

Essendo i fenomeni erosivi e le formazioni delle colate lutee in rapporto colla precipitazione atmosferica, ho creduto opportuno mettere quelli in relazione a questa, durante il periodo 1906 aprile-1913 aprile.

Per ciò ho usati i dati delle stazioni meteorologiche della regione vesuviana. Ho dovuto escluderne qualcuna o per mancanza di dati sicuri ed in serie completa, o perchè, e ciò specialmente per l'Osservatorio Vesuviano, i valori misurati della precipitazione non sono quelli reali perchè a causa del vento la pioggia cade inclinata e non è raccolta come dovrebbe esserlo dal pluviometro: in linea generale si nota un difetto sui dati delle stazioni circonvicine. Esaminando i valori assoluti mensili ed annui, le somme complessive pel periodo 1906-1913 ed infine, mettendo in rapporto questi coi valori normali, stabiliti precedentemente da varî autori [1]), ho trovato che:

1) il massimo lavorio di erosione e di trasporto si è verificato nei primi tempi dopo l'eruzione: in seguito s'è raggiunto un progressivo assestamento e ciò pel venire a mancare delle ceneri e specialmente di quelle fine che costituivano gli strati più superficiali dei prodotti dell'eruzione ultima;

2) a parità di condizioni il lavorio maggiore di demolizione, accusato dalla formazione delle colate lutee, era nei mesi di maggiori pioggie. Nel caso che l'andamento mensile della precipitazione non seguisse i valori normali, anche la formazione delle colate lutee subiva delle variazioni.

In conclusione nel lavoro di demolizione e di trasporto s'è avuto una continua e progressiva diminuzione, non uniforme, ma con delle variazioni in correlazione a quelle delle quantità di pioggia cadute.

***

Altro effetto dell'erosione idrica è stata la produzione di minuscole piramidi di sabbia sormontate da un piccolo sasso o da una scoria, richiamanti alla memoria i funghi alpini e le analoghe formazioni dei terreni argillosi o sabbiosi. Però nel nostro caso questi prodotti dell'erosione piovana sono di dimensioni molto ridotte e modeste.

Notevole invece è stata la rubefazione dei materiali recenti. Secondo le idee del Brun questa dà luogo alla formazione delle cosidette « rocce morte ». Sarebbe molto interessante stabilire se la rubefazione delle ceneri delle ultime esplosioni sia avvenuta nel condotto o dopo l'emissione, come pare risultare da alcune osservazioni.

---

[1]) Alberti A., *Sul clima di Napoli.* Ist. Incoraggiamento, (5), III, Napoli, 1902.

Eredia F., *Le precipitazioni atmosferiche in Italia.* Ann. Uff. Centr. Met. Geod. (2), XXVII, Roma, 1908.

VIII.

CONCLUSIONI

Credo opportuno riassumere, molto brevemente, le conclusioni principali alle quali sono pervenuto nel corso del presente studio.

Le forme dovute al lento ed ininterrotto lavorio di costruzione del periodo eruttivo 1875-1906, vennero demolite dal parossisma che termina tutti i lunghi periodi d'attività vesuviana. La distruzione fu dovuta quasi esclusivamente alle esplosioni che si producono alla fine delle eruzioni a causa della violenta espansione dei gas contenuti nel magma ai quali è tolto il peso della colonna lavica sovrastante. Tali gas, che asportavano al serbatoio magmatico una certa quantità di particelle minutamente suddivise e frantumate, salendo nel condotto si caricavano delle ceneri provenienti dalla demolizione dell'edificio e formavano una violenta corrente ascendente, la quale strappava gli orli del cratere e li lanciava polverizzati o frantumati in alto. Questi in parte ricadevano sui pendî del cono e formando delle valanghe incidevano i materiali recenti dando luogo alla produzione di canali d'erosione secca, la cui sezione era simile ad un V. Dall'esame dei fenomeni del parossisma risulta che il condotto eruttivo si sprofonda inclinato verso SSW e perciò volge la bocca a NNE. Ciò spiega molte particolarità dell'eruzione e specialmente la caduta delle ceneri predominante in un dato settore, la formazione della slabbatura di NNE ed infine, come dimostrerò altrove, alcuni fenomeni che devono considerarsi come premonitorî di un futuro risveglio. In conclusione, la distruzione dell'antica ed il modellamento della nuova forma fu dovuto quasi esclusivamente ad esplosioni e solo in minima parte e come fenomeno accessorio, a sprofondamenti. Effetto delle esplosioni fu la produzione di un vasto cratere, di profondità sconosciuta, scavato nel cono svettato e solcato esternamente da numerosi canali radiali.

Esaminando tutta la serie dei fenomeni verificatisi al Vesuvio dal 1906 fino al 1913 credo che nel periodo di riposo studiato si possono distinguere varie fasi principali, ognuna delle quali è caratterizzata dal predominio di taluni fenomeni. È da notare che le accennate fasi non sono nettamente delineate e costituite da una sola categoria di fenomeni, ma che vi sono tra loro graduali passaggi; che in ognuna si riscontrano, con varia intensità, i fenomeni delle altre ed infine che la caratteristica è il predominio d'una data categoria di manifestazioni. Tralasciando le altre due fasi, delle tre che distinguo; e cioè quella dell'attività fumarolica e l'altra degli sprofondamenti premonitori delle manifestazioni eruttive principali; la prima è caratterizzata dai fenomeni esposti nel corso del presente studio.

Più precisamente la caratteristica di questa fase è la distruzione prodotta dagli

agenti esogeni sulle forme recenti, la quale si esplicò con le seguenti categorie di fenomeni: frane, erosione e trasporto di materiali recenti.

Per azione delle frane d'assestamento, prodotte dall'instabilità dei materiali, il fondo del cratere si andò sollevando, rapidamente in principio, più lentamente in seguito. Le frane erano causate dagli agenti endogeni e da quelli esogeni. Fra i primi ho segnalate quelle dovute all'azione delle fumarole e che ritengo comuni a tutti i vulcani in riposo ed attività fumarolica. Furono però frequenti quelle causate dalle scosse urtanti l'edificio ed altre di speciale origine, costituite da parziali inabissamenti del fondo del cratere costituenti quei tali fenomeni premonitorî del risveglio ai quali ho accennato ed il cui studio dettagliato e completo sarà esposto altrove. Caratteristiche della prima fase furono le frane dovute agli agenti esogeni prodotte dal soleggiamento, dal vento, dall'erosione idrica e dalle variazioni termiche: tutte queste cause per lo più agirono riunite.

Ma le modificazioni esterne del cono più notevoli si devono all'erosione idrica la quale approfondì i canali d'erosione secca e ne formò dei nuovi con una sezione simile ad un U.

I materiali asportati dalle alte regioni del cono vennero distribuiti sulle falde inferiori e sulle basi di questo, le quali così furono sollevate di livello. Tale trasporto assunse le forme di conoidi di deiezione o colate lutee, geneticamente equivalenti.

Questo assestamento non venne operato uniformemente nè nel tempo, nè nello spazio. Infatti il massimo lavorio di distruzione erosione e trasporto s'è verificato nei primi tempi dopo l'eruzione: in seguito l'entità delle distruzioni è andata diminuendo, non uniformemente, ma con variazioni in rapporto, entro certi limiti, agli agenti esogeni che la producevano.

Oltre, tale lavorio non è stato rigorosamente proporzionale agli agenti produttori durante tutto il periodo, poichè v'è stata una sensibile diminuzione degli effetti verso la fine di questo.

L'assestamento è stato limitato quasi esclusivamente al cono vesuviano propriamente detto ed a quei settori del M.e Somma ricoperti dai prodotti dell'ultima eruzione. Cioè s'è verificato il plasmarsi di forme nuove, limitato alle regioni ricoperte di materiali recenti.

Concludendo, dopo la fine dell'eruzione s'ebbe solo un lavorio continuo di distruzione, causato specialmente dagli agenti esogeni. Gli effetti sull'edificio furono di demolizione degli orli del cratere, i cui materiali riempirono in parte la voragine d'esplosione sollevandone il fondo, e di denudazione dei pendî esterni ai quali vennero asportati altri materiali distribuiti alle basi del cono.

finita di stampare il dì 26 Settembre 1913

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tav. I.

Le variazioni topografiche del Cono centrale.

Fig. 1. — La regione vesuviana (Somma, Atrî e Cono centrale) prima dell'eruzione del 1906.
Rilievo al 10.000 dell'Istituto geografico militare eseguito nel 1900, colle recognizioni generali del 1904, ridotto fotograficamente dall'autore alla scala approssimata dell' 1 : 25.000. In questo rilievo manca il conetto che si incominciò a formare nel cratere di sprofondamento del 1903, perchè l'opera di costruzione s' iniziò dopo la levata topografica.

Fig. 2. — La stessa regione dopo l'eruzione del 1906.
Rilievo all' 1 : 10.000 dell' Istituto geografico militare eseguito nel settembre 1906 dal Topografo Fiechter e ridotto come il precedente alla scala approssimata dell' 1 : 25.000.

Fig. 3. — La stessa regione nel 1911.
Rilievo all' 1 : 10.000 del Topografo Castiglione per incarico del sig. Friedlaender, eseguito nell'agosto 1911, usando del precedente rilievo militare. Notevoli le variazioni del cratere centrale.
Nota. Il rilievo non è molto preciso poichè è stata dimenticata la correzione della declinazione magnetica. Così molti punti e specialmente le fumarole dell'Atrio del Cavallo non sono al loro vero posto.

Tav. II.

Le trasformazioni interne del Cratere dopo l'eruzione.

Fig. 1. — L'orlo SW immediatamente dopo la fine dell'eruzione. Notevoli le forme arrotondate dall'azione livellatrice delle ceneri che le rivestono. Assenza di fumarole distinte. Fot. Perret.

Fig. 2. — Lo stesso orlo SW nel 1909. La coltre di ceneri fine è scomparsa: apparizione delle sottostanti lave e tufi. S'è iniziata l'opera di degradazione idrica ed eolica. Comparsa delle prime fumarole in batteria; 1909, VI, 5. Fot. Perret.
Nota. Il dorso molto accentuato che si vede nel campo delle due precedenti fotografie è parte dell'orlo scomparso colla grande frana del 1911.

Fig. 3. — Dopo la frana del 1911, III, 12. La batteria di SW è in piena attività e su grande estensione. Si vede, fra le nebbie delle fumarole all'orlo, la Stazione superiore della funicolare, abbandonata; 1911, III, 21. Fot. Perret.

Fig. 4. — Dallo stesso punto: le fumarole disposte antecedentemente in batteria aumentano di numero verso il basso, nelle pareti interne; 1912, V, 12. Fot. De Fiore.

Fig. 5. — L'interno del Cratere subito dopo l'eruzione. Dall'alto in basso: la cerchia di M. Somma, in fondo; l'orlo del Cratere con una scarpata verticale di banchi lavici e tufacei, alla quale segue quella inclinata; infine le pareti del pozzo craterico a picco. Non si può vedere il fondo. Le forme sono rivestite di ceneri. Nel centro la fotografia è più chiara per nebbie diffuse salienti dal fondo del cratere; 1906, VI, 1. Fot. Perret.

Fig. 6. — Dallo stesso punto: è stata asportata la cenere ricoprente le pareti i cui banchi costituenti sono ora visibili. Inclinazione quasi uniforme delle pareti poichè della scarpata, già distrutta, rimangono solo le vestigia. Si vede il fondo, risollevatosi. Nelle linee d'intersezione di queste colle pareti s'appoggiano grandi conoidi di deiezione, i cui canali di scarico si vedono sovrastare a quelli; 1908, III. Fot. Perret.

Tav. III.

Le variazioni degli orli del Cratere e le frane.

Fig. 1. — Le variazioni dell'orlo del Cratere.

Dalla Punta del Nasone (M.^e Somma).

A, Prima dell'eruzione del 1906. Il Cono centrale col Cratere di sprofondamento del 1903 ed il conetto terminale inclusovi. 1905, V, 22.

B, Dopo l'eruzione del 1906. 1906, V, 31.
C, Id. id. id. 1909, VIII.
D, Id. id. id. 1911, III, 21.
E, Id. id. id. 1912, V, 12.
F, Id. id. id. 1913, VI, 17.

Da un punto immediatamente sottostante ad W alla Punta del Nasone.

a, Prima dell'eruzione del 1906. Il Cono centrale col Cratere di sprofondamento del 1903 ed il conetto terminale inclusivi. 1905, V, 22.

b, Dopo l'eruzione del 1906. 1906, V, 31.
c, Id. id. id. 1909, VIII.
d, Id. id. id. 1911, III, 21.
e, Id. id. id. 1912, V, 12.
f, Id. id. id. 1913, VI, 17.

Tutti i profili sono tratti da fotografie. Scala approssimata: 1 : 10,000.

Fig. 2. — Frana interna a nube densa scivolante sul pendio di una conoide di dejezione. Fot. Perret.

Fig. 3. — Effetto di una grande frana interna: sollevarsi di una grande nube di ceneri in volute simulanti un'esplosione. Dall'Osservatorio. 1906, V. Fot. Perret.

Fig. 4. — Frana interna a nube diffusa del 1909, VII, 10. Fot. Perret.

Tav. IV.

Le variazioni esterne del Cono centrale.

Fig. 1. — Il Cono centrale ed il Cratere visti nel 1908 da NE. (Cognoli d'Ottaiano). Notevoli i profondi canali d'erosione colle 3 parti caratteristiche ed i canali minori scavati nelle conoidi di dejezione; 1908. IX. Fot. Perret.

Fig. 2. — Il Cono centrale ed il Cratere, visti da N (Punta del Nasone); 1913, VI, 17. Fot. De Fiore.

TAV. V.

Le variazioni interne del Cratere dal 1909 al 1912.

Fig. 1. — Interno del Cratere. Panorama completo da N nel 1909, VI. A sinistra (E) si vedono i canali d'erosione e le conoidi sottostanti che poggiano sul fondo del cratere risollevatosi e sulle pareti. A destra (W) la parete che poi è franata nel 1911, III e presso il suo orlo poche fumarole della batteria, ancora non in piena attività. Questo dettaglio corrisponde a quello della fot. 2. della Tav. V, vista però da un punto opposto; 1909, VI. Fot. Perret.

Fig. 2. — La parete di SW del Cratere dopo la grande frana del marzo 1911. La conoide di deiezione in basso, la batteria di SW in alto. Questa fot. corrisponde alla parte destra della precedente e si possono perciò stabilire i confronti delle variazioni avvenute; 1911, III. Fot. Perret.

Fig. 3. — La stessa coll'imbuto del 1912, I. Da NNE; 1912, VII, 11. Fot. Perret.

Fig. 4. — Lo stato del Cratere nel 1912. Circa da NNW. Fot. Perret.

TAV. VI.

Erosioni e colate lutee.

Fig. 1. — Colata di fango nell'Atrio del Cavallo. Fot. Perret.

Fig. 2. — Canale di erosione fra il Colle Umberto ed il Cono centrale. Fot. De Fiore.

Fig. 3. — Canale d'erosione (dettaglio) nella Valle d'Inferno; 1912, V, 12. Fot. De Fiore.

Fig. 4. — Lo stesso canale che si prolunga sui pendì del Somma, incidendo i materiali di questo; 1912, V, 12. Fot. De Fiore.

Fig. 5. — L'interno del Cratere da NNE. Notevoli i profondi canali d'erosione e le sottostanti conoidi di dejezione; 1912, V, 12. Fot. De Fiore.

Fig. 6. — Il sollevarsi di nubi di frane dal fondo del Cratere. 1912, V, 12. Fot. De Fiore.

Fig. 3.ª

O. De Fiore.

Tip. De Rubertis

FIG. 1.

FIG. 5

FIG. 2.

FIG. 3.

FIG. 4.

FIG

FIG. 1.

FIG. 2.

FIG. 3.

FIG. 4

FIG. 1.

FIG. 2.

FIG. 1.

FIG. 2.

FIG. 3.

FIG. 4.

FIG. 1.

FIG. 2.

FIG. 3.

FIG. 4.

FIG. 5.

Vol. XV, Serie 2.ª N.° 15.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

IL TUFO CAMPANO DI VICO EQUENSE

MEMORIA

di A. GALDIERI e V. PAOLINI

presentata nell' adunanza del dì 5 Luglio 1913.

INTRODUZIONE E BIBLIOGRAFIA

L'ossatura della Penisola Sorrentina è costituita principalmente da dolomiti del Trias superiore e da grandi masse calcaree del Cretaceo, cui si sovrappongono scarsi lembi di Terziario. Su questi terreni fondamentali si vedono spesso depositi più o meno potenti di tufi vulcanici, tra i quali ha notevole importanza il così detto tufo campano. Di questo ci occuperemo nel presente lavoro, limitando per altro lo studio al deposito di Vico-Equense, spiacenti che ragioni di tempo ci abbiano impedito di estendere le nostre ricerche ad altri giacimenti, perchè uno studio comparativo di questi riuscirebbe anche più importante e più utile.

Fra i tufi vulcanici che ricoprono tutta l'ampia pianura campana e la maggior parte delle valli vicine ha notevole importanza scientifica e pratica il tufo campano, detto anche pipernoide, perchè somiglia al piperno.

Il tufo pipernoide è per solito di color grigio bruno, talora tendente al giallo, più raramente è rossiccio o violaceo. Ha compattezza varia: ora si sminuzza facilmente con le mani, ora mostra una consistenza quasi litoide. È caratterizzato dalla presenza di piccole scorie nere e di geodi fluorifere; talora poi mostra scorie molto grosse, le quali nel tufo da noi studiato raggiungono qualche volta i 20 centimetri e più. Altri caratteri frequenti e facilmente rilevabili del tufo campano sono la sonorità e la configurazione in grossi prismi irregolari.

Abbiamo detto che il tufo campano è importante sia dal punto di vista scientifico che pratico. Dal punto di vista pratico è utile, perchè viene largamente usato come materiale da costruzione; dal punto di vista scientifico è interessante, perchè parecchi autori si sono occupati di esso e non sempre con concordia di pareri sulla sua natura e sulla sua origine.

Breislak [1]) ritiene che il tufo campano sia dovuto ad eruzioni di vulcani sottomarini più antichi di quelli di Roccamonfina.

Pilla [2]) crede invece che sia derivato precisamente dai vulcani di Roccamonfina. La stessa cosa è ammessa da Abich [3]).

Arcangelo Scacchi si occupò molto del tufo campano; ed è a lui che dobbiamo gli studi più importanti su di esso. Nei suoi primi lavori [4]) egli considera il tufo campano come tufo di trasporto derivato da eruzioni dei vulcani flegrei e trasportato dai venti; lo distingue dalle altre varietà per il colore bruno di varie gradazioni, per la tenacità e sonorità, e lo chiama tufo bruno o nero. Nota che i depositi di questa roccia sono più frequenti e più estesi lungo il corso dei fiumi, nel fondo delle valli o al più sui dorsi delle colline a lieve pendio, e ne trova la causa in ciò, che gli elementi del tufo, caduti in forma di pioggia, prima di cementarsi, sono stati trasportati e accumulati nei luoghi più bassi dalle acque piovane. Ma negli ultimi anni della sua vita lo Scacchi, avendo ripreso a studiare il tufo campano, cambiò completamente avviso, e in alcune memorie [5]) e nell'opera sui vulcani fluoriferi della Campania [6]) espose le sue nuove idee su questo argomento. In questi ultimi lavori egli ammette che i depositi di tufo derivino da eruzioni indipendenti, avvenute nel luogo stesso ove essi si trovano, e col nome di *vulcani fluoriferi* indica appunto i presunti vulcani che avrebbero dato origine a queste eruzioni. Li chiama *fluoriferi* perchè le geodi sopra accennate del tufo campano risultano spesso in buona parte di fluorite. Siccome poi i detti depositi hanno la superficie spianata senza indizio di cratere, egli sostiene che le materie costituenti il tufo siano uscite mescolate con acqua in modo da formare una mota che poteva spandersi facilmente intorno al centro eruttivo, e considera queste eruzioni come eruzioni fangose.

Ritorneremo in seguito su queste ipotesi dello Scacchi; per ora ci limitiamo a far notare che i geologi ritengono molto più probabile la sua prima opinione. Ad ogni modo anche le sopra citate ultime opere di lui sono ricche di pregi, perchè in esse sono descritti i principali depositi tufacei della Campania e sono esaminati con grande precisione e con altrettanta dottrina i caratteri mineralogici e chimici dei singoli tufi.

Il Prof. L. Ricciardi si è occupato ripetutamente del tufo campano, e pro-

---

[1]) Breislak S., *Topografia fisica della Campania.* Firenze, 1798, pag. 51.

[2]) Pilla L., *Osservazioni geognostiche sulla parte settentrionale e meridionale della Campania.* Annali civili del Regno delle Due Sicilie, 1833, Fasc. 6°, Nov.-Dic.

[3]) Abich H., *Geologische Beobachtungen über die vulkanischen Erscheinungen und Bildungen in Unter und Mittel-Italien.* Braunschweig, 1841.

[4]) Scacchi A., *Memorie geologiche sulla Campania.* Rend. d. R. Acc. d. Sc. di Napoli, N. 43-50, gennaio 1849-aprile 1850. Vedi anche: Idem, *Notizie geologiche e conchiologiche ricavate da una lettera di R. A. Filippi ad A. Scacchi.* Rend. d. R. Acc. d. Sc., Napoli, 1842, N. 3, pag. 87; Idem, *Lezioni di Geologia,* Napoli, 1843, pag. 153 e seg.

[5]) Scacchi A., *Notizie preliminari intorno ai proietti vulcanici del tufo di Nocera e di Sarno.* Transunti d. R. Acc. dei Lincei, serie 3ª, vol. V, giugno 1881; Idem, *Breve notizia dei vulcani fluoriferi della Campania.* Rend. d. R. Acc. d. Sc. fis. e mat. di Napoli, ottobre 1882.

[6]) Scacchi A., *La regione vulcanica fluorifera della Campania.* Atti d. R. Acc. d. Sc. fis. e mat. di Napoli, vol. II, serie 2ª, N. 2, Napoli, 1885.

priamente di quello del Salernitano, dapprima [1]) sostenendo che il tufo derivi dalla conflagrazione vesuviana del 79 e più tardi [2]) ammettendo che esso provenga per la massima parte dai Campi Flegrei, secondo le note prime idee di Scacchi, e pel resto dal M. Somma e dal Vesuvio. Egli ritiene che i proiett fluoriferi siano derivati come tali dal Somma e dal Vesuvio, e dimostra con l'analisi chimica che la composizione dei tufi del Salernitano è analoga a quella dei Campi Flegrei.

Il Dott. Johnston-Lavis [3]) dice che il tufo campano è dovuto ad una gigantesca eruzione esplosiva di una polvere trachitica grigia e di frammenti di scorie nere. Questa eruzione sarebbe avvenuta, assieme a quella del piperno, da un cratere situato a breve distanza dai Camaldoli e a Sud-Ovest di essi.

Il Prof. Deecke [4]) crede che il tufo campano derivi dalla polverizzazione di un magma trachitico dovuto ad una eruzione molto violenta, probabilmente sottomarina. Sostiene che la bocca vulcanica che ha dato origine al tufo trovasi nei Campi Flegrei ed è quella stessa da cui sono derivati il piperno e la breccia museo di Soccavo; che l'eruzione del tufo campano ha preceduto quella del tufo giallo; che i ciottoli calcarei inclusi nel tufo giallo (si intenda il tufo giallo compatto) provengono dalle alture circostanti, e che le geodi fluorifere sono in parte lapilli decomposti. Naturalmente egli non ammette le numerose e indipendenti eruzioni fangose dello Scacchi.

Gaetano Tenore [5]) segue completamente le idee espresse da A. Scacchi nelle *Memorie geologiche.*

Pasquale Franco [6]), in un lavoro intitolato: *Il tufo della Campania*, esamina l'argomento da tutti i lati, descrive l'aspetto e la tessitura della roccia in questione, ne riporta la composizione mineralogica, intrattenendosi sulla sua natura, giacitura ed origine. Pone fuori dubbio che il tufo campano sia tufo e non lava, e lo ritiene di origine subaerea.

Il Prof. De Lorenzo [7]) è d'accordo con quelli che fanno derivare il tufo campano dai Campi Flegrei, e crede, come Johnston-Lavis e Deecke, che uno dei focolari principali sia stata la regione che si trova alla base dei Camaldoli. Egli dice che il tufo campano rappresenta il prodotto di ammassamento e di consolidazione non solo di materiali detritici eruttivi trasportati da correnti aeree e forse anche marine lontano dai focolari originarii e deposti nel sito in cui ora si trovano, ma anche di quelli che da correnti acquee furono poi lavati dalle cime dei monti e ammassati nelle valli. Aggiunge che i materiali detritici che costituirono poi questo tufo

---

[1]) Ricciardi L., *Ricerche chimiche sui depositi di tufi vulcanici nella provincia di Salerno.* Atti d. Acc. Gioenia di Sc. Nat. in Catania, serie 3ª, vol. XVI, 1882.

[2]) Ricciardi L., *I tufi vulcanici del Napolitano.* Atti d. Acc. Gioenia di Sc. Nat. in Catania, serie 3ª, vol. XVIII, 1884.

[3]) Johnston-Lavis H. J., *The South Italian Volcanoes,* Napoli, 1891, pag. 48.

[4]) Deecke W., *Zur Geologie von Unteritalien, 3, Der sog. campanische Tuff.* Neues Jahrb. f. Min. etc., 1891, II.

[5]) Tenore G., *Il tufo vulcanico della Campania e le sue applicazioni alle costruzioni.* Boll. del Collegio degli Ingegneri e Architetti in Napoli, anno X, N. 5-8, 1891.

[6]) Franco P., *Il tufo della Campania.* Boll. d. Soc. di Naturalisti in Napoli, vol. XIV, 1900.

[7]) De Lorenzo G., *L'attività vulcanica nei Campi Flegrei.* Rend. d. R. Acc. d. Sc. fis. e mat. di Napoli, 1904.

dovevano essere ricchi di acidi di fluoro, cloro e solfo, in modo che, con l'aiuto dell'acqua, agirono sui calcari a cui si appoggiarono e sui blocchi calcarei che in essi vennero a trovarsi inglobati, metamorfosandoli potentemente e trasformandoli così in blocchi fluoriferi. Riguardo all'età del tufo campano il De Lorenzo crede che esso rappresenti il primo prodotto eruttivo dei Campi Flegrei.

Infine anche Galdieri [1]) in un recente lavoro dà qualche cenno sul tufo campano. Egli ritiene che questo appartenga all'età postwurmiana, perchè lo ha trovato sulla superficie già erosa di terrazze da lui attribuite all'età wurmiana.

Ciò che abbiamo detto finora si riferisce al tufo campano in generale. Quanto al tufo di Vico Equense in particolare scarse sono le osservazioni fatte.

Il Breislak [2]) ne parla brevemente, e crede che in origine esso costituisse una lava.

A. Scacchi nell'opera citata sui *vulcani fluoriferi* dice che poco più di un chilometro prima di arrivare a Vico Equense, muovendo da Castellammare, a sinistra, in tagli della roccia si vedono depositi di tufo bruno giallastro. Aggiunge che un vasto deposito di tufo nericcio si trova sulla marina nella località detta Pietre Piane. Fa notare che il tufo ha caratteri molto variabili: ora è bigio-nericcio, ora giallastro, rosso o violetto; talvolta è compattissimo, talvolta fragile e incoerente. Vi si trovano scorie nere che raggiungono talora un diametro di 12 cm., abbondanti geodi fluorifere e brandelli di rocce, duri, angolosi, che egli ritiene siano stati divelti da antiche lave.

Ricordato così sommariamente quanto hanno detto gli Autori intorno al tufo campano in generale e a quello di Vico in particolare, passeremo ad esporre il risultato delle ricerche da noi fatte su quest'ultimo. Parleremo dapprima dell'estensione del tufo, quindi della sua giacitura in rapporto agli altri materiali vulcanici e alle rocce sedimentarie, indicando il suo spessore nei diversi punti. Dopo ciò descriveremo il tufo, faremo qualche breve considerazione sulla sua origine, e termineremo dicendo qualche cosa sulla sua età.

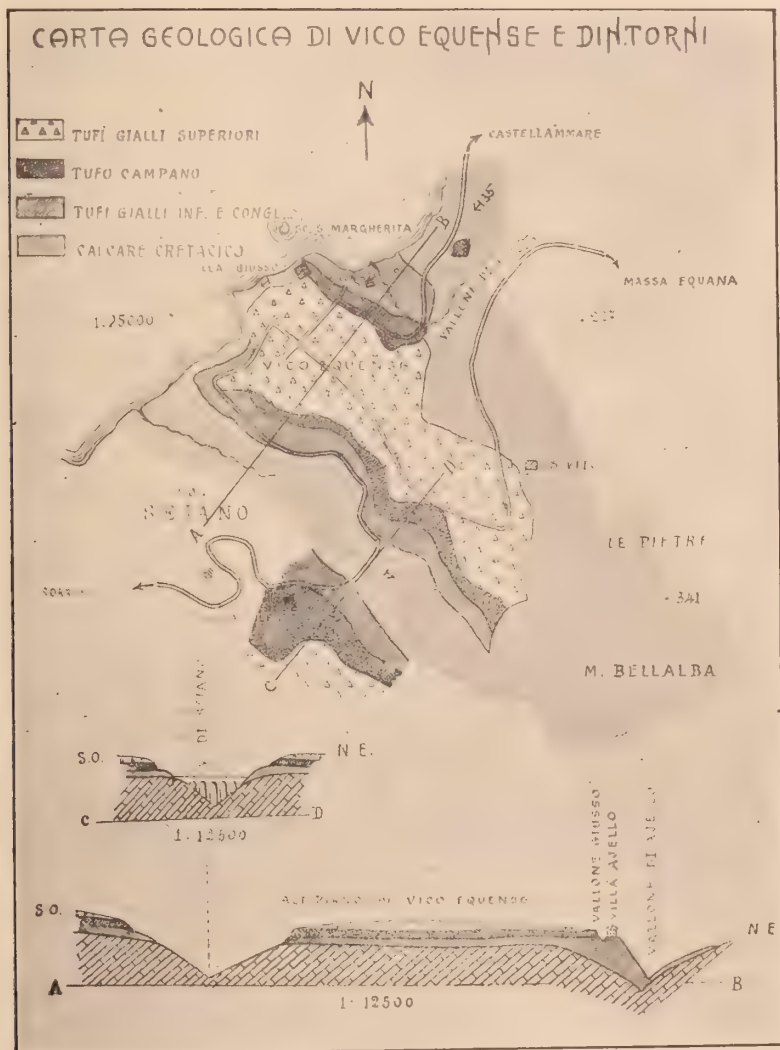
ESTENSIONE DEL TUFO CAMPANO DI VICO EQUENSE

Vico Equense sorge su un altipiano che da Sud-Est, cioè dalle falde delle alture di M. Bellalba, va declinando gradatamente verso Nord-Ovest, ove termina a picco sul mare. Lungo il lato Nord-Est questo altipiano è limitato dal vallone detto di Aiello; lungo l'altro lato, cioè a Sud-Ovest, esso è limitato da un vallone più importante, detto vallone di Sejano, il quale divide quest'ultimo paese da Vico Equense.

Lungo il lato Nord-Est il tufo campano comincia ad affiorare in corrispondenza del vallone di Aiello, sul fianco sinistro di questo, alla quota di 73 metri (fig. 1 della tav.). Da questo punto esso si prolunga verso Nord-Ovest, sotto la rotabile che dal ponte conduce alle prime case di Vico, quindi si continua sotto la stradicciuola che porta al castello del conte Giusso, e termina sotto il castello medesimo. Quivi il suo livello inferiore si trova a 67 metri (fig. 2 della tav.).

[1]) Galdieri A., *Le terrazze orografiche dell'alto Picentino.* Boll. d. Soc. geol. it., vol. XXIV, 1910.

[2]) Breislak S., opera citata.

Nel lato Sud Ovest dell'altipiano il tufo affiora a sinistra della strada rotabile Vico-Sejano, immediatamente a monte del ponticello che si trova subito dopo la prima curva che fa la rotabile ora nominata. Quivi esso s'incontra alla quota di 75 metri. Da questo punto il tufo continua quasi ininterrottamente lungo il margine sinistro dell'altipiano, nella direzione Sud-Est, fino alla quota di 140 metri, ad Ovest del M. Bellalba. A questo punto termina per lasciare il posto al nudo calcare a rudiste.

Sono questi i luoghi nei quali il tufo affiora. Inoltre negli scavi abbastanza profondi che sono stati fatti e si vanno facendo nell'altipiano su cui sorge Vico Equense, sia per porre i fondamenti a nuovi edificii, sia per fare pozzi o cisterne, si è rinvenuto spessissimo tufo campano. Così, per esempio, nella proprietà Manniello, a Nord della piazza di Vico, approfittando dei lavori in corso per la costruzione di una casa, abbiamo potuto constatare che ad una profondità di circa 9 metri si trova

tufo, il quale ha uno spessore di 4 metri [1]. Pure tufo è stato rinvenuto ad Est della piazzetta situata a Sud-Est della piazza principale di Vico, ad una profondità che non abbiamo potuto determinare con certezza.

Inoltre, sempre nel sopra detto altipiano, si trovano qua e là parecchie tufare delle quali riparleremo in seguito.

Questi fatti ci autorizzano a ritenere che l'altipiano di Vico presenta a poca profondità un deposito di tufo campano di cui quello che affiora nelle sezioni naturali da noi rilevate lungo i due valloni sopra nominati costituisce i margini. Il giacimento di tufo così delimitato è quello che abbiamo specialmente studiato nel presente lavoro.

Esso però non deve ritenersi isolato, ma più o meno direttamente collegato ad altri giacimenti, che si trovano, taluno ad altezze quasi uguali, a Nord-Est, a Sud-Est e a Sud-Ovest. Infatti a Nord-Est si incontra tufo campano lungo la strada rotabile Castellammare-Vico Equense, a sinistra e circa a mezzo chilometro prima di arrivare al ponte di Aiello. Ivi esso si trova in una vallecola scavata nel calcare; appoggia su una base molto inclinata e ha uno spessore di circa 4 metri. Questo deposito sfuggì allo Scacchi, il quale osservò solo i tufi gialli su cui esso poggia.

A Sud Est si incontra il potente deposito di Pacognano citato dal Puggaard [2]) e descritto da Scacchi nell'opera citata sui vulcani fluoriferi.

A Sud-Ovest si trova tufo: nella villa Cilento, presso la spalla sinistra del ponte di Sejano; ad Ovest della via Fornacella (che si stacca dalla rotabile Vico-Sejano partendo dalla sinistra di questa e dirigendosi verso Sud); e negli orti di Sejano fino alla falesia, ad una quota di circa 60 metri.

Tutti questi giacimenti di tufo hanno rapporti più o meno stretti con quelli che costituiscono il deposito di Vico Equense, e taluno di essi deve forse aver formato con questo, in epoche lontane, un deposito unico.

STRATIGRAFIA DI VICO EQUENSE

Studiando il deposito di tufo campano di Vico Equense abbiamo trovato alcune sezioni naturali ed altre artificiali che ci hanno permesso di rilevare la giacitura e di determinare lo spessore del tufo medesimo. In pari tempo abbiamo così potuto confermare lo smembramento dei tufi vulcanici della Campania, già tentato da uno di noi [3]); argomento interessante, perchè prima non si avevano che scarse ed imprecise conoscenze sia intorno ai tufi vulcanici inferiori a quello pipernoide, che perciò veniva invece, in generale, a torto ritenuto sottostante a tutti gli altri, sia

[1]) Ringraziamo vivamente coloro che ci hanno facilitato questo studio, sia permettendoci di visitare i loro orti o giardini, sia dandoci delle indicazioni, come il Prof. Savastano, il Sacerdote D. Manniello di Vico Equense e il capomastro Aniello Esposito, pure di Vico; dobbiamo però notare che in parecchi fondi non ci fu permesso di entrare: motivo per il quale non possiamo, come avremmo voluto, fornire maggiori dati di fatto sulla presenza del tufo pipernoide nel sottosuolo dell'altipiano di Vico.

[2]) Puggaard C., *Notices sur les calcaires plutonisés de la péninsule de Sorrento.* Bull. de la Soc. géol. de France, 1859-60, pag. 93.

[3]) Galdieri A., *Le terrazze dell'alto Picentino.* Boll. Soc. geol. it., XXIX, 1910; Galdieri A. in Kranz W., *Vulkanismus und Tektonik im Becken von Neapel.* Petermanns geog. Mitteilungen, 1912, pag. 260.

intorno alle formazioni quaternarie sulle quali si appoggiano per solito i tufi vulcanici della Campania.

Il tufo pipernoide a Vico Equense riposa su tufi gialli incoerenti, ed è ricoperto da altri tufi, pure gialli e incoerenti. I tufi gialli inferiori alla loro volta riposano ora direttamente sul calcare, ora su banchi di conglomerato. Per cui, procedendo dall'alto al basso, a Vico Equense si ha la seguente serie stratigrafica:

1. Tufi gialli superiori,
2. Tufo pipernoide,
3. Tufi gialli inferiori,
4. Conglomerati,
5. Calcare.

Questa successione si osserva frammentariamente in parecchi punti, per esempio: ad un centinaio di metri a Nord-Ovest del ponte di Sejano, dove si hanno calcare e conglomerati (fig. 3 della tav.); di fronte alla spalla destra dello stesso ponte, dove si vedono conglomerati puri, conglomerati alternati con tufi gialli inferiori e tufi gialli inferiori schietti; sotto la villa Cilento, dove la serie ora descritta si completa in alto con il tufo campano ed i tufi gialli superiori.

Daremo prima qualche cenno sulle rocce che accompagnano il tufo campano, e poi ci intratterremo brevemente su quest'ultimo.

Calcare. Il calcare costituisce la base dell'altipiano di Vico Equense; esso affiora lungo tutto il fondo del vallone di Sejano, e forma quasi da solo l'intera falesia con la quale termina, verso il mare, l'altipiano. Di calcare risultano anche i monti che limitano l'altipiano ad Oriente. Questo calcare presenta avanzi indeterminabili di rudiste, ed è con molta probabilità la continuazione di quello che, poco più a Nord, ha fornito la nota ittiofauna di Capo d'Orlando, probabilmente cenomaniana. Com'è noto, i calcari della Penisola sorrentina pendono in generale verso N.O., cioè verso il centro del bacino di Napoli. Però appunto nel blocco di Vico Equense si trovano notevoli eccezioni. Così nelle alture a N.E. dell'altipiano di Vico, a S. Maria, a Bonea e a S. Andrea, e lungo la falesia anzidetta gli strati pendono di 20°-35° verso S.O., e nel vallone di Sejano, a monte del ponte, pendono di altrettanto verso S.E. Ma si tratta di piccoli disturbi locali, e già a poca distanza tutt'intorno: a S. Salvatore, a Patierno, a Ticciano, alla Sellarola, a Pacognano, a Fornacella, a Petrignano gli strati ripigliano la solita pendenza, tra 15° e 40°, verso N.O.

Conglomerati. Sono per lo più in grossi banchi, e risultano di ciottoli variamente arrotondati, mai a piastrella, costituiti dalle stesse varietà di calcare che affiorano più a monte e più o meno fortemente cementati. Inferiormente, e talora anche superiormente, al di sotto dei tufi, questi materiali alluvionali presentano a volte dei lembi di terra rossa analoga a quella che Galdieri ha trovato fra i conglomerati terrazziali ed i tufi pipernoidi nelle terrazze dell'alto Picentino, nelle valli della Sòrdina, del Grancano (Salernitano), dell'alto Sabato ed altrove. La superficie di erosione sulla quale poggiano il conglomerato e, qua e là, la terra rossa presenta ancora chiaramente i caratteri morfologici del letto di un corso d'acqua, e talvolta mostra dei bellissimi *Strudellöcher:* se ne vedono per es. a Sud di Vico, presso il ponte di Sejano. Superiormente i detti conglomerati, che vanno senza dubbio ascritti al Quaternario, si alternano coi banchi più profondi dei tufi gialli inferiori.

Tufi gialli inferiori. I tufi gialli inferiori sono costituiti da banchi di lapilli, pomici, pozzolana e ceneri più o meno alterate. I banchi hanno uno spessore vario, qualche volta perfino di alcuni metri. Una bella sezione naturale di questi tufi si osserva lungo la strada carrozzabile tra Vico e Sejano, prima di giungere al ponte di Sejano (fig. 4 della tav.). Un'altra se ne vede al disotto del castello del conte Giusso. Quest'ultima si continua, attraverso il vallone omonimo, nel piccolo sperone che si trova tra questo vallone e quello di Aiello e su cui sorge la villa Aiello.

In molti punti, come: sotto il castello Giusso; lungo il valloncello che scende da Le Pietre; lungo la strada rotabile Castellammare-Vico Equense; nella tufara detta *Grotta del prete*, ed in altri luoghi, i tufi gialli inferiori presentano in alto, quasi immediatamente al di sotto del tufo pipernoide, uno strato, spesso da 15 a 30 cm., di cenere vulcanica di natura chiaramente vetrosa, per solito pochissimo alterata, mista a qualche pomice.

Questa speciale pozzolana era già stata notata da Galdieri nell'alta e nella bassa valle del Sabato, in quelle del Grancano e della Sòrdina (nel Salernitano) ed altrove, spesso associata a pomici chiare, leggerissime, straordinariamente bollose, talora a pareti dei vacuoli esilissime, e paragonabili meglio che le ordinarie pomici ad una spuma solidificata. Evidentemente sia la cenere che le pomici anzidette derivarono da un magma fluidissimo e ricchissimo di gas, la cui esplosione precedette di poco quella del magma pipernino. Questo strato, di natura dunque sempre nettamente vetrosa, ora prevalentemente pumiceo, ora prevalentemente sabbioso, in grazie della sua costante posizione, quasi immediatamente al di sotto del tufo pipernoide (quando sono entrambi presenti), potrà servire alla suddivisione dei tufi nei luoghi ove quello pipernoide manca.

Sotto il castello Giusso, tra la pozzolana vetrosa, là un poco alterata superficialmente, ed il soprastante tufo campano, abbiamo notato uno straterello di lapillo assai scuro, di spessore variabile. Anche questo straterello trova molto spesso il suo equivalente negli altri depositi di tufi vulcanici della Campania in un sottilissimo straterello di sabbia nerastra, pesante, racchiuso fra le base del tufo pipernoide e lo strato di pomici leggerissime o di pozzolana vetrosa dianzi menzionato. Talvolta esso si riduce ad un po' di sabbia scura sparsa tra le pomici chiare più alte, al contatto col tufo pipernoide.

Questi tufi gialli inferiori, per il fatto stesso che sottostanno al tufo pipernoide, il quale, come risulta dagli studii di Johnston-Lavis, Deecke e De Lorenzo, è da sincronizzarsi al piperno, devono ritenersi corrispondenti per età ed origine alle formazioni vulcaniche flegree sottostanti al piperno; e quindi, per una parte, corrispondono anche, fra l'altro, al tufo verde d'Ischia ed alle più antiche lave di quell'isola.

Tufi gialli superiori. Anche i tufi gialli superiori risultano di banchi di lapilli, pomici, sabbie e ceneri, per solito però meno alterate di quelle sottostanti al tufo campano. Superiormente essi passano a terreno vegetale. Parlando dell'estensione del tufo campano, abbiamo detto che esso, lungo il margine Sud-Ovest dell'altipiano di Vico, affiora come una striscia quasi continua in direzione N.O.-S.E. dalla quota di 75 metri alla quota di 140 metri. Dobbiamo ora aggiungere che le poche e trascurabili interruzioni sono dovute al fatto che in corrispondenza di esse il tufo giallo supe-

riore ricopre in discordanza il tufo campano sottostante croso ed i tufi gialli inferiori. Abbiamo potuto osservare ciò in due sezioni naturali, che si trovano a S.O. di Vico: l'una nella proprietà Guidone e l'altra nella proprietà Tobiosi.

Questi tufi gialli superiori, analogamente a quanto abbiamo detto a proposito di quelli inferiori, sono da ritenersi equivalenti alla breccia museo, ai tufi gialli ed ai tufi grigi dei Campi Flegrei: cioè, in generale a tutti i prodotti vulcanici che si sono avuti nella nostra regione dopo l'emissione del piperno.

Come abbiamo già detto, il tufo giallo superiore, con la sua parte più elevata, costituisce il terreno vegetale. Questo ha proprietà fisiche e chimiche favorevolissime allo sviluppo delle piante; anzi è principalmente a questi tufi vulcanici che la Penisola sorrentina, come del resto tutta la Campania, deve la sua straordinaria fertilità. Infatti alla costituzione dei tufi gialli superiori della superficie contribuiscono anche materiali di origine vesuviana, perchè, come si sa, le ultime eruzioni dei vulcani flegrei si sono alternate con quelle del Vesuvio; ed è nota la eccezionale fertilità dei tufi vesuviani, notevolmente superiore a quella dei tufi flegrei. Ne risulta dunque un terreno agrario tra i più feraci. Tale terreno, di natura prevalentemente sabbiosa, ma per altro leggermente argilloso, è per solito poverissimo di scheletro, risultando quasi interamente di terra fina, è ricco di potassa, è ben fornito di fosforo, è mediocremente sciolto, poroso, permeabile, facilmente aerabile; offre pochissima resistenza agli strumenti agricoli e migliora straordinariamente con le abbondanti concimazioni. Esso è perciò diligentemente sfruttato, e costituisce, non ostante la sua scarsa estensione, coltivato sopratutto ad agrumeto, una delle principali risorse di quell'amena contrada.

Tufo campano. Il tufo campano di Vico Equense è della stessa natura ed ha la stessa origine di quello degli altri depositi della Campania. Anche i suoi caratteri sono perciò simili a quelli dei tufi pipernoidi comuni. Infatti anch'esso presenta la nota configurazione in grossi prismoidi (fig. 1 della tav.), ed è costituito da una massa fondamentale in cui si trovano incluse scorie, pomici, geodi fluorifere, lapilli e cristalli di minerali diversi.

La massa fondamentale ha varia compattezza: per solito è molto compatta, tanto da somigliare talvolta al piperno, specialmente nella parte inferiore dei depositi, mentre nella parte superiore di questi è non di rado facilmente disgregabile. Il suo calore è generalmente grigio-bruno, ma talora, in seguito a diversi processi di alterazione, è anche violaceo, rossastro, o gialliccio.

Nella massa fondamentale si trovano, come ho detto, parecchie inclusioni: prima di tutto sono da notare le scorie di colore bruno-nero, di natura vetrosa, a volte con *Peleés hairs*, e di grandezza molto variabile; ve ne sono alcune di pochi mm. di diametro, mentre altre giungono a 20 e anche a 30 centimetri. Sotto il castello Giusso ne abbiamo veduta una che misurava appunto 30 centimetri di lunghezza e 15 di larghezza. Le più piccole si trovano nei tufi più compatti; le più grosse nei tufi meno coerenti.

Le geodi fluorifere in qualche punto, come per es., nel tufo che si trova sotto la villa Cilento, sono abbondanti, in qualche altro luogo sono scarse, e talora sembra che manchino completamente. Non raramente si presentano come cavità tappezzate da una sostanza biancastra o bianco-gialliccia più o meno alterata; la loro grandezza

oscilla da quella di una nocciuola a quella di un uovo di gallina. Secondo lo Scacchi queste geodi derivano da frammenti di rocce sedimentarie e più specialmente da frammenti di calcare, espulsi anch'essi dagli spiragli eruttivi che avrebbero dato origine al tufo, e metamorfosati in seguito per l'azione dell'acido fluosilicico. Ma si ammette dai più che i detti ciottoli calcarei derivino dai monti circostanti e siano stati rotolati dall'acqua insieme con gli elementi del tufo. Ed anche noi siamo di questo parere, avendo fra l'altro osservato che essi hanno per solito la forma rotondeggiante o almeno gli spigoli arrotondati come i ciottoli, e che abbondano specialmente là dove anche ora se ne trovano sia nei tufi soprastanti sia nei pendii a monte di essi.

I lapilli sono di varia grandezza, più o meno numerosi nei diversi luoghi e per solito sparsi irregolarmente nella massa fondamentale; però talora, per es. sotto il castello Giusso, formano anche, come abbiamo detto sopra, uno strato continuo, di spessore assai veriabile, tra il tufo campano e la cenere vulcanica di natura vetrosa sottostante.

Infine nella massa fondamentale si trovano pomici per lo più scure, cristalli di sanidino, di augite e talvolta laminette di biotite.

Lo spessore del tufo di Vico Equense è molto vario; generalmente esso va aumentando mano a mano che dal mare si sale verso i monti. Così sotto il castello del conte Giusso, che è prossimo al mare, il tufo ha la potenza di circa 4 metri; lo stesso spessore si riscontra a poca distanza, nel sottosuolo di Vico, nella proprietà Manniello sopra nominata. Più a monte invece, verso il ponte di Aiello, esso supera già i sei metri. Nella tufara detta *Grotta del prete*, che si trova ancora più a monte, alla quota di 85 metri, la potenza del tufo è di metri 12, e nella tufara Parascandolo, situata alla quota di 130 metri, alle falde di M. Bellalba, è di 26 metri. A Pacognano infine, che si trova in luogo più elevato di Vico, alla base di monti anche più alti, il tufo ha uno spessore ancora maggiore.

ORIGINE ED ETÀ DEL TUFO CAMPANO

Riferendo ciò che i diversi autori hanno scritto sul tufo campano abbiamo già accennato alle diverse ipotesi fatte per spiegarne l'origine. Le stesse ipotesi valgono naturalmente anche per il tufo di Vico Equense; ricordiamole ed esaminiamole brevemente.

Esse possono ridursi alle seguenti:

1.ª Natura lavica ed origine sottomarina del tufo (Breislak).

2.ª Provenienza del tufo dai vulcani di Roccamonfina (Pilla e Abich).

3.ª Provenienza dai vulcani flegrei in seguito ad eruzioni subaeree (1ª ipotesi di A. Scacchi).

4.ª Eruzioni fangose numerose e indipendenti (2ª ipotesi di Scacchi).

5.ª Provenienza da un punto determinato dei Campi Flegrei situato alla base dei Camaldoli (Lavis, Deecke, De Lorenzo).

1.ª ipotesi: natura lavica ed origine sottomarina del tufo. Oggi veramente non v'è più alcuno che sostenga la natura lavica del tufo campano. Noi addurremo ancora tuttavia molte e valide ragioni contro tale ipotesi. Prima di tutto esso ha tutti

i caratteri dei tufi; è poroso e leggiero, ma mai bolloso; ingloba pomici e lapilli senza mostrare intorno a questi struttura fluidale, e si trova disposto in banchi. Inoltre se fosse stato emesso allo stato di lava, esso avrebbe determinato alterazioni nei tufi sottostanti, dovrebbe presentare una superficie scoriacea superiore ed una inferiore e uno spessore maggiore verso le parti più declivi che alle falde dei monti. Questi caratteri e queste condizioni invece non si verificano mai. Infine, se si trattasse di lava, essendo i depositi di questa roccia numerosi e sparsi per tutta la Campania, si dovrebbero trovare qualche volta i crateri o i residui di crateri da cui la lava sarebbe dovuta uscire. Invece di crateri non si è mai trovata alcuna traccia.

Per tutti questi motivi il tufo pipernoide è da ritenersi un vero tufo. Senza dubbio sorprende il fatto che esso è compatto, mentre non solo i tufi gialli soprastanti, ma anche quelli sottostanti sono incoerenti. Ciò però si spiega ammettendo che, fin dall'epoca in cui cadevano, i materiali vulcanici che poi formarono il tufo campano fossero suscettibili di potersi consolidare, a differenza degli altri. È noto infatti che da uno stesso vulcano possono essere emessi prodotti incoerenti capaci di cementarsi e consolidarsi e prodotti privi di questa proprietà. D'altra parte in parecchi luoghi si trova tufo campano pochissimo coerente e avvicinantesi molto, per questo carattere, ai tufi gialli incoerenti che lo comprendono.

Riguardo all'origine sottomarina del tufo pipernoide essa non è facilmente accettabile, perchè bisognerebbe ammettere che, durante l'epoca in cui si depositava, il mare ricoprisse quei luoghi nei quali ora il tufo si trova. E siccome se ne incontra fino a 600 metri (per es., a Calvanico, nel Salernitano), e poichè da noi il mare ha lasciato simili altezze in epoca lontanissima, così il tufo dovrebbe necessariamente supporsi assai più antico di quello che è realmente. Un altro fatto, che, se non basta da solo a fare escludere l'origine sottomarina del tufo pipernoide, fa però dubitare di essa, è la assoluta mancanza nel tufo ed alla sua base di fossili marini.

2.ª ipotesi: provenienza del tufo dai vulcani di Roccamonfina. A questa ipotesi si può fra l'altro obbiettare che nel tufo mancano i cristalli di leucite caratteristici dei prodotti di Roccamonfina, e che questi ultimi sono più antichi di quelli che costituiscono il tufo campano. Ciò è dimostrato dal fatto che esso, là dove è associato ai conglomerati di Roccamonfina, appare quasi sempre sovrapposto a questi ultimi.

3.ª ipotesi: provenienza del tufo pipernoide dai Campi Flegrei in generale. Fu ammessa dallo Scacchi nelle sue prime pubblicazioni, poichè nel tufo pipernoide trovò quasi costantemente granelli o cristalli interi di sanidino, che sono propri dei prodotti dei Campi Flegrei, mentre non vi rinvenne cristalli di leucite. Questa ipotesi, come vedremo tra poco, è quella che in fondo oggi è accettata dalla maggior parte dei geologi.

4.ª ipotesi: eruzioni fangose indipendenti. Questa ipotesi, sostenuta dallo Scacchi negli ultimi anni della sua vita, non è accettabile per le seguenti ragioni:

a) per la somiglianza straordinaria del materiale in tutti i pretesi centri eruttivi.

b) per l'assenza assoluta di crateri e di apparati eruttivi di ogni genere.

c) perchè il tufo pipernoide si trova non solo in tutta la pianura campana ma anche nelle valli che sboccano in essa ed in altre da essa indipendenti, la maggior parte delle quali non sono valli di frattura, ma di erosione. Ciò è dimostrato dai residui di terrazze rilevati da Galdieri che esse presentano fino a notevole altezza.

5.ª *ipotesi:* eruzioni subaeree da un punto determinato dei Campi Flegrei, cioè dalla base dei Camaldoli (Lavis, Deecke, De Lorenzo). Questa ultima ipotesi è da considerarsi come la più probabile, perchè a favore di essa stanno i seguenti fatti:

a) l'analogia della composizione mineralogica e chimica del tufo campano con quella dei prodotti dei Campi Flegrei: la prima messa in evidenza da Scacchi e da Deecke, la seconda dal Ricciardi.

b) la giacitura, che dimostra che il tufo pipernoide è di origine prevalentemente eolica;

c) l'analogia di giacitura coi tufi soprastanti e sottostanti che sono certamente di origine eolica;

d) lo spessore del tufo campano, maggiore alle falde dei monti che vicino al mare; la qual cosa è dovuta al fatto che i depositi prossimi ai monti sono stati resi più potenti dal tufo trasportato in basso dall'acqua, mentre quelli più vicini al mare, giacenti in una regione più pianeggiante e più lontana dai monti, sono costituiti solamente dai materiali caduti in posto.

Ci rimane a dire qualche cosa sull'età del tufo campano. Si è ritenuto finora che le manifestazioni eruttive dei Campi Flegrei siano avvenute tra la fine del Pliocene e il principio del Plistocene. Però, se saranno confermati i recenti studii di Galdieri, bisognerà invece ritenere che esse siano molto meno antiche. Infatti dalle osservazioni di Galdieri risulta che i tufi pipernoidi si sono depositati anche sulle terrazze più recenti, già precedentemente erose, le quali apparterrebbero all'età wurmiana. Perciò i tufi pipernoidi, che occupano un posto notevole fra i tufi che ricoprono quelle terrazze, dovrebbero considerarsi postwurmiani.

Giunti così alla fine di questo modesto lavoro sentiamo il dovere di rivolgere vivi ringraziamenti al Prof. Bassani, che con la consueta gentilezza ha messo a nostra disposizione i mezzi necessari e si è efficacemente interessato alle nostre ricerche.

Napoli, Istituto Geologico della R. Università.

INDICE

finita di stampare il dì 29 Settembre 1913

1. – Affioramento del tufo campano nel Vallone d'Ajello.

2. – Altipiano di Vico Equense.

3. – Calcare e conglomerati a circa 100 m. a N. O. del ponte di Sejano.

4. – Tufi gialli inferiori tra Vico ed il ponte di Sejano.

DANESI - ROMA

Vol. XV, Serie 2.ª N.° 16.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

I MIEI INTEGRAFI PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI

MEMORIA

del socio ordinario **ERNESTO PASCAL**

presentata nell'adunanza del dì 5 luglio 1913

INTRODUZIONE

I matematici puri hanno avuto sinora, a mio parere, il torto di non rivolgere sufficiente attenzione agli apparecchi per l'esecuzione meccanica delle operazioni analitiche.

Essi hanno forse creduto che tali problemi non entrassero nell'ambito di quelli a cui deve rivolgersi la speculazione matematica, e che il loro studio dovesse lasciarsi ai pratici di professione. E così è avvenuto che, lasciate queste ricerche a coloro che o per le loro abitudini mentali o per la ristrettezza degli studii, o per la mancanza di quello spirito indagatore e generalizzatore che è proprio dei matematici puri, non sono i più adatti ad assurgere a dei principî generali, esse non hanno fatto quei progressi che avrebbero potuto conseguire.

L'antico integrafo di Abdank-Abakanowicz ideato più di quaranta anni fa, si è infatti diffuso per le scuole di matematica assai lentamente e assai meno di quanto si sarebbe dovuto aspettarsi; inoltre lasciato in mano ai pratici e agli ingegneri, questi non hanno saputo fare altro che modificarne al più i dettagli, e la perfezione del funzionamento, ma si son ben guardati dal modificarne i principii, e dall'ampliarne la portata, in modo da dedurne, come ho avuto la fortuna di fare io negli ultimi tempi, tutta una numerosa famiglia di apparecchi di cui esso può ben riguardarsi come il capostipite e coi quali possano eseguirsi operazioni analitiche di carattere più elevato e più complesso.

Eppure a me pare che questo campo, che può chiamarsi della *rappresentazione cinematica dei problemi analitici*, sia un campo ben degno d'essere coltivato e mietuto e che possa in molti casi irraggiare sui problemi dell'analisi una luce nuova, nello stesso modo col quale le rappresentazioni e le concezioni geometriche portano nuova luce su certe ricerche analitiche, al punto che oramai molte di queste non possono più intendersi senza di quelle.

Ogni operazione analitica ha sempre certamente per corrispondente una rappresentazione cinematica; qual'è questa rappresentazione? Ecco un problema che volta per volta gli analisti non dovrebbero più trascurare, e che potrebbe aprire orizzonti nuovi, facendo forse anche intravedere classificazioni di nuova specie.

Per le operazioni dell'analisi finita i congegni cinematici sono semplici in quanto al loro principio direttivo; ma per le operazioni dell'analisi infinitesimale (quadrature, equazioni differenziali) quei principii non bastano più, perchè mentre quelli sono fondati sulla *discontinuità*, qui invece bisogna introdurre un congegno che dia la *continuità*; e a ciò provvede la *rotella girante* che figura in tutti gli integrati. Ma questa rotella girante, come base di un congegno cinematico, non basta a sua volta più per quelle altre operazioni analitiche più elevate che sono rappresentate dalle risoluzioni delle equazioni integrali, giacchè con esso non può attuarsi cinematicamente quella specie di doppia continuità (la cosiddetta *eredità*) che il problema richiede; onde ne viene il problema: Quale dovrà essere la base del congegno cinematico che corrisponde al legame rappresentato dalle equazioni integrali?

Ho detto tutto ciò onde mostrare che lo studio dei problemi di cui parlo può anche assurgere ad avere una portata assai maggiore che non quella di costruire dei congegni aventi uno scopo puramente pratico, e che forse ben maggiore importanza, anche teorica, è ad essi destinata in avvenire.

In questa Memoria mi propongo di esporre la teoria di tutti i miei integrafi, tracciandone una trattazione ordinata e sistematica, completata poi a sua volta da nuove considerazioni e dalla descrizione di altri apparecchi, fra cui di uno per l'equazione lineare a coefficienti generali, e di un altro per l'integrazione dell'equazione di Riccati, che io feci già costruire in modello da alcuni anni, ma che non ancora ho pubblicato.

Gli apparecchi descritti in questo lavoro sono stati, in massima parte, già da tempo costruiti, sulle mie indicazioni, dal valente meccanico del R. Osservatorio astronomico di Capodimonte Sig. Pasquale Moreno, e funzionano egregiamente.

Essi sono tutti conservati nel mio *Gabinetto di Analisi Superiore* della R. Università di Napoli, e di qualcuno di essi sono state fatte anche varie riproduzioni per conto delle Università e delle Scuole di Torino (*Gabinetto di Geometria pratica del R. Politecnico*), Genova (*R. Scuola Navale Superiore*), Padova (*Gabinetto di Geometria Superiore della R. Università*), Roma (*Gabinetto di Fisica Matematica della R. Università*), Palermo (*Gabinetto di Geodesia della R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri, e di Calcolo infinitesimale della R. Università*), e dei *Gabinetti di Meccanica razionale e di Calcolo infinitesimale* dell'Università di Napoli.

Essi hanno trovato già posto in monografie e libri stranieri; se ne occupò Fr. A. Willers nella Nota: *Zum Integrator von E. Pascal* (Zeitschrift für Math. und Physik, Bd. 59, 1911) e se ne discorre ampiamente in apposito capitolo nel recente volume del Prof. A. Galle: *Mathematische Instrumente*, Leipzig, Teubner, 1913.

E ricorderò infine che uno di questi miei apparecchi fu anche esposto fra gli oggetti del Gruppo II (Classi 9, 10, 11) dell'*Esposizione internazionale di Torino del 1911*, e vi conseguì *il diploma di onore*.

PARTE I.

INTEGRAFI CARTESIANI

§ 1. — *Preliminari e classificazione.*

Una prima distinzione che ci si presenta è quella che risulta dal diverso sistema di coordinate cui vogliamo riferire la curva integrale dell'equazione differenziale, e cioè dal diverso modo col quale vogliamo interpretare le variabili che compaiono nell'equazione medesima. Se queste si interpretano come coordinate cartesiane rettangolari di un punto del piano, gli apparecchi corrispondenti possono chiamarsi *integrafi cartesiani*; se invece esse sono interpretate come coordinate polari, i corrispondenti apparecchi sono gli *integrafi polari*. Tratteremo prima degli uni e poi degli altri.

La figura schematica di quasi tutti gli integrafi cartesiani di cui vogliamo trattare è sostanzialmente costituita da un robusto rettangolo ABCD di ottone e acciaio poggiato su due pesanti ruote eguali, e sostenuto poi da un terzo punto di appoggio rappresentato da una piccola rotella di acciaio a margini acuminati (*la rotella girante*) che, congiunta al rettangolo mediante un carrello mobile, può mutare a piacimento la orientazione del suo piano.

Mediante le due ruote il rettangolo ABCD può muoversi sul foglio orizzontale da disegno da sinistra verso destra e viceversa, parallelamente a sè stesso. Due dei lati AC, BD del rettangolo (quelli che durante il movimento scorrono su sè stessi) rappresentano la direzione dell'asse cartesiano delle x, gli altri AB, CD, la direzione dell'asse delle y.

Al lato CD (quello verso destra) del rettangolo sia adattata una rotaia rettilinea sulla quale scorra un carrello (*il carrello differenziale*) che porti una punta verso il foglio di disegno, e un manubrio col quale se ne possa dirigere il movimento.

All'altro lato AB (quello a sinistra) è adattata un'altra rotaia, la quale però potrà anche non essere rettilinea e non seguire il lato AB, ma essere piegata a curva secondo una determinata forma, e su essa scorra un altro carrello (*il carrello integrale*) che poggia sul foglio orizzontale mediante la *rotella girante.*

I perni dei due carrelli sono poi riuniti fra loro con un congegno variabile nei modi più diversi in dipendenza della forma dell'equazione differenziale che vuole integrarsi o dell'operazione analitica che vuole eseguirsi, congegno che serve a fare in modo che la direzione del piano della rotella girante sia costantemente secondo quella della tangente alla curva integrale che deve tracciarsi.

Questa figura schematica subisce solo una modificazione per quel tipo di integrafo che chiamerò a *vettore costante*, in cui resta abolito il carrello differenziale; ma di ciò diremo in seguito.

Ciò posto, un'altra distinzione che ci si presenta è naturalmente la seguente: la rotaia a sinistra sulla quale scorre il carrello integrale può essere rettilinea e nella direzione del lato AB, ovvero no. Nel primo caso avremo gli integrafi che diremo *a guida rettilinea,* e nel secondo quelli che diremo *a guida curvilinea.*

Secondo poi la diversa natura del congegno che lega il movimento del carrello differenziale a quello del carrello integrale, abbiamo le più diverse specie di integrafi.

Gli *integrafi cartesiani* restano così distinti nelle seguenti classi e sottoclassi:

A — Integrafi a guida rettilinea.

a) integrafi a riga curvilinea (fra questi è da notarsi quello relativo ad una forma canonica dell'*equazione di Riccati*);

b) integrafi a riga rettilinea (fra questi v'è quello relativo ad una forma canonica dell'*equazione lineare*);

c) integrafi a perno fisso (caso particolare di questi è l'integrafo per quadrature di Abdank-Abakanowicz);

d) integrafo a due perni fissi (con questo si può integrare un'altra forma canonica dell'*equazione di Riccati*);

e) integrafi a perno mobile (fra questi sono specialmente interessanti quello relativo all'*equazione dell'odografo relativo al movimento dei proiettili in un mezzo comunque resistente,* e quello col quale può ottenersi la risoluzione di *un'equazione integrale del tipo di Volterra*);

f) integrafo a vettore costante (è una trasformazione del cosiddetto *planimetro a scure*).

B — Integrafi a guida curvilinea (con questi possono integrarsi, fra altre, le equazioni differenziali del tipo $ay' = Q(x + \varphi(y))$, e quelle più generali del tipo $y' = Q(x + \varphi(y))F(x)$, fra le quali si presenta di nuovo quella dell'odografo relativo al movimento dei proiettili.

Dei particolari di tutti questi integrafi e delle principali loro applicazioni a numerosi problemi di analisi, tratteremo con molti particolari nei seguenti paragrafi.

§ 2. — *Integrafi a riga curvilinea. Equazioni differenziali del tipo* $y' = \Phi(Q(x) - y)$ *).

I perni dei due carrelli, il differenziale e l'integrale, sieno congiunti da una riga piegata a curva, e in maniera che la deviazione di questa riga porti con sè quella del piano della *rotella girante.*

Ciò può ottenersi in due modi: *a)* o si fa che la riga sia girevole per un suo punto fisso intorno al perno del carrello differenziale, *b)* o che invece essa sia rigidamente connessa, per un suo punto fisso, al perno della rotella girante unita al

*) E. Pascal, *Sopra alcune classi di integrafi per equazioni differenziali* (Rend. R. Acc. delle Sc. fis. e mat. di Napoli, (3) v. 17, 1911); *Sul mio integrafo a riga curvilinea* (ibid., (3) v. 18, 1912).

carrello integrale. In ambo i casi bisognerà fare che il perno dell'altro carrello sia scorrevole in una scanalatura praticata nella riga medesima, ma nel primo caso bisogna anche fare che col mutare la direzione della tangente alla riga nel punto che rappresenta il perno del carrello integrale, muti in corrispondenza anche la direzione del piano della rotella; il che può ottenersi con congegni di facile costruzione. Nell'altro caso ciò resta evitato, ma pur avendosi un altro vantaggio, può poi presentarsi viceversa un altro inconveniente, come diremo più sotto.

Passiamo ora ai calcoli relativi al dispositivo *a)*.

C'è da distinguere, prima di tutto, *due unità di misura*; l'una è *l'unità di misura assoluta* e cioè quella colla quale intendiamo misurate tutte le lunghezze sul foglio da disegno; e l'altra è *l'unità di misura dello strumento*, ed è rappresentata

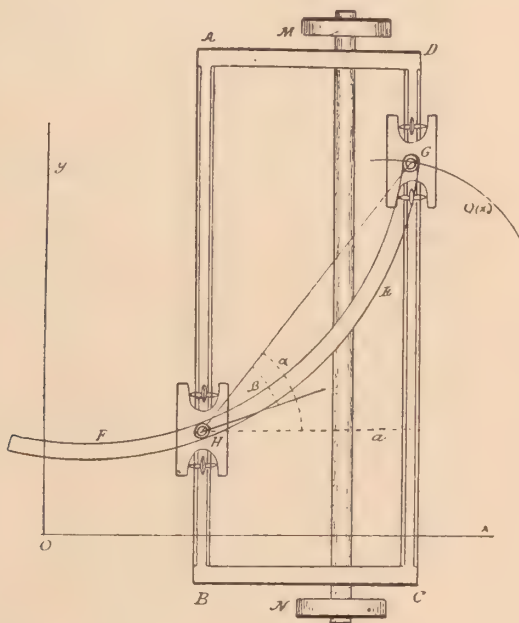



Fig. 1.ª

dalla proiezione sull'asse delle x, della distanza fra i perni dei due carrelli H e G dello strumento.

Sia EF la riga curvilinea colla quale sono congiunti i perni dei due carrelli (v. fig. 1).

Il piano della rotella girante sia tangente in H alla curva EF; esso verrà a formare coll'asse delle x un angolo che è la differenza di due, di cui uno α è l'angolo che la retta congiungente i perni H, G dei due carrelli fa coll'asse delle x, ed esso ha per tangente trigonometrica $\frac{Q(x)-y}{a}$, (dove $Q(x)$ è l'ordinata della curva differenziale, y la ordinata della curva integrale ed a è l'unità di misura dello strumento), e l'altro angolo β è quello che la tangente alla curva EF fa colla corda HG.

Si ha così

$$y' = \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{[Q(x)-y]-a\operatorname{tg}\beta}{a+[Q(x)-y]\operatorname{tg}\beta}.$$

Essendo fra loro parallele le due righe su cui scorrono i carrelli, l'angolo β dipenderà solo dalla differenza delle posizioni di altezza sull'asse delle x, dei due carrelli, e cioè sarà funzione di $[Q(x) - y]$:

$$\operatorname{tg}\beta = F(Q(x) - y) , \tag{1}$$

onde sarà

$$y' = \frac{[Q(x) - y] - a F(Q(x) - y)}{a + [Q(x) - y] F(Q(x) - y)} \tag{2}$$

che possiamo scrivere

$$y' = \Phi(Q(x) - y) \tag{3}$$

e *questo è il tipo dell'equazione differenziale che si integra coll'indicato dispositivo;* la Q è una funzione arbitraria rappresentata da una curva qualunque tracciata sul foglio di disegno e che si farà percorrere dalla punta differenziale, e Φ è una funzione che dipende dalla natura della curva EF; ma *per qualunque data* Φ *si può trovare la* EF *corrispondente, e quindi per qualunque equazione differenziale del tipo* (3) *si può costruire il corrispondente integrafo.*

Riferendo la curva EF a coordinate polari ρ, θ, e scegliendo come polo il punto G, l'angolo β della corda GH colla tangente in H è l'angolo della tangente col raggio vettore $\rho = GH$, ed è quindi dato da

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\rho\, d\theta}{d\rho} . \tag{4}$$

Poniamo

$$Q(x) - y = t \tag{5}$$

e osserviamo che si ha

$$a^2 + t^2 = \rho^2 ; \tag{6}$$

si ha quindi, mediante (1),

$$\frac{\rho\, d\theta}{d\rho} = F(t) = F\left(\sqrt{\rho^2 - a^2}\right) . \tag{7}$$

Data perciò la funzione $\Phi(t)$, se ne deduca $F(t)$ colla formola

$$F(t) = \frac{t - a\Phi(t)}{a + t\Phi(t)} , \tag{8}$$

e indi colla quadratura

$$\theta = \int \frac{F\left(\sqrt{\rho^2 - a^2}\right)}{\rho}\, d\rho \tag{9}$$

si dedurrà l'equazione polare della curva della cui forma devesi foggiare la riga che collega i due carrelli dell'integrafo.

Per $F = 0$, si ha $\theta = \text{cost.}$ e la curva EF è la retta GH; la (2) diventa

$$a y' = Q(x) - y , \tag{10}$$

e si ha *l'integrafo a riga rettilinea* che serve per *le equazioni differenziali lineari di 1.° ordine.*

Per $F(t) = -m =$ cost. si ha $\theta = -m \log \rho$, $\rho = e^{-\frac{\theta}{m}}$; la curva EF è un arco di spirale logaritmica, e la (2) diventa

$$y' = \frac{am + Q(x) - y}{a - m[Q(x) - y]}, \tag{11}$$

e si viene ad integrare la stessa equazione che, come vedremo più avanti, può integrarsi anche coll'integrafo a riga rettilinea.

Per $F(t) = t$ si ha per equazione della curva EF:

$$\theta = \int \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\rho} d\rho = \sqrt{\rho^2 - a^2} - a \cdot \text{arc cos} \frac{a}{\rho}, \tag{12}$$

mentre che la equazione che viene ad integrarsi diventa:

$$y' = -\frac{(1 - a)[Q(x) - y]}{a + [Q(x) - y]^2}, \tag{13}$$

in cui $Q(x)$ è una funzione arbitraria, ed a è una costante.

Nell'integrafo ora descritto bisogna fare che la deviazione della riga in H porti con sè la deviazione del piano della rotella, piano che deve conservarsi sempre tangente in H alla riga EF.

Ad ottenere ciò si può adoperare il seguente congegno: Tracciata su di un foglio la curva C secondo cui deve essere foggiata la riga EF, si disegnino per punti i luoghi di due punti situati sulla tangente a C, da parti opposte del punto di contatto ed equidistanti da questo della quantità costante s. Si costruisca indi una lamina di acciaio contenente tali due curve scanalate, e per queste scanalature si facciano scorrere i perni situati agli estremi di una spranghetta orizzontale di lunghezza $2s$ e che sia rigidamente legata al perno H del carrello integrale e disposta nella medesima direzione del piano della rotella. È chiaro che scorrendo la lamina lungo i due detti perni, il perno H percorrerà la curva C, e la rotella sarà sempre nella direzione della tangente a C.

Invece di fare che il piano della rotella sia sempre nella direzione della tangente alla riga EF, si potrebbe facilmente fare che esso faccia con tale direzione un angolo costante; in tal caso la equazione che viene ad integrarsi non è più la (2), ma un'altra che potrebbe agevolmente trovarsi; ma su ciò non vogliamo fermarci.

Passiamo ora al dispositivo *b)*.

Invece di fare che la riga sia fissata in G e scorrevole in H, facciamo che essa sia rigidamente congiunta al perno H della rotella girante unita al carrello integrale, e scorrevole con una scanalatura intorno al perno G del carrello differenziale (v. fig. 2). La costruzione dell'apparecchio risulta così più semplice, ed è resa anche più facile la ricerca della forma della riga per una data equazione differenziale, giacchè mentre col dispositivo *a)* la equazione della curva secondo cui deve essere foggiata la riga è data da una quadratura (v. la formola (9)), qui invece tale equazione è data sotto forma finita e inoltre può anche con molta facilità disegnarsi per punti.

Ed infatti assumendo come polo il punto H, e come asse polare la direzione HS del piano della rotella girante (direzione che è rigidamente connessa colla riga scanalata EGF), l'angolo β diventa l'angolo θ del raggio vettore HG coll'asse polare,

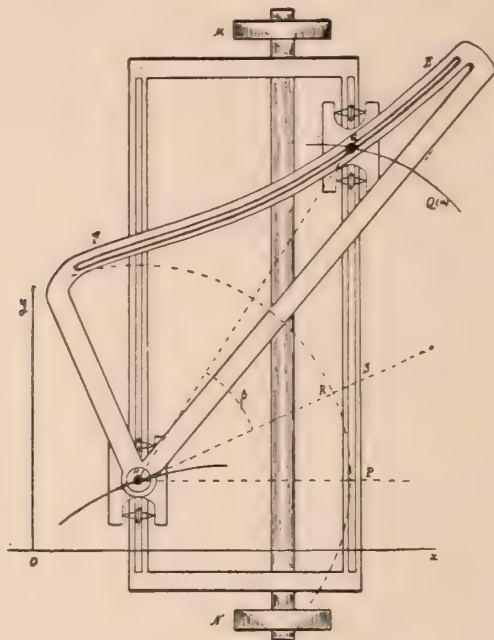



Fig. 2.ª

e avendo presenti le formole (4) (5) (6), si ha

$$\operatorname{tg}\theta = \mathrm{F}(\mathrm{Q}(x) - y) = \mathrm{F}(t) = \mathrm{F}\left(\sqrt{\rho^2 - a^2}\right), \tag{14}$$

e questa relazione fra ρ e θ rappresenterà l'equazione polare della curva richiesta C, data che sia la funzione F legata alla data funzione Φ di (3) dalla formola (8).

Per costruire per punti la C, data che sia la F, non c'è però neanche bisogno di servirsi della (14), ma si può procedere in un modo assai più semplice.

Ed invero si costruisca (v. fig. 3) il cerchio di raggio a (unità di misura dello

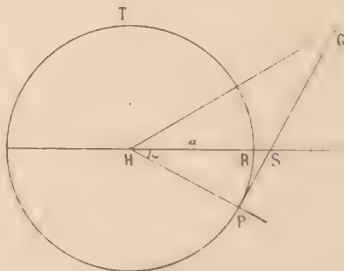



Fig. 3.ª

strumento, cioè proiezione su x della distanza dei perni H, G dei due carrelli), e si assuma HS come direzione del piano della rotella.

Assunto un angolo qualunque $\omega = \text{RHP}$, si conduca in P la tangente al cerchio. Quando sullo strumento è HP parallela all'asse delle x, la rotella è nella direzione HS, e quindi la tangente y' dell'angolo della tangente alla curva integrale con x è $\operatorname{tg}\omega = \frac{\text{SP}}{a}$; onde, posta la (5), ed essendo

$$y' = \Phi(\text{Q}(x) - y) = \Phi(t)$$

l'equazione differenziale data, sarà:

$$\text{SP} = a\,\Phi(t)\,. \tag{15}$$

Perciò se sulla retta PS, a cominciare da P, stacchiamo un segmento PG eguale ad uno dei valori di t ricavati dall'equazione (15), otteniamo un punto G che apparterrà alla curva richiesta, la quale così resterà descritta facilmente per punti.

La costruzione riuscirà più spedita se in precedenza si è già disegnata la curva

$$\text{Y} = \Phi(t)\,, \tag{16}$$

in modo da potere, volta per volta, per ogni valore di Y trovare la corrispondente lunghezza t.

Possiamo anche facilmente trovare, in base a questa costruzione, l'equazione in coordinate cartesiane della curva luogo di G. Assumendo come assi HS e la sua perpendicolare HT, si trovano, per le coordinate ξ, η di G, le formole:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \cos\omega + t\,\text{sen}\,\omega \\ \eta &= t\cos\omega - \text{sen}\,\omega \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

essendo poi (per (15))

$$\operatorname{tg}\omega = \Phi(t)\,. \tag{18}$$

Il dispositivo b) avrebbe così dei reali vantaggi sul dispositivo a), se non avesse però anche un inconveniente di una certa importanza, che è il seguente: facendo scorrere il carrello differenziale sulla sua guida, tutto il piano rigido HEF (vedi fig. 2) terminato con righe di metallo, deve rotare intorno H di un angolo positivo o negativo secondo la forma della riga FE.

Ora può avvenire che la forma della riga sia tale che non basti la spinta fatta colla mano sull'apposito manubrio legato al carrello differenziale, per far avvenire questa rotazione del piano HEF intorno H, ma che occorra aiutare questa rotazione; è necessario allora, per certe forme di righe (e di ciò daremo esempii più avanti) aggiungere un manubrio in un punto del piano HEF, in maniera da potere fare, colla combinazione delle due spinte, che in ogni istante la riga e i carrelli stieno nelle dovute posizioni.

Applicando il metodo esposto possiamo trovare le forme delle righe per alcune speciali equazioni differenziali.

Per la equazione lineare (10) la riga, come abbiamo visto, è rettilinea; invece

per la

$$ay' - y = Q(x) \,, \tag{19}$$

che può scriversi:

$$ay' = y - (-Q(x)) \,,$$

la forma è quella rappresentata dalla fig. 4. Per ogni punto P di angolo ω sul cerchio, si conduca la tangente al cerchio, indi si stacchi PG = PS dalla parte opposta

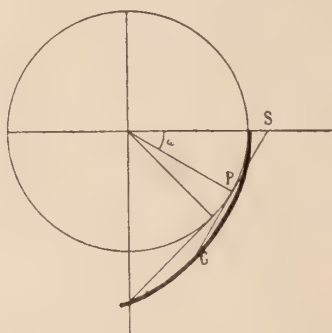



Fig. 4.ª

di S rispetto a P: si ha così la curva disegnata. La curva che bisogna percorrere colla punta del carrello differenziale è però la curva di ordinate $-Q(x)$.

Similmente nelle fig. 5, 6, 7, sono disegnate le curve relative alle equazioni:

$$ay' = \frac{1}{y - Q(x)} \tag{20}$$

$$ay' = \log(Q(x) - y) \tag{21}$$

$$ay' = e^{Q(x)-y} \,. \tag{22}$$

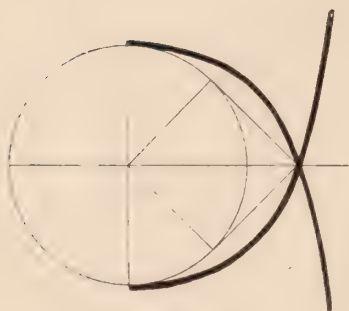
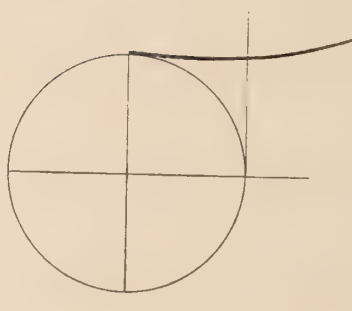
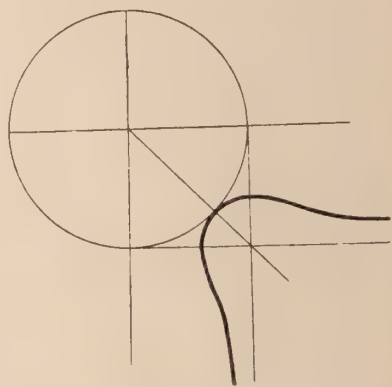



Fig. 5.ª Fig. 6.ª Fig. 7.ª

È da notare che le equazioni (19) e (20) sono della specie di quelle cui abbiamo di sopra accennato, per le quali cioè la forma della riga è tale che la rotazione del piano HEF (fig. 2) intorno H non può compiersi automaticamente, ed è perciò necessario aiutarla mediante un manubrio collocato opportunamente in un punto del piano HEF, onde renderla compatibile collo scorrimento del carrello differenziale sulla sua guida.

§ 3. — *Caso della riga rettilinea ma eccentrica. Equazione differenziale corrispondente.*

Abbiamo visto che per la equazione differenziale lineare (10) la riga è rettilinea e passante per il perno **H** del carrello integrale.

Supponiamo ora che la riga sia anche rettilinea, ma non passante per **H**, cioè *eccentrica*, e vediamo qual'è l'equazione differenziale che viene allora ad integrarsi.

Sia p la distanza della riga da H, e α la sua inclinazione sulla direzione del piano della rotella girante. Indicando con ρ, θ le coordinate polari di un punto G della retta (l'asse polare essendo HS; si tenga presente la fig. 2), si ha:

$$\rho \operatorname{sen}(\alpha + \theta) = p \,, \tag{23}$$

e ponendo, come al solito:

$$PG = Q(x) - y = t$$

$$PS = ay' = a\Phi(t) = \operatorname{tg}\omega \,,$$

si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{t}{a} = \operatorname{tg}(\omega + \theta) = \dfrac{ay' + \operatorname{tg}\theta}{1 - ay' \operatorname{tg}\theta} \\ \rho = \sqrt{a^2 + t^2} \,, \end{cases} \tag{24}$$

ed eliminando ρ e θ fra le (23) e (24) si ha l'equazione differenziale:

$$Q(x) - y = \frac{p\sqrt{1 + a^2y'^2} + a^2y' \cos\alpha - a \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha + ay' \operatorname{sen}\alpha} \,. \tag{25}$$

Per $p = 0$ si torna naturalmente nelle condizioni della riga *centrata* e si ha (poichè ora la direzione della rotella non è più la direzione della riga, come per (10), ma fa con tale direzione un angolo α):

$$Q(x) - y = \frac{a^2y' - a \operatorname{tg}\alpha}{1 + ay' \operatorname{tg}\alpha} \,; \tag{26}$$

e per $\alpha = 0$, cioè per il caso della rotella parallela alla riga, la (25) diventa:

$$Q(x) - y = p\sqrt{1 + a^2y'^2} + a^2y' \,. \tag{27}$$

§ 4. — *Un integrafo per l'equazione di Riccati ed uno per l'equazione di Abel.*

L'equazione generale di Riccati

$$y' = Ay^2 + By + C \tag{28}$$

dove A, B, C sono funzioni di sola x, può ridursi ad un tipo canonico che è caso

particolare del tipo (3) integrato dall'integrafo a riga curvilinea. Ciò fu fatto vedere dal mio assistente dott. C. **Ajello** in una Nota recente *).

Ed infatti, ponendo:

$$e^{\int B dx} = \beta(x) \tag{29}$$

e

$$\begin{cases} \xi = -\int A\beta\, dx \\ \eta = \int \frac{C}{\beta} dx - \frac{y}{\beta} \\ \quad = Q(\xi) - \frac{y}{\beta}, \end{cases} \tag{30}$$

si ha:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \left[\int \frac{C}{\beta} dx - \eta\right]^2 = (Q(\xi) - \eta)^2. \tag{31}$$

In modo simile si fa vedere che l'equazione (detta di **Abel**)

$$y' = Ay^3 + By^2 + Cy + D \tag{32}$$

può con una simile trasformazione ridursi a:

$$\eta' = (Q(\xi) - \eta)^3, \tag{33}$$

e in generale è evidente che qualunque equazione differenziale del tipo

$$y' = y^n + P(x),$$

ponendo:

$$\eta = \int P(x)dx - y = Q(x) - y \tag{34}$$

può sempre ridursi a

$$\eta' = (Q(x) - \eta)^n, \tag{35}$$

che rientra nella forma (3).

Adoperando le notazioni del § 2, abbiamo dunque per (31):

$$\Phi(t) = t^2,$$

per (33):

$$\Phi(t) = t^3,$$

e in generale per (35):

$$\Phi(t) = t^n.$$

*) C. Ajello, *Su di una importante applicazione dell'integrafo Pascal a riga curvilinea* (Rend. della R. Acc. di sc. fis. e mat. di Napoli, (3) v. 18, 1912).

Col metodo indicato nel § 2 si possono allora disegnare le forme delle righe

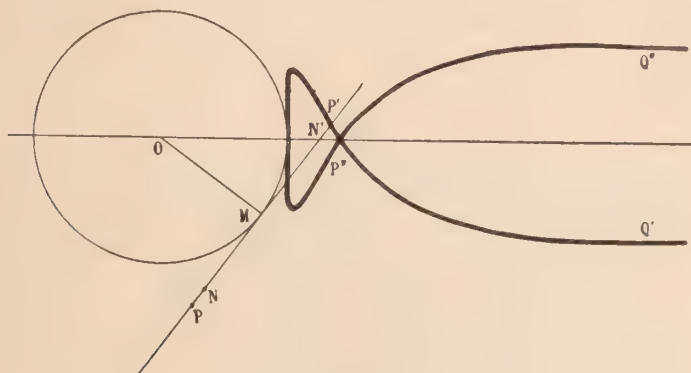



Fig. 8.ª

per questi casi, e si hanno così le figure 8 e 9, di cui la prima corrisponde all'equazione di **Riccati**, e la seconda a quella di **Abel**.

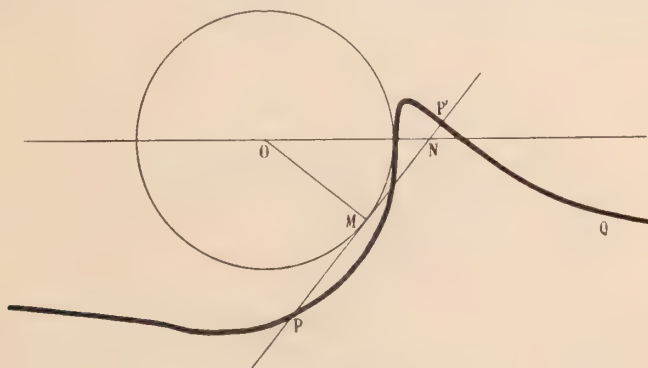



Fig. 9.ª

Per il caso generale (35), *se n è dispari* si ha una forma di curva somigliante a quella della fig. 8, e *se n è pari* si ha una forma come quella della fig. 9 con due rami che si distendono in due opposte direzioni.

§ 5. — *L'integrafo a riga rettilinea centrata. L'equazione differenziale lineare di 1.° ordine* *).

Come si è visto nel § 2, l'equazione differenziale che viene ad integrarsi colla riga rettilinea passante pel centro del carrello integrale (e che perciò chiameremo *centrata*, per distinguerla da quella del § 3) è la equazione lineare canonica di 1.° ordine

$$ay' + y = \mathrm{Q}(x) \,, \tag{36}$$

*) E. Pascal, *L'integratore meccanico per le equazioni differenziali lineari di 1.° ordine, e per altre equazioni differenziali* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, (5) t. 18, 1909, 2° sem.; Giorn. di mat. di Battaglini, (3) t. 48, 1910); *L'uso e le applicazioni dell'integratore meccanico per le equazioni differenziali* (Giorn. di mat. di Battaglini, (3) t. 49, 1911).

supposto che a sia la *unità di misura* dello strumento, e che la direzione del piano della rotella girante sia quella della riga.

Nell'apparecchio che ho fatto da molto tempo costruire in parecchi esemplari, di cui si sono provvisti molti Gabinetti matematici universitarîi, e che è rappresen-

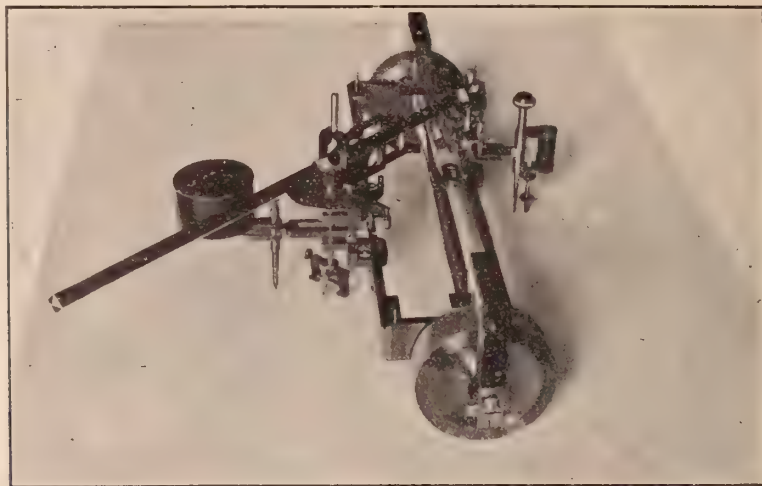



Fig. 10.ª

tato secondo i suoi varii modelli dalle fig. **10**, **11**, **12**, oltre una spranghetta colla quale può farsi variare a volontà questa unità di misura da un minimo di **7** cm. ad un massimo di **16** cm., v'è ancora un congegno col quale si può inclinare e fissare

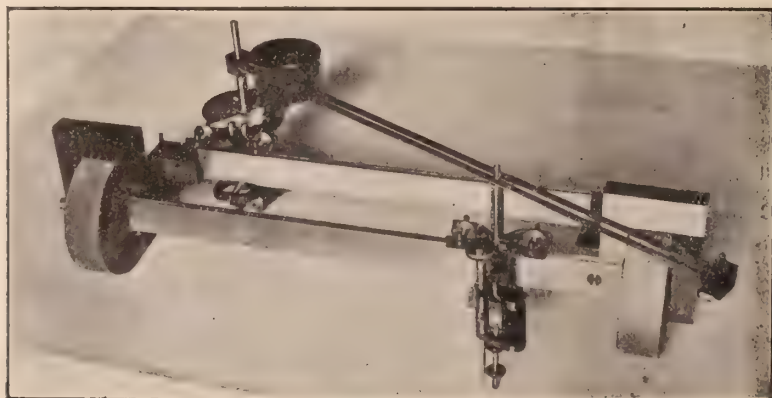



Fig. 11.ª

di un angolo stabilito (da leggersi su apposito quadrante graduato) il piano della rotella sulla direzione della riga che congiunge costantemente i perni dei due carrelli.

Se allora fissiamo tale angolo ad:

$$\alpha = \operatorname{arctg} m \ ,$$

l'equazione differenziale che viene ad integrarsi è, invece della (36), più generalmente la seguente:

$$y = a\frac{y' + m}{my' - 1} + Q(x) \tag{37}$$

cioè:

$$y' = \frac{-am + Q(x) - y}{a + m[Q(x) - y]}; \tag{38}$$

ma di ciò tratteremo più avanti in un § apposito.

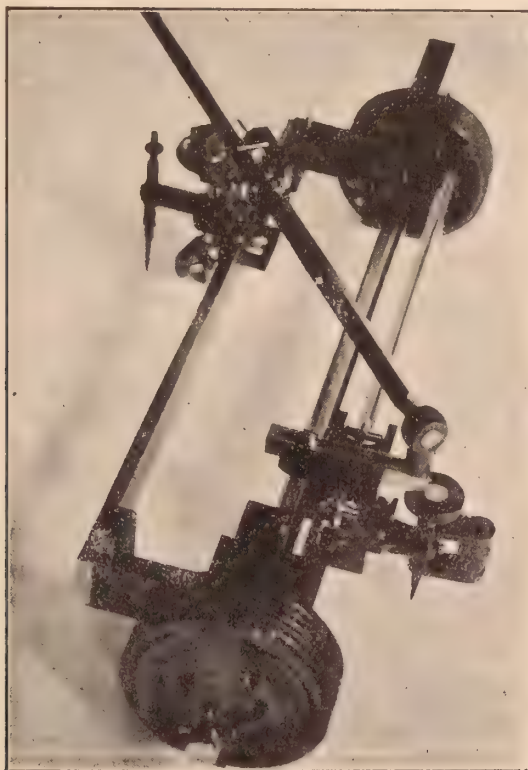



Fig. 12.ª

Ad illustrazione delle figure precedenti diremo che la fig. **10** rappresenta il primo modello da me fatto costruire nel **1909**; in esso v'era, congiunto al carrello integrale, un peso che serviva a premere la rotella girante sul foglio di disegno; questo peso si è però mostrato poi inutile ed è stato soppresso negli altri modelli; la fig. **11** rappresenta il modello in cui la riga rettilinea invece d'essere girevole intorno al perno del carrello integrale, lo è intorno a quello del carrello differenziale, e questo modello si presta ad avere delle righe di ricambio di forme diverse e quindi a compendiare in uno varii apparecchi; e infine la fig. **12** rappresenta l'ultimo modello costruito.

Tornando al caso (36) di $\alpha = 0$, cominciamo ad esaminare le varie particolarità

della curva che verrà descritta dalla *punta integrale* in rapporto a quella descritta dalla *punta differenziale.*

Prima di tutto, collo stesso strumento disegneremo gli assi coordinati delle x e delle y. Fissiamo il carrello differenziale sulla sua riga mediante l'apposita vite; abbassando la punta differenziale, segniamo sul foglio un punto, e indi, facendo scorrere lo strumento sulle sue ruote, poniamo il carrello integrale in modo che l'orlo della rotella poggi esattamente sul punto segnato. In tali posizioni i perni dei due carrelli stanno su di una retta perpendicolare all'asse intorno cui girano le due grandi ruote M, N (v. fig. 2) dell'apparecchio. Abbassando allora la penna del carrello integrale e facendo scorrere lo strumento sulle sue ruote, verrà descritto l'asse delle x.

Se invece si vuole descrivere tale asse nella parte più bassa o più alta del foglio (più prossima o più lontana cioè dall'operatore), la cosa è ancora più facile perchè basterà portare i due carrelli nei posti estremi delle due rotaie laterali dello strumento, fermare colla vite il carrello differenziale, e fare scorrere lo strumento. La precisione colla quale questo deve essere costruito, affida che la punta integrale si troverà nella posizione giusta per descrivere una retta perpendicolare alle suddette rotaie laterali.

Per descrivere poi l'asse delle y, si fissi coll'apposita vite una delle ruote M dello strumento, in maniera che questo non possa più scorrere. Colla mano sinistra si sollevi leggermente il carrello integrale in modo che la rotella non poggi più sul foglio e, dopo averne abbassata la penna scrivente, lo si faccia scorrere sulla rotaia sinistra per tutta la lunghezza di questa. Se lo strumento è costruito esattamente, così facendo deve venirsi a descrivere una retta perpendicolare a quella segnata prima.

Gli assi delle x per le due curve, la differenziale $y = Q(x)$ e la integrale, evidentemente coincidono.

Gli assi delle y invece, sono l'uno spostato sull'altro di una lunghezza eguale alla distanza, proiettata su x, delle due punte che descrivono le due curve; le quali due punte non è necessario che sieno collocate proprio in corrispondenza dei perni dei due carrelli, potendo essere anche opportunamente spostate di una quantità costante.

È facile ora vedere che *la curva integrale avrà un massimo o un minimo nei punti in cui le ordinate delle due curve nei punti corrispondenti sono eguali, purchè non coincidano le tangenti delle due curve, nel qual caso la curva integrale ha un flesso a tangente parallela all'asse delle* x.

Più generalmente: *la curva integrale avrà un flesso nei punti in cui la sua tangente è parallela a quella della curva differenziale nel punto corrispondente.*

Dal maneggio dello strumento tutte queste proprietà appaiono in modo evidente.

Così anche facendo percorrere alla punta differenziale un arco di curva e indi facendo scorrere per un tratto il carrello differenziale sulla sua guida, senza spostar l'apparecchio, e finalmente, proseguendo colla punta lungo un altro arco di curva, la rotella cambia direzione, e descrive una curva che fa un angolo con quella descritta sino a quel momento; se cioè è discontinua l'ordinata della curva differenziale, sarà discontinua la tangente alla curva integrale.

Se invece è discontinua la tangente alla curva differenziale, ma continua l'or-

dinata di questa, la direzione del piano della rotella muta sempre con continuità, e cioè la tangente alla curva integrale resta continua; onde se colla punta differenziale si descrive un arco sino a un certo punto, e indi, mutando bruscamente direzione, si torna indietro con tutto l'apparecchio, la punta integrale descriverà una curva con una *cuspide.*

Data una curva differenziale, si possono naturalmente costruire infinite curve integrali; la possibilità che vi è di collocare inizialmente il carrello integrale nella posizione che meglio ci piace sulla guida su cui esso scorre, corrisponde all'*arbitrarietà della costante nell'integrale generale dell'equazione differenziale.*

Collocando il carrello consecutivamente in varie posizioni iniziali, si possono avere varie curve integrali di una medesima curva differenziale.

Ora deve avvenire, ed infatti se ne trova la conferma eseguendo accuratamente un disegno collo strumento, che *le corde degli archi di tutte queste curve integrali, archi limitati da due rette comunque scelte, ma perpendicolari all'asse delle* x, *concorrono in uno stesso punto.*

Ciò dipende dalla proprietà elementare dell'equazione differenziale lineare di 1.° ordine, che *fra tre suoi integrali particolari* y_1, y_2, y_3, *sussiste sempre la relazione*

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \text{cost.}, \tag{39}$$

cioè il rapporto delle differenze delle ordinate è indipendente dall'ascissa x.

Giacchè se y_1, y_2 sono due integrali particolari dell'equazione, questa può sempre scriversi:

$$\begin{vmatrix} y' & y & 1 \\ y'_1 & y_1 & 1 \\ y'_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

cioè:

$$\frac{d}{dx}\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = 0 .$$

E perciò se y_3 è un nuovo integrale particolare, facendo $y = y_3$, si ha appunto la (39).

Nella fig. 13 in cui AA' è l'arco di curva differenziale e L, M, N, U, V sono archi di cinque diversi integrali particolari di AA', è illustrata questa proprietà.

L'integrale generale della (36) è, come si sa,

$$y = \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}} \left[\int Q e^{\frac{x}{a}} dx + C \right] \tag{40}$$

e questa è dunque l'espressione integrale che lo strumento viene a descrivere.

Ponendo inizialmente la punta integrale su un punto di ordinata y_0, la costante d'integrazione sarà data da:

$$C = a y_0 e^{\frac{x_0}{a}} ,$$

se x_0 è l'ascissa del punto iniziale; cosicchè se è $x_0 = 0$ e $a = 1$, la costante d'integrazione è esattamente eguale a y_0.

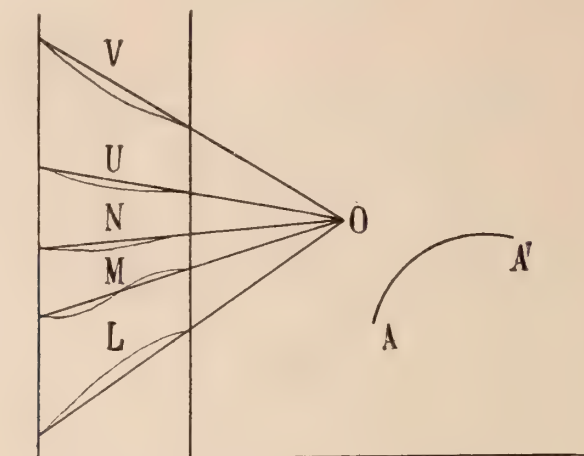



Fig. 13.ª

Descritte due curve integrali (v. fig. 14) della medesima curva differenziale QQ', la differenza delle ordinate, per ciascuna x, è per (40) data da:

$$\frac{C_1 - C_2}{a} e^{-\frac{x}{a}},$$

e quindi decrescerà col crescere di x. Le due curve integrali MM', NN' sono perciò

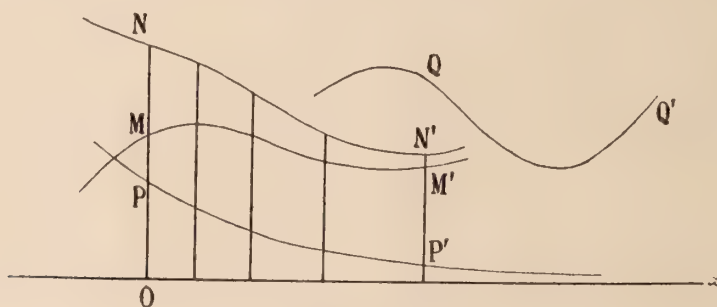



Fig. 14.ª

fra loro assintotiche verso destra, e la curva che rappresenta la differenza delle loro ordinate deve riuscire una esponenziale PP'.

Prima di terminare questo §, mostriamo che collo stesso strumento può integrarsi, oltre l'equazione lineare (36) in cui naturalmente a è un numero *positivo*, anche l'altra equazione

$$ay' - y = Q(x) . \tag{41}$$

Data la curva di ordinate $Q(x)$, disegniamo la sua simmetrica rispetto all'asse delle y e sia (v. fig. 15) quella di ordinate $Q_1(x) = Q(-x)$.

Integriamo nel solito modo tale curva, e indi capovolgiamo il foglio di disegno. Le curve integrali tracciate dallo strumento restano le MM′, NN′... assintotiche verso sinistra invece che verso destra.

Tenuto conto dell'inversione fatta subire al foglio di disegno, l'equazione di

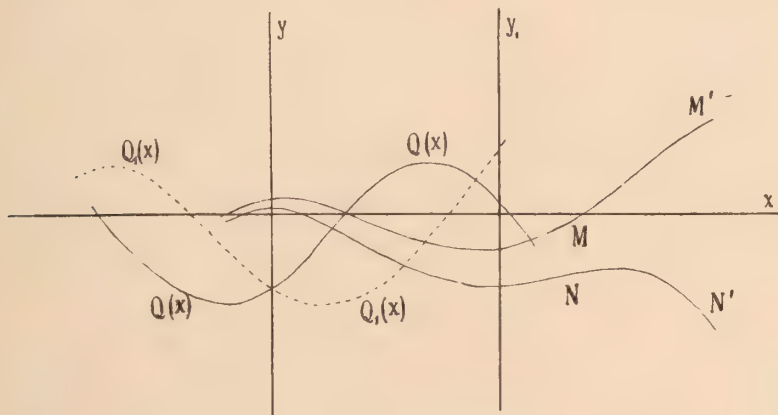



Fig. 15.ª

queste curve è quella ottenuta da (40), mutando prima $Q(x)$ in $Q(-x)$ e indi mutando segno alla x e alla y; si ha così:

$$y = \frac{1}{a} e^{\frac{x}{a}} \left[\int Q(x) e^{-\frac{x}{a}} dx - C \right], \tag{42}$$

che è precisamente l'integrale generale di (41).

È evidente che l'integrazione della (41) porta anche all'integrazione della (36) per a negativo; questa osservazione ci sarà utile in seguito.

§ 6. — *Tracciamento della curva esponenziale e della catenaria.*

L'apparecchio del § precedente può servire come *compasso logaritmico*, cioè per la descrizione della *curva esponenziale o logaritmica.*

Poniamo nella formola (40), $Q = c =$ cost., e si ha:

$$y = c + \frac{C}{a} e^{-\frac{x}{a}}, \tag{43}$$

che è la curva esponenziale formata di un ramo che si avvicina assintoticamente alla retta $y = c$, e sta al disopra o al disotto di questa secondo la posizione iniziale che si dà al carrello integrale.

Per tracciare dunque coll'apparecchio del § precedente la logaritmica, non c'è da fare altro che fissare il carrello differenziale mediante l'apposita vite ad un'altezza

sull'asse delle x eguale a c, e indi fare scorrere tutto lo strumento sulle sue ruote. La punta del carrello integrale descriverà allora la curva (43).

Trasportando l'asse delle x sulla retta $y=c$ e l'asse delle y in quella retta perpendicolare a questa e che incontra la curva in un punto distante della quantità $+1$ o -1 dalla retta $y=c$, l'equazione della curva prende la forma ridotta:

$$(44) \qquad y=e^{-\frac{x}{a}}, \qquad \text{ovvero:} \qquad y=-e^{-\frac{x}{a}},$$

e, col girare di 180° il foglio da disegno, si hanno le equazioni:

$$(45) \qquad y=-e^{\frac{x}{a}}, \qquad \text{ovvero:} \qquad y=e^{\frac{x}{a}},$$

mentre collo spostamento dell'asse delle y di una lunghezza eguale ad m si ha da quest'ultima equazione l'altra:

$$(46) \qquad y=e^{\frac{m}{a}}e^{\frac{x}{a}}=\mathrm{M}e^{\frac{x}{a}}.$$

Se si sceglie eguale ad 1 l'unità di misura a dello strumento si ha da (45):

$$(47) \qquad y=e^{x},$$

e se si vuole invece:

$$(48) \qquad y=\mathrm{A}^{x}$$

basterà prendere per unità di misura dello strumento in rapporto all'unità assoluta, la quantità

$$(49) \qquad a=\frac{1}{\log_e \mathrm{A}},$$

la cui lunghezza può cercarsi con una costruzione fatta mediante lo stesso strumento, perchè $\log_e \mathrm{A}$ è l'ascissa di quel punto della curva (47) cui corrisponde per ordinata A.

Tracciata la (47), le ordinate cui corrispondono le ascisse $1, \frac{1}{2}, -1$, rappresentano i numeri $e, \sqrt{e}, \frac{1}{e}$; *lo strumento quindi vale a costruire graficamente con molta facilità il numero trascendente e.*

Passiamo ora alla *catenaria.*

Disegniamo la curva (45), e per far ciò invece di invertire il foglio di disegno, possiamo invertire lo strumento, cioè farlo funzionare portando a sinistra dell'operatore il carrello differenziale e a destra quello integrale. Indi, raddrizzata la posizione dello strumento, si integri la seconda curva (45).

Ponendo in (40) $Q=e^{\frac{x}{a}}$ e integrando, si ha:

$$y=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{a}}+\frac{C}{a}e^{-\frac{x}{a}} \tag{50}$$

in cui C è una costante positiva o negativa il cui valore dipende da quello che si assume per valore iniziale di y. Se si incomincia a descrivere la curva $Q=e^{\frac{x}{a}}$ dal punto di ordinata 1 (che corrisponde ad $x=0$), e si pone inizialmente la punta del carrello integrale in una posizione di ordinata maggiore, eguale, o minore di $\frac{1}{2}$, il valore della costante C riuscirà positivo, zero, o negativo.

Se C è positivo, l'equazione (50) rappresenta una facile trasformata di una *catenaria*, perchè infatti, trasportando l'asse delle y di una quantità eguale a

$$m=\frac{a}{2}\log_e\frac{2C}{a},$$

cioè ponendo $x=x'+m$, la (50) diventa:

$$y=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2C}{a^3}}\left[e^{\frac{x_1}{a}}+e^{-\frac{x_1}{a}}\right], \tag{51}$$

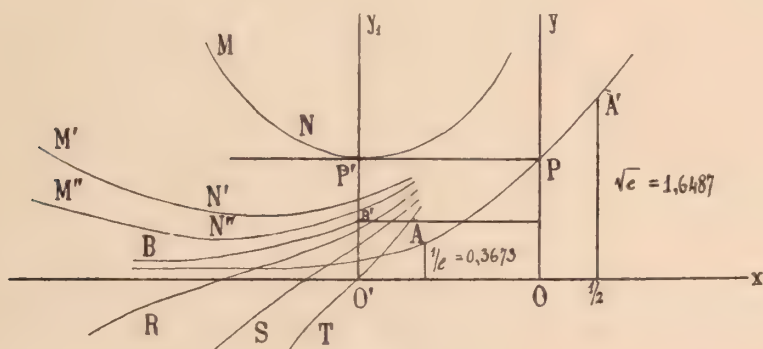



Fig. 16.ª

che è una trasformata della catenaria

$$y=\frac{a}{2}\left[e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right]. \tag{52}$$

Curve siffatte possono chiamarsi *catenarie allungate o accorciate.*
Per

$$C=\frac{a^3}{2},$$

(caso che si ottiene ponendo inizialmente la punta integrale nella posizione di ordinata $\frac{a^2+1}{2}$) si ha la *catenaria.*

Nella fig. 16, in cui AA' è la curva esponenziale, sono state disegnate varie

delle suddette curve: MN, M'N', M''N'', partendo da varii valori iniziali; l'origine delle coordinate è O'.

Posto $1 = OP = O'P'$, la curva MN che passa per P' avrà per equazione

$$y = \cos h \frac{x}{a}, \tag{53}$$

perchè, per $x = 0$, la y di (50) deve ridursi ad 1, e perciò deve essere:

$$\frac{C}{a} = \frac{1}{2};$$

essa è cioè *la curva del coseno iperbolico.*

Posta in B' la posizione iniziale della punta del carrello integrale, essendo $O'B' = \frac{1}{2}$, la costante C della formola (50) deve risultare zero, e la curva deve degenerare nella stessa esponenziale AA' spostata verso sinistra della quantità OO'; essa è la BB'.

Posta infine la posizione iniziale del carrello integrale al disotto di B', la costante C risulterà negativa e si avranno le curve R, S, T della fig. 16. La curva che passa proprio per O' (cioè la T della figura) avrà per equazione:

$$y = \operatorname{sen} h \frac{x}{a}, \tag{54}$$

perchè deve aversi $y = 0$ per $x = 0$, e quindi $\frac{C}{a} = -\frac{1}{2}$; essa è così *la curva del seno iperbolico.*

§ 7. — *Integrazione dell'equazione differenziale lineare completa di ordine superiore a coefficienti costanti, ma col secondo membro variabile.*

Lo stesso apparecchio del § 5 può adoperarsi per la risoluzione di alcune equazioni differenziali lineari di ordine superiore del tipo

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + y = Q(x), \tag{55}$$

in cui $a_n a_{n-1} \ldots a_1$ sieno costanti reali, e $Q(x)$ sia una qualunque funzione di x.

Propriamente possiamo integrare le equazioni del tipo (55) ma in cui i coefficienti numerici a sieno tali che *l'equazione algebrica*

$$\xi^n - a_1 \xi^{n-1} + a_2 \xi^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n = 0 \tag{56}$$

abbia tutte le sue radici reali.

In effetti, se $a, b, c \ldots$ sono le radici (reali) di (56), l'integrazione di (55)

può evidentemente ridursi a quella delle equazioni:

$$(57)\quad \begin{cases} az' + z = Q(x) \\ bu' + u = z \\ ct' + t = u \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

e queste si possono integrare coll'apparecchio del § 5, mutando volta per volta l'unità di misura dello strumento prima in a, poi in b, etc.

Come abbiamo visto nel § 5, ciò può farsi anche quando qualcuna di queste quantità sia negativa, perchè se p. es. a fosse negativa basterà scrivere la prima delle (57) sotto la forma

$$|a|\, z' - z = -Q(x)$$

e integrare poi questa col metodo sviluppato in fine del § 5 per integrare la (41).

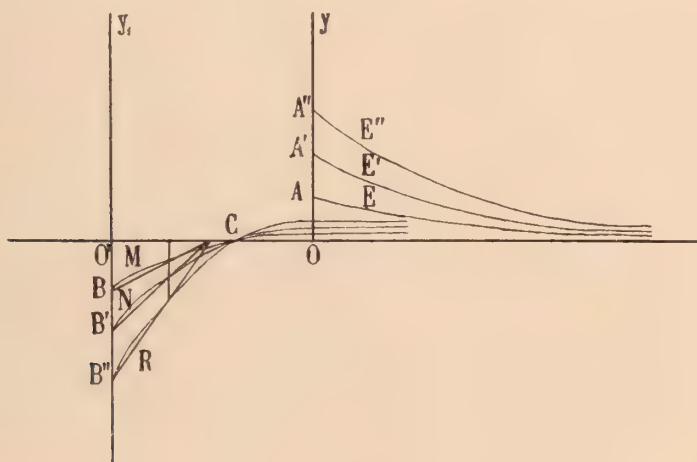



Fig. 17.ª

La fig. 17 rappresenta l'integrazione dell'equazione differenziale di 2° ordine

$$y'' + 2y' + y = 0$$

il cui integrale è della forma

$$y = (Cx + C')\, e^{-x}.$$

Si tracci prima collo strumento la curva

$$z = Ce^{-x}$$

partendo da diverse posizioni iniziali A, A', A'', ..., per il carrello integrale; si hanno così le precedenti esponenziali in cui la costante C ha rispettivamente i valori rappresentati da OA, da OA', da OA'', ... Si integrino queste curve così ottenute partendo anche da varie posizioni iniziali B, B', B'', ...; si avranno così varii integrali particolari dell'equazione data, e C avrà i valori $O'B$, $O'B'$, $O'B''$, ...

Se facciamo che questi valori sieno proporzionali agli OA , OA′, OA″, . . . le curve che si ottengono devono passare tutte per il medesimo punto dell'asse delle x, perchè in tal caso le $Cx + C' = 0$ hanno tutte la stessa radice.

Inoltre le corde degli archi delle curve M , N , R , archi limitati fra le stesse ordinate, devono convergere in un punto dell'asse delle x. Questi fatti sono illustrati nella fig. 17.

La fig. 18 rappresenta la integrazione dell'equazione differenziale di 3° ordine

$$980y''' + 208y'' + 31y' + y = Q(x) .$$

L'equazione algebrica corrispondente è:

$$\xi^3 - 31\xi^2 + 208\xi - 980 = 0$$

che ha le tre radici reali, 14, 10, 7.

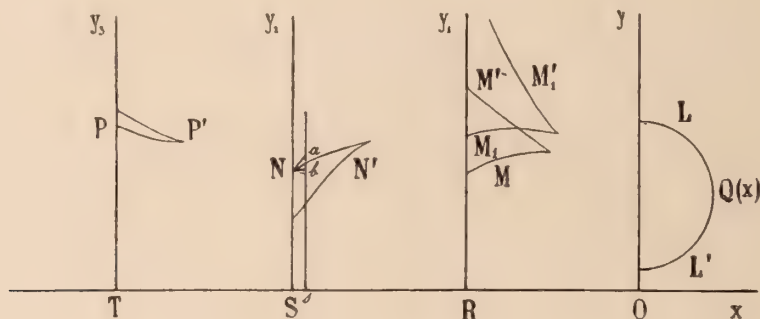



Fig. 18.ª

Assumendo per unità assoluta il centimetro, si integri prima l'equazione

$$14t + t = Q(x)$$

ponendo a 14 cm. l'unità di misura dello strumento; si integri cioè (come diremo per brevità) la curva Q; si abbia così la curva MM′ essendo RM il valore iniziale dell'ordinata.

Si muti in 7 cm. l'unità di misura dello strumento e si integri questa ultima curva ottenendo la curva NN′ col valore iniziale SN. Si integri questa dopo aver cangiata in 10 l'unità di misura dello strumento, e si abbia infine la PP′ essendo TP il valore iniziale dell'ordinata.

Quest'ultima curva è l'integrale dell'equazione data, e le tre costanti d'integrazione corrispondono ai tre valori iniziali assunti successivamente.

Se nella prima integrazione si fosse posta l'unità di misura a 7 cm. e nella seconda a 14 cm., si sarebbe ottenuta la stessa curva NN′ purchè si fosse fatto in modo che le due nuove costanti di integrazione fossero risultate equivalenti alle due antiche.

La curva MM′ è integrale di

$$14t' + t = Q(x)$$

col valore iniziale t_0; sarà quindi:

$$14t'_0 + t_0 = Q(0) .$$

La curva NN′ è integrale di

$$7u' + u = t$$

col valore iniziale u_0; sarà quindi:

$$7u'_0 + u_0 = t_0 .$$

Se invece si integra prima la

$$7v' + v = Q(x) ,$$

il problema sarà di determinare il valore iniziale v_0 per questa, in modo che integrando poi

$$14w' + w = v$$

si abbiano, per i valori iniziali di w e w', i valori:

$$w_0 = u_0$$

$$w'_0 = u'_0 .$$

Dovrà aversi:

$$14u'_0 + u_0 = v_0$$

che con

$$7u'_0 + u_0 = t_0$$

dà:

$$7u'_0 = v_0 - t_0 .$$

Onde, se noi tracciamo la tangente in N alla NN′ e indi formiamo il triangolo rettangolo N*ba* avente per base la lunghezza di **1** cm. (rappresentato nella figura da S′*s*), la distanza $v_0 - t_0 = MM_1$, fra i punti iniziali delle due curve v e t, deve essere **7** volte la lunghezza *ab* dell'altro cateto di quel triangolo, lunghezza che rappresenta u'_0.

Integrando dunque Q, dopo aver posto la punta integrale nella posizione iniziale M_1, e tracciando la $M_1M'_1$, e indi integrando questa (dopo aver mutata l'unità di misura dello strumento da 7 a **14** cm.) colla posizione iniziale N, si dovrà riconoscere che lo strumento traccia la medesima curva NN′. Ciò infatti si verifica nel disegno originale di cui la fig. **18** è la riproduzione a circa $^1/_6$ dal vero.

§ 8. — *Risoluzione delle equazioni algebriche mediante l'integrafo a riga rettilinea.*

Descritta collo strumento la curva di equazione

$$y = e^{-x},$$

si integri col medesimo strumento questa curva.

Come si vede dalla formola (40) per $Q = e^{-x}$, si ha:

$$y = (x + C)e^{-x}.$$

Integrando nuovamente questa curva, si trova:

$$y = \left(\frac{1}{2}x^2 + Cx + C'\right)e^{-x},$$

e così seguitando si ha, come si vede, al secondo membro sempre il prodotto di un polinomio in x per l'esponenziale e^{-x}.

I punti in cui queste curve tagliano l'asse delle x corrispondono evidentemente alle radici reali delle equazioni che si ottengono eguagliando a zero i successivi polinomii dei secondi membri e di cui ciascuno è la derivata del seguente.

Si ha così il mezzo di *costruire graficamente le radici reali di qualunque equazione algebrica.*

Giacchè sia assegnata un'equazione, p. es. di 3° grado:

$$\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}px^2 + qx + r = 0,$$

di cui le successive derivate sono:

$$\frac{1}{2}x^2 + px + q,$$

$$x + p.$$

Integriamo prima la curva $y = e^{-x}$ stabilendo le condizioni iniziali in maniera che, mentre la punta differenziale poggi sul punto di ordinata 1 (e quindi ascissa 0), la punta integrale poggi sul punto di ordinata p; indi integriamo la curva così ottenuta colle condizioni iniziali che al punto di ordinata p corrisponda il punto di ordinata q; infine integriamo la curva ora ottenuta colle condizioni iniziali che al punto di ordinata q corrisponda quello di ordinata r; abbiamo così infine la curva che colle sue intersezioni coll'asse delle x, dà le radici reali dell'equazione data.

Questo metodo è stato applicato nella fig. 19 per l'equazione

$$\frac{1}{2}x^2 - x + \alpha = 0,$$

in cui α è una costante che è stata fissata in varii modi.

Ponendo la punta differenziale a zero, cioè sull'asse delle x, e la punta integrale in una posizione A tale che sia OA eguale all'unità di misura dello strumento che qui si è presa 10 cm. (la fig. riproduce a circa $^1/_6$ dal vero il disegno originale), abbiamo una esponenziale. Integriamo tale esponenziale ponendo la posizione iniziale della punta integrale in B di ordinata -1, e abbiamo la curva NN′ che deve tagliare l'asse delle x in un punto di ascissa $+1$ a contare dal piede O_1 dell'asse y_1. Integriamo infine questa curva ponendo la posizione iniziale della punta integrale in un punto, sull'asse y_2, di ordinata α.

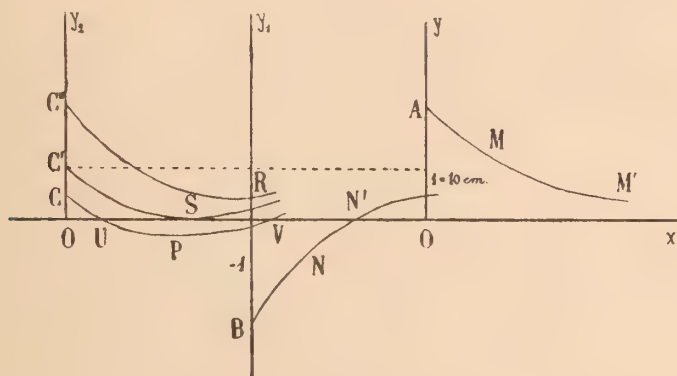



Fig. 19.ª

Se fissiamo $\alpha = \frac{1}{2}$ avremo una curva C′S′ tangente all' asse delle x; se fissiamo $\alpha > \frac{1}{2}$ otteniamo una curva C″R che non taglia l'asse (perchè le radici sono immaginarie), e se infine prendiamo $\alpha < \frac{1}{2}$ otteniamo la curva CP che taglia l'asse in due punti U e V equidistanti da S, e O_2U, O_2V (essendo O_2 il piede dell'asse y_2) rappresentano le due radici richieste.

§ 9. — *Integrazione dell' equazione* $y = a\dfrac{y' + m}{my' - 1} + Q(x)$.

Se poniamo ad $\alpha = \operatorname{arc\,tg} m$ l'angolo che nell'apparecchio il piano della rotella fa colla riga, si viene ad integrare, come abbiamo visto nel § 5, l'equazione (37) che è quella scritta nel titolo di questo §.

Vogliamo mostrare come, con tale dispositivo, possa costruirsi con tracciamento continuo la *parabola*.

Infatti, per $Q(x) = 0$, cioè ponendo la punta differenziale sull' asse delle x, e ponendo $\alpha = 90°$, cioè $m = \infty$, la precedente equazione diventa:

$$y = \frac{a}{y'}$$

che ha per integrale:

$$y^2 = 2ax\ .$$

Cosicchè, se noi poniamo a 90° il piano della rotella (quest'angolo si legge su di un apposito quadrante), e, reso immobile il carrello differenziale sulla sua guida,

facciamo scorrere tutto lo strumento sulle sue ruote (meglio riesce l'operazione se tale scorrimento si fa avvenire da destra verso sinistra), la punta integrale disegnerà un arco di parabola coll'asse parallelo a quello delle x, e tendente verso il vertice della parabola medesima, punto cui però non potrà mai giungere perchè il piano della rotella, procedendo lo strumento da destra verso sinistra, tende a porsi perpendicolarmente all'asse delle x, e quindi da un certo momento in poi si rende praticamente impossibile l'ulteriore movimento dello strumento medesimo.

La indicata costruzione della parabola ci sarà utile nel § seguente.

Prima di terminare questo § vogliamo osservare ancora che per $m=\infty$ la equazione differenziale diventa:

$$y=\frac{1}{y'}+Q(x)\ . \tag{58}$$

Questa equazione colla trasformazione

$$y=-\frac{1}{z}+Q(x)$$

si riduce a:

$$z'=Q'(x)\cdot z^2-z^3\ , \tag{59}$$

e possiamo perciò dedurre che coll'integrafo a riga rettilinea, posto a 90° il piano della rotella, può integrarsi anche la equazione differenziale (59).

§ 10. — *La curva delle probabilità.*

Ponendo a 14 cm. l'unità di misura a dello strumento e prendendo a anche come unità di misura assoluta, tracciamo la esponenziale AA'A'' (fig. 20) di equazione

$$y=e^{-x} \tag{60}$$

passante per A tale che OA sia eguale a 14 cm.

Poniamo indi a 7 cm. l'unità di misura dello strumento e a 90° il piano della rotella, e facciamo scorrere la punta differenziale sullo stesso asse x della costruzione precedente.

Si avrà, secondo quanto si è detto nel § 9, la parabola BB'B'' di equazione (essendo in questo caso $a=\frac{1}{2}$):

$$y_1^2=x\ . \tag{61}$$

Riportando allora, come indica la figura, sulla parte a sinistra del foglio, le ordinate di ambo le curve, in modo che quelle di (61) diventino le ascisse di

quelle di (60), si viene a disegnare facilmente per punti la curva PP′ di equazione:

$$y = e^{-y_1^2} \tag{62}$$

che è la cosidetta *curva delle probabilità.*

Essa ha un flesso nel punto P′ di ascissa $\frac{1}{\sqrt{2}}$, cioè nel punto che corrisponde a quella dell' esponenziale che ha per ascissa $\frac{1}{2}$.

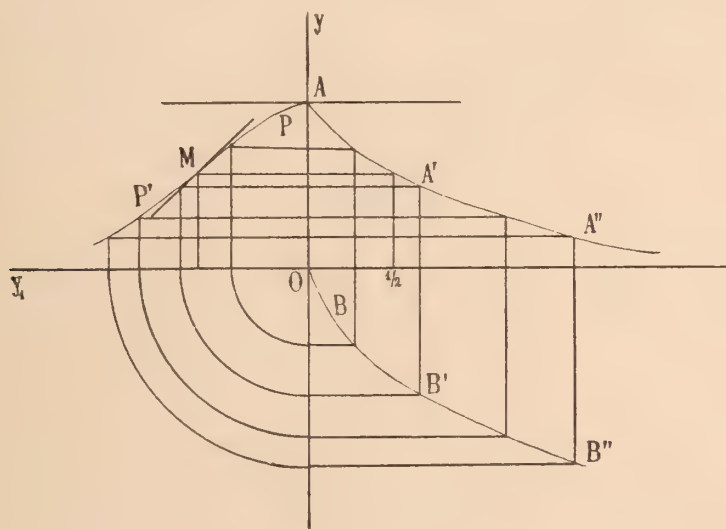



Fig. 20.ª

La costruzione di questa curva può farsi anche mediante l'integrafo di Abdank-Abakanowicz, tracciando similmente le due curve A e B; ma coll'integrafo a riga rettilinea la costruzione di tali due curve ausiliarie è più semplice perchè ambedue si ottengono *senza far muovere sulla sua guida il carrello differenziale,* ma col solo scorrimento sul foglio di tutto l' apparecchio, dopo aver posto una volta a 0° e un'altra volta a 90° il piano della rotella girante.

§ 11. — *Integrafi a perno fisso.*

In ogni integrafo la posizione del carrello determina la direzione del piano della rotella girante.

Questa determinazione può variare nei modi più diversi, e ad ogni modo corrisponde una diversa specie di equazione differenziale.

Immaginiamo un piano orizzontale che passi per l'estremo del perno G del carrello differenziale, e che si muova insieme a questo; mediante il movimento di questo piano ideale e il legame di questo col carrello integrale possiamo caratterizzare la dipendenza fra la posizione del carrello differenziale e la direzione del piano della rotella.

Supponiamo che il movimento di questo piano orizzontale sia la rotazione intorno ad un suo punto fisso O; questo punto lo chiameremo allora *perno fisso,* e i corrispondenti apparecchi li chiameremo *integrafi a perno fisso.*

L'integrafo di Abdank-Abakanowicz è di questa specie. Infatti in esso c'è un perno fisso O e il piano della rotella è mantenuto, mediante un parallelogrammo articolato, costantemente parallelo alla direzione della retta OG. Se si fa in modo che il piano della rotella sia mantenuto invece costantemente ad un angolo $\alpha = \operatorname{arctg} m$ colla direzione di OG (cosa che può farsi agevolmente rendendo mobile sul suo asse il perno del carrello integrale e adattandovi un opportuno cerchio graduato) si ha una variante dell'integrafo di Abdank-Abakanowicz degna della maggiore attenzione, e che non dovrebbe oramai essere più trascurata dai costruttori di questi apparecchi *).

Indicando con a l'unità di misura dello strumento, cioè la distanza di O dalla riga a destra su cui scorre il carrello differenziale, la curva tracciata dallo strumento è, con questo dispositivo, quella di equazione

$$y = \int \frac{am + Q(x)}{a - mQ(x)} dx + \text{cost.}, \tag{63}$$

se $y = Q(x)$ è, al solito, l'equazione di quella descritta dalla punta differenziale.

Per $\alpha = 90°$, questa formola diventa:

$$y = -a \int \frac{dx}{Q(x)}, \tag{64}$$

e quindi per $Q(x) = x$ (cioè facendo descrivere alla punta differenziale la retta bisettrice dell'angolo degli assi) si ha la curva:

$$y = -a \log x ,$$

e si viene a descrivere così in altro modo la *logaritmica* (v. § 6).

Posto $a = 1$ e integrando daccapo la curva ora ottenuta, sempre collo strumento a 90°, si ha l'integrale:

$$\int \frac{dx}{\log x} \tag{65}$$

che, come si sa, ha molta importanza in Analisi; esso ha relazione colla funzione *integrallogaritmo* di Soldner, e si può, come fece Gauss, rappresentare, con molta approssimazione, con esso, esteso da 2 ad x, il numero dei numeri primi compresi fra 2 e x.

Posto l'angolo α a 0°, si integri la retta $Q(x) = 2x$; si avrà la parabola $y = \frac{x^2}{a}$.

Si ponga ora l'angolo α a 90° e si integri la parabola così ottenuta; si avrà la iperbole equilatera di equazione $xy = a^2$, avente per assintoti gli assi. L'apparecchio, così adoperato, diventa dunque anche un *compasso iperbolico*.

---

*) E. Pascal, *Sopra una semplice ma notevole variante nella costruzione dell'integrafo di Abdank-Abakanowicz* (Rend. della R. Accad. di scienze fis. e mat. di Napoli, (3) v. 17, 1911).

Nell'integrafo di Abdank-Abakanowicz il piano della rotella passa costantemente per il punto all'infinito della retta OG; colla modificazione sopra descritta tal piano fa invece un angolo costante α con una retta che passa per tal punto all'infinito.

Immaginiamo ora un dispositivo alquanto diverso; facciamo che il piano della rotella passi, invece che per il punto all'infinito di OG, per un punto fisso della retta medesima, o, più generalmente, per un punto fisso P del piano orizzontale rotante intorno O, connesso rigidamente alla retta OG. Più generalmente ancora può farsi, col solito mezzo della mobilità del perno del carrello integrale attorno al suo asse, che il piano della rotella faccia sempre un angolo fisso colla retta passante per P. Abbiamo così il dispositivo rappresentato dalla fig. 21.

Il perno fisso è in O; in G è al solito il carrello differenziale e in H quello integrale. L'angolo POG è costante per modo che scorrendo G sulla riga CD, il punto P descrive un cerchio intorno O; l'angolo SHP è anche costante e HS è la

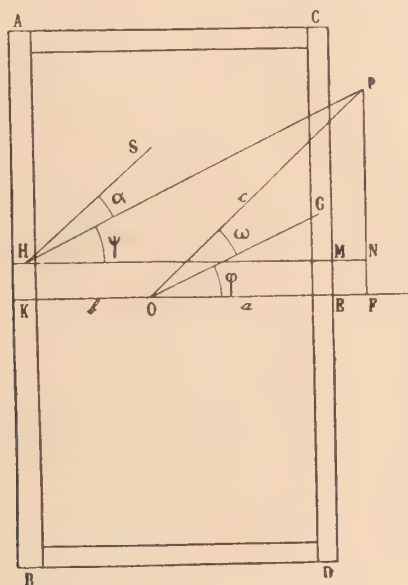



Fig. 21.ª

direzione del piano della rotella. Le aste HP e OG sono naturalmente scanalate in modo da permettere che i perni G e P scorrano nelle scanalature.

Poniamo:

$$OE = a \quad , \quad KO = b \quad , \quad OP = c$$

$$POG = \omega \quad , \quad GOE = \varphi \quad , \quad SHP = \alpha \quad , \quad PHM = \psi$$

$$\operatorname{tg} \alpha = m \quad , \quad \operatorname{tg} \omega = n \; .$$

Sia KE l'asse delle x; supposta allora al solito $Q(x)$ l'ordinata GE della curva descritta da G, e y quella HK della curva che in conseguenza verrà a descrivere H,

abbiamo:

$$
(66) \qquad \begin{aligned} y' &= \operatorname{tg}(\psi + \alpha) \\ &= \frac{m + \operatorname{tg}\psi}{1 - m\operatorname{tg}\psi} \end{aligned}
$$

$$
\mathrm{PF} = c\operatorname{sen}(\varphi + \omega) \qquad \mathrm{OF} = c\cos(\varphi + \omega)
$$

$$
\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathrm{Q}(x)}{a},
$$

onde:

$$
\operatorname{tg}\psi = \frac{\mathrm{PF} - \mathrm{NF}}{\mathrm{KO} + \mathrm{OF}} = \frac{c(\operatorname{sen}\varphi\cos\omega + \cos\varphi\operatorname{sen}\omega) - y}{b + c(\cos\varphi\cos\omega - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\omega)}
$$

$$
= \frac{c[\mathrm{Q}(x) + na] - y\sqrt{(1+n^2)(a^2 + \mathrm{Q}^2(x))}}{c[a - n\mathrm{Q}(x)] + b\sqrt{(1+n^2)(a^2+\mathrm{Q}^2(x))}},
$$

e sostituendo questa espressione in (66) e riducendo, si ha infine la relazione:

$$
(67) \qquad y' = \frac{(mb - y)\sqrt{1+n^2}\sqrt{a^2 + \mathrm{Q}^2(x)} + c(1 - mn)\mathrm{Q}(x) + ac(m+n)}{(b + my)\sqrt{1+n^2}\sqrt{a^2+\mathrm{Q}^2(x)} - c(m+n)\mathrm{Q}(x) + ac(1 - mn)}
$$

che è l'equazione differenziale integrata dall'integrafo che abbiamo descritto. La $\mathrm{Q}(x)$ è una funzione qualunque, e le costanti a, b, c, m, n, sono anche arbitrarie.

Per $\alpha = 0$, $\omega = 0$, $b = 0$, $a = 1$ si ha la equazione differenziale lineare:

$$
(68) \qquad y' = \mathrm{Q}(x) - \frac{\sqrt{1 + \mathrm{Q}^2(x)}}{c}\, y,
$$

e per $c = \infty$, cioè trasportando P all'∞, si ha di qui naturalmente la disposizione dell'integrafo di Abdank-Abakanowicz.

§ 12. — *Integrafo a due perni fissi. Integrazione di un'altra forma canonica dell'equazione di Riccati.*

I due perni fissi in questo nuovo dispositivo sieno i punti E ed O allineati sulla riga a sinistra dello strumento, perpendicolare all'asse delle x (v. fig. 22).

In G e H sieno, al solito, le posizioni dei due carrelli, differenziale e integrale, e l'asse delle x sia la retta Ox nella parte dello strumento più vicina all'operatore.

L'asta ES si conservi costantemente, mediante uno dei soliti parallelogrammi articolati, parallela alla HG, e HS sia la direzione della rotella girante. La HS è costantemente la diagonale di un trapezio che ha in E un vertice fisso, ma che varia al variare delle posizioni H, G dei due carrelli. Un congegno cinematico di questa specie si può costruire con molta facilità, e già da tre anni ne feci costruire un modello, che, insieme agli altri integrafi da me fatti costruire, è conservato nel mio *Gabinetto di Analisi Superiore della R. Università di Napoli.*

Un piccolo carrello in S scorra sull'asta OG e il perno verticale di questo carrello sia adattato alle scanalature delle aste ES ed HS; inoltre con un parallelo-

grammo articolato di cui un lato abbia E per punto medio e sia fissato in E perpendicolarmente ad ES, e il lato parallelo porti perpendicolarmente nel suo punto medio un manicotto dentro cui scorra l'asta HG, si conserva costantemente il parallelismo fra le due aste ES ed HG.

Esaminiamo ora a quale relazione analitica corrisponde il congegno cinematico indicato.

Poniamo:

$$Ox = a \quad , \quad OE = b \quad , \quad Gx = Q \ .$$

Si può far vedere che la retta HS è tangente costantemente ad un'iperbole

Fig. 22.ª

variabile di cui uno degli assintoti è fisso, ed è OA, e l'altro assintoto è OG; questa iperbole ha per equazione:

$$x(ay - Qx) = \frac{a^2 b}{4} \tag{69}$$

riferita agli assi Ox (asse delle x) e OA (asse delle y).

Infatti se P è un punto di tale iperbole ed è quindi PN $= y$, PT $= x$, e se indichiamo con ξ, η le coordinate di P riferite agli assi OG, OA, cosicchè sia OR $= \xi$, OM $= \eta$, si ha:

$$x = \xi \cos\theta \qquad , \qquad y = \text{PR} + \text{RN} = \eta + \xi \operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{Q}{\sqrt{a^2 + Q^2}} \quad , \quad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + Q^2}} \ ,$$

onde infine, sostituendo in (69), si ha:

$$\xi\eta = \frac{b\sqrt{a^2+Q^2}}{4} = k^2 , \tag{70}$$

cosicchè l'iperbole (69) ha per assintoti OA, OG.

Intanto dal parallelismo di ES e HG si ha:

$$OH \cdot OS = OE \cdot OG = b\sqrt{a^2+Q^2} = 4k^2 ,$$

onde, sapendo che la tangente all'iperbole (70) taglia sugli assintoti due segmenti il cui prodotto è proprio $4k^2$, risulta che effettivamente HS è tangente all'iperbole.

Supposta allora la rotella dell'integrafo nella direzione di HS, esaminiamo l'equazione differenziale della curva descritta da questa rotella.

Da (69) abbiamo, derivando:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2Q}{a} - \frac{y}{x} = \\ &= \frac{2Q}{a} - \frac{\eta}{\xi\cos\theta} - \operatorname{tg}\theta = \\ &= \frac{Q}{a} - \frac{\eta}{\xi\cos\theta} = \\ &= \frac{Q}{a} - 2\frac{\sqrt{a^2+Q^2}}{a\xi} . \end{aligned}$$

Intanto essendo, come si sa, P punto medio di HS, sarà M punto medio di HB, onde, indicando con y_1 la ordinata OH del punto della curva descritta da H, sarà $OM = \eta = \frac{1}{2}y_1$; perciò da (70) sarà anche:

$$\xi = b\frac{\sqrt{a^2+Q^2}}{2y_1} ,$$

e

$$\eta\frac{\sqrt{a^2+Q^2}}{a\xi} = \frac{y_1^2}{ab} .$$

Intanto la derivata y'_1 di y_1 è la stessa y' ora calcolata, perchè la tangente alla curva descritta dalla rotella è precisamente HS, onde abbiamo:

$$y'_1 = \frac{Q}{a} - \frac{y^2_1}{ab} ,$$

e se sostituiamo y ad y_1 e poniamo in vista la dipendenza da x della ordinata Q del punto G (perno del carrello differenziale), abbiamo infine la equazione differenziale:

$$ay' + \frac{y^2}{b} = Q(x) , \tag{71}$$

forma canonica, come si sa, della *equazione di Riccati*. Le costanti a, b sono positive e possono assumere qualunque valore; potrebbero assumersi anche eguali ad 1.

Abbiamo così un molto semplice *integrafo per l'equazione differenziale di Riccati*.

Se si fa, col solito congegno, che il piano della rotella faccia colla direzione HS un angolo $\alpha = \operatorname{arctg} m$ misurabile su apposito quadrante graduato, l'equazione differenziale che verrà a integrarsi è la seguente molto più complessa:

$$y' = \frac{abm + bQ(x) - y^2}{ab - mbQ(x) + my^2}. \tag{72}$$

§ 13. — *Integrafi a perno mobile. L'equazione differenziale dell'odografo relativo al movimento di un proiettile in un mezzo comunque resistente.*

Gli integrafi descritti nei §§ precedenti sono a perni fissi; in questo § e nei seguenti descriveremo degli integrafi in cui c'è un perno che si muove in corrispondenza al movimento di uno dei due carrelli, o il differenziale o l'integrale. Si hanno allora dei congegni cinematici nuovi e che corrispondono ad altri tipi di equazioni differenziali.

Facciamo prima che il movimento del perno dipenda da quello del carrello *integrale*; possiamo così avere l'integrafo per l'equazione differenziale dell'odografo relativo al movimento di un proiettile in un mezzo comunque resistente.

È un problema celebre della Meccanica classica, e che interessa specialmente i cultori di Balistica, quello della determinazione del movimento di un proiettile in un mezzo che resiste con una legge qualunque.

Con i principii elementari della Meccanica si giunge facilmente a stabilire l'equazione differenziale *intrinseca* del movimento (la cosiddetta equazione differenziale dell'*odografo*), cioè la relazione differenziale fra l'angolo α di inclinazione all'orizzonte, e la velocità del mobile; ma, stabilita questa equazione, si vide, sin dai tempi di D'Alembert, che essa non potea integrarsi, se non ricorrendo a speciali forme della legge di resistenza. E così, prima D'Alembert *), ed in epoca recente Siacci **), Appell ***), Ouivet ****) etc., cercarono i cosiddetti casi di integrabilità, cioè quelle leggi di resistenza per le quali l'integrazione dell'equazione dell'odografo possa ridursi alle quadrature.

Ma l'equazione generale è rimasta sempre insoluta.

Lo strumento, che presentai alla R. Accademia dei Lincei nella seduta del 4 maggio 1913 *****) e che era stato costruito sin dall'agosto del 1912, risolve grafica-

---

*) J. L. D'Alembert, *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, Paris, 1744, p. 359.

**) F. Siacci, Comptes Rendus de l'Acad. des sciences de Paris, t. 132, 1901, p. 1175; t. 133, 1901, p. 381.

***) P. Appell, Archiv der Mathem. und Physik, (3) v. 5, 1903, p. 177.

****) E. Ouivet, Comptes Rendus de l'Acad. des sciences de Paris, t. 150, 1910, p. 1229. Vedi anche, T. Hayashi, *Sur l'équation différentielle du mouvement d'un projectile sphérique pesant dans l'air* (Giorn. di Matematiche di Battaglini, (3) t. 49, 1911, p. 231).

*****) E. Pascal, *Integrafo per l'equazione differenziale dell'odografo relativo al movimento di un proiettile in un mezzo comunque resistente* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, (5) t. 22, 1913, 1° sem., p. 749).

mente il problema nella sua generalità; la legge di resistenza è rappresentata da una curva che si traccia arbitrariamente.

Il che è tanto più notevole, anche per la pratica balistica, inquantochè in tal modo noi possiamo servirci di una *legge sperimentale*, il cui diagramma sia stato costruito *per punti* mediante opportune esperienze, e ottenere così un risultato che risponda esattamente alla realtà fisica. Si può perciò fare a meno della *analiticità* della legge di resistenza, la quale potrà così anche non essere esprimibile con una

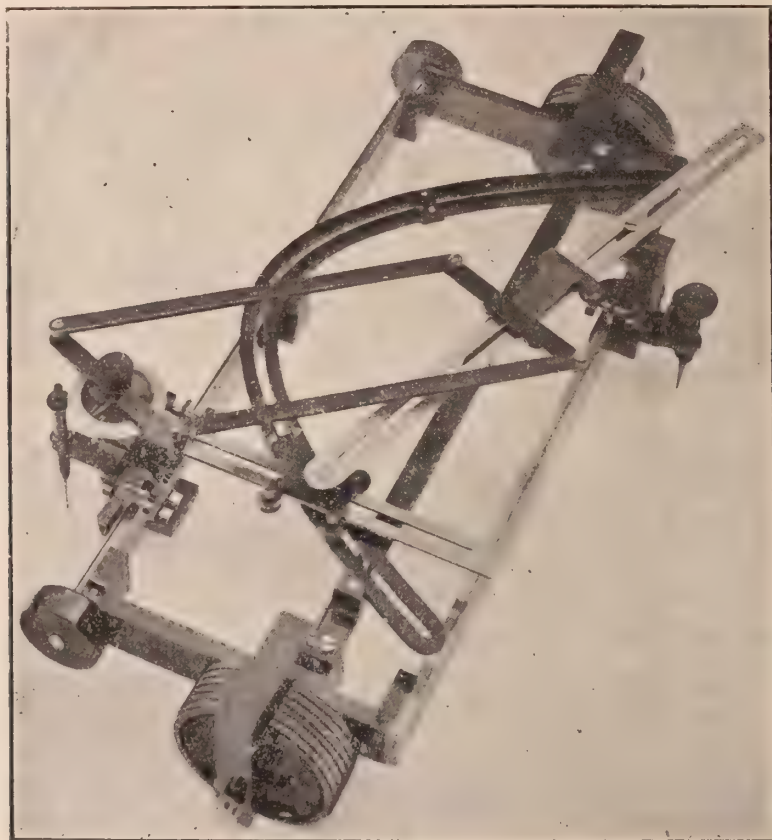



Fig. 23.ª

funzione analitica. Tentativi a tale scopo non sono mancati; e in un libro *) recente di L. Jacob, ingegnere generale dell'artiglieria navale francese, si accenna ad uno strumento di tale specie ma fondato su altri principii. Ma dopo aver detto che l'apparecchio era in costruzione nell'officina di esperienze di marina a Gavres, e che se ne preventivava il costo nientemeno che a 6000 lire (il mio apparecchio non costa neanche la dodicesima parte), finisce col dire che gli è impossibile il dare una descrizione completa dell'apparecchio.

*) L. Jacob, *Le calcul mécanique* (Paris, Doin, 1911). Cap. V.

L'equazione *intrinseca* del movimento del proiettile (equazione dell'*odografo*) è la seguente:

$$\frac{dv}{d\alpha}=\frac{v\,[\operatorname{sen}\alpha+\psi(v)]}{\cos\alpha} \tag{73}$$

dove v è la velocità, α è l'angolo di inclinazione all'orizzonte, $\psi(v)$ è una funzione della velocità, che rappresenta la resistenza del mezzo, divisa per l'accelerazione di gravità g.

Per il nostro scopo conviene di operare la trasformazione *):

$$v=e^{x}\quad,\quad \operatorname{sen}\alpha=-y\ , \tag{74}$$

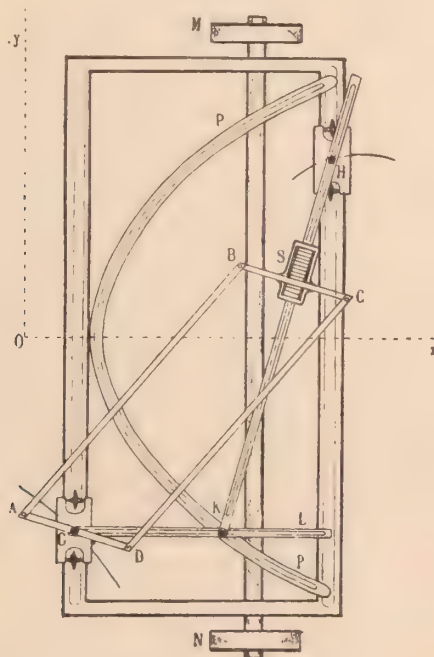



Fig. 24.ª

cosicchè la equazione dell'odografo diventa:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1-y^2}{f(x)-y} \tag{75}$$

dove

$$f(x)=\psi(e^{x}) \tag{76}$$

Ora l'integrafo per l'equazione (75) è facilmente costruibile. Immaginiamo il solito rettangolo di acciaio (fig. **24**) scorrevole sulle due ruote eguali **M**, **N** nel senso dell'asse delle x, e portante scorrevoli, sui suoi due lati paralleli, i due carrelli **H** (carrello differenziale) e **G** (carrello integrale).

---

*) È la trasformazione adoperata da Hayashi, loc. cit.

Al carrello G sia connessa rigidamente un'asta scanalata GL, parallela all'asse delle x, e su questa e su di una parabola anche scanalata PP sia mobile il perno K dell'asta rettilinea HK passante per il centro H del carrello differenziale e scorrevole in un manicotto S fissato perpendicolarmente al lato BC di un parallelogrammo articolato, mentre il lato parallelo AD sia fissato col suo punto medio al centro G del carrello integrale portante la rotella girante. Un opportuno congegno permette di fissare il piano della rotella girante con un angolo arbitrario sulla direzione AD, e quindi sulla direzione KH a questa perpendicolare.

La parabola, riferita all'asse delle x e all'asse perpendicolare passante per H, abbia per equazione:

$$x = 1 - y^2 ,$$

essendo 1 la larghezza del rettangolo fondamentale.

Nell'apparecchio costruito, si è assunta l'unità eguale a 15 cm.; e così l'altezza del rettangolo, che corrisponde, come si vede, alla massima apertura dell'arco di parabola, è di 30 cm.

Dal triangolo rettangolo HKL risulta che il rapporto dei cateti $\frac{\mathrm{HL}}{\mathrm{KL}}$ è la tangente dell'angolo di inclinazione di KH sull'asse delle x; ed essendo poi HL eguale evidentemente alla differenza delle ordinate delle curve descritte dai punti H e G, ordinate che indichiamo con $f(x)$ e y, ed essendo KL eguale ad $1 - y^2$ (ascissa del punto della parabola), ne viene che se il piano della rotella si dispone parallelamente a KH, cioè se si pone a 0° l'indice connesso alla rotella e che scorre sul quadrante unito al lato AD del parallelogrammo articolato, la curva descritta dalla rotella avrà in ogni punto la tangente parallela a KH, e cioè la derivata dell'ordinata rispetto all'ascissa di un punto di tale curva sarà:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x) - y}{1 - y^2} . \tag{77}$$

Se invece si dispone il piano della rotella perpendicolare a KH, cioè se si pone a 90° l'indice suindicato, allora si verrà ad integrare precisamente la (75).

Se infine si fissa lo stesso indice ad un angolo θ qualunque la cui tangente sia m,

$$m = \operatorname{tg} \theta ,$$

verrà ad integrarsi l'equazione più generale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(f(x) - y) + m(1 - y^2)}{-m(f(x) - y) + (1 - y^2)} . \tag{78}$$

Ma di questa al nostro scopo non serve che solo il caso speciale di $m = \infty$.

A compendiare in poche parole la costruzione del nostro apparecchio possiamo dire che esso non è altro che una specie di integrafo di **Abakanowicz**, in cui però invece di fare che il perno sia fisso in un punto, si fa che questo perno si muova, in corrispondenza al movimento del carrello integrale, su di una parabola.

Se, invece che su di una parabola, si fa scorrere il perno su di un'altra curva di equazione

$$x = \Phi(y) ,$$

connessa rigidamente al rettangolo fondamentale dell'apparecchio, si ha l'integrazione di ogni equazione del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x) - y}{\Phi(y)} , \tag{79}$$

ovvero (ponendo, come sopra, il piano della rotella in modo da fare un angolo θ con KH):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(f(x) - y) + m\Phi(y)}{-m(f(x) - y) + \Phi(y)} , \tag{80}$$

dove $\Phi(y)$ è l'ascissa di una curva secondo cui è poggiata un'asta scanalata connessa rigidamente allo strumento, ed $f(x)$ è l'ordinata di una curva arbitraria disegnata sul foglio di disegno, e sulla quale si fa scorrere la punta del carrello differenziale.

§ 14. — *Costruzione della curva della traiettoria mediante quella dell'odografo.*

A completare quanto abbiamo detto di sopra, mostriamo come si può, tracciata che lo strumento abbia la curva dell'odografo, costruire la curva della *traiettoria*.

Indicando con X, Y le coordinate di un punto della traiettoria, si hanno, come si sa, le formole:

$$\begin{cases} g \cdot dX = -v^2 d\alpha \\ g \cdot dY = -v^2 \operatorname{tg}\alpha \cdot d\alpha , \end{cases} \tag{81}$$

da cui, colle apposizioni (74), si hanno le altre:

$$\begin{cases} gX = \int \frac{e^{2x} dy}{\sqrt{1 - y^2}} \\ Y = -\int \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} dX , \end{cases} \tag{82}$$

dove nella prima x e y si intendono legati dall'equazione dell'odografo

$$y = F(x) \qquad \text{ovvero} \qquad x = F_1(y) , \tag{83}$$

e nella seconda y e X si intendono legati dall'equazione ottenuta colla integrazione della prima cioè da

$$gX = \varphi(y) , \qquad \text{ovvero} \qquad y = \varphi_1(gX) . \tag{84}$$

Cosicchè le (82) sono equivalenti a:

$$(85)\qquad \begin{cases} gX = \int \dfrac{e^{2F_1(y)}dy}{\sqrt{1 - F_1^2(y)}} \\ gY = -\int \dfrac{\varphi_1(gX)}{\sqrt{1 + \varphi_1^2(gX)}} d(gX) . \end{cases}$$

L'integrale della seconda è l'equazione della traiettoria

$$(86)\qquad gY = \omega(gX) ,$$

ovvero anche

$$(87)\qquad X_1 = \omega(X_1) .$$

Ciò posto, sia data (v. fig. 25) la curva $r = f(x)$ della resistenza, e mediante lo strumento se ne deduca l'odografo $y = F(x)$.

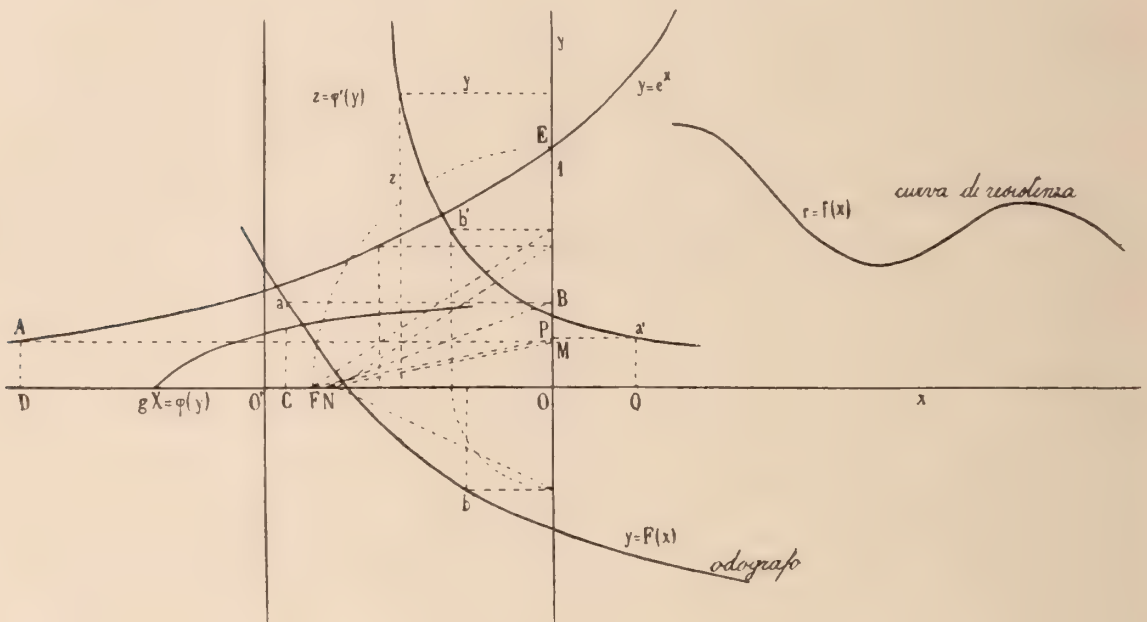



Fig. 25.ª

Sul medesimo foglio di disegno tracciamo la curva esponenziale servendoci dell'integrafo a riga rettilinea (v. § 6), e sia la curva AE, essendo OE = 1 = 15 cm.

Dalla curva F possiamo dedurre per punti la curva di ordinata

$$z = \frac{e^{2F_1(y)}}{\sqrt{1 - F_1^2(y)}}$$

procedendo nel seguente modo:

Tracciate da un punto a di F le due coordinate aB, aC, si raddoppii oC in D, e si trovi la corrispondente ordinata DA della curva esponenziale, e indi si riporti

A in M con una retta parallela ad x. Con centro B e con un'apertura di compasso eguale ad 1, cioè a 15 cm., si segni il punto N, cosicchè sarà $ON = \sqrt{1-y^2}$, essendo $OB = y$.

Si congiunga NM, e da F, tale che sia $OF = OE = 1 = 15$ cm., si conduca la parallela FP a NM.

Con un arco di cerchio di centro O si riporti B in Q, e il punto a' di coordinate OP, OQ, sarà il richiesto punto trasformato di a. In tal modo possiamo costruire per punti la curva di equazione

$$z = \varphi'(y) ,$$

per la quale l'antico asse delle x figura ora come asse delle y, e l'antico asse delle y come asse delle z.

Coll'integrafo per quadrature integriamo questa curva e otteniamo la curva di equazione

$$gX = \varphi(y) .$$

Ciò fatto, passiamo all'altra figura (v. fig. 26).

Fig. 26.ª

Da un punto a dell'ultima curva, tracciate le due coordinate aB, aC, si riporti B in D con un arco di cerchio di centro O.

Indi con centro C si faccia $CH = OK = 1 = 15$ cm. e da K si conduca KE parallela a HC.

Con un arco di cerchio di centro O si riporti E in F; OF sarà uguale a:

$$\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} .$$

Il punto a' trasformato di a sarà quello di coordinate OD, OF, e si otterrà così

la curva $a'b'c'$, il cui integrale, ottenuto coll'integrafo per le quadrature, sarà la *traiettoria* $Y = \omega(X)$.

Se la resistenza è zero, cioè se la curva delle resistenze è l'asse delle x della fig. 25, la curva $a'b'c'$ della fig. 26 deve risultare una retta, cosicchè il suo integrale risulterà precisamente una parabola. Quanto più la predetta curva $a'b'c'$ differisce da una retta, tanto più la traiettoria differirà da una parabola.

§ 15. — *Integrafo per la quadratura del prodotto di due funzioni* *).

Facendo ora che il movimento del perno dipenda da quello del carrello differenziale, possiamo costruire un integrafo per effettuare la quadratura del prodotto di due funzioni rappresentate da due curve, del che potrà poi farsi una importante applicazione alla risoluzione dell'*equazione integrale* del tipo di Volterra.

Il principio che seguiamo per costruire tale integrafo è quel che deriva dalle seguenti considerazioni: nell'integrafo per quadrature di Abdank-Abakanowicz, si fa in modo, mediante un parallelogrammo articolato, che il piano della rotella girante sia sempre parallelo all'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui un vertice sia un punto fisso sull'asse delle x (il *perno* dello strumento), il cateto uscente dal *perno* sia la lunghezza che si assume come unità di misura a, e l'altro cateto sia l'ordinata del punto della curva integranda f; in tal modo si viene ad ottenere:

$$\int_0^x \frac{f(x)}{a} dx . \tag{88}$$

Ma se noi facciamo che la lunghezza a sia variabile e varii come l'inversa dell'ordinata dei punti di un'altra curva F, otteniamo precisamente l'integrale richiesto:

$$\int_0^x f(x) \mathrm{F}(x) dx . \tag{89}$$

Bisogna dunque fare che i carrelli differenziali sieno *due*, e che il *perno sia mobile* al variare della posizione di uno di essi. Teniamo allora presente il solito schema della figura dell'integrafo.

Sia ABCD (fig. 27) il solito rettangolo pesante di acciaio e ottone capace di muoversi parallelamente a sè stesso da sinistra a destra e viceversa, mediante le due ruote eguali M, N, sul foglio orizzontale da disegno; sia CD il lato su cui scorre il carrello differenziale e AB quello su cui scorre il carrello integrale. L'asse delle x sia al solito a metà dell'altezza del rettangolo, sulla linea HG.

Sul lato CD, sieno mobili, a diversa altezza, due punti rigidamente connessi a due carrelli scorrevoli su due aste parallele e vicine a CD (disposti naturalmente in maniera che i loro movimenti non si inceppino a vicenda).

Di questi due punti uno sia f e l'altro F, ed essi descrivano le due curve di

*) E. Pascal, *L'integrafo per la risoluzione grafica delle equazioni integrali* (Rend. della R. Acc. delle sc. fis. e mat. di Napoli, (3) t. 19, 1913).

ordinate $f(x)$, $F(x)$. Ad ottenere il nostro scopo si deve fare che al movimento di F, il perno E scorra su HG in modo che sia sempre

$$EG = \frac{1}{FG} .$$

Ora ciò può ottenersi con estrema facilità se inseriamo nel rettangolo un arco di iperbole equilatera, costruito in ottone, e avente per equazione:

$$xy = \frac{1}{4} ,$$

cogli assintoti CG e FG, e obblighiamo, mediante un'opportuna molla, un'asta EF, scorrevole con una scanalatura intorno al punto F, e di cui il punto E scorra a sua

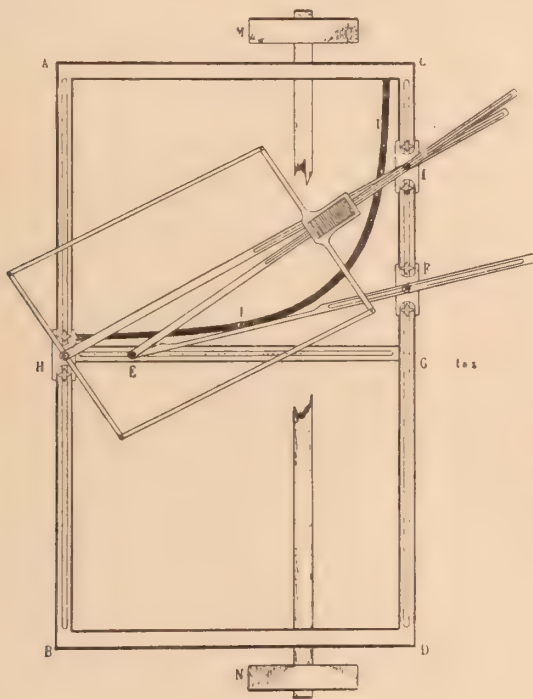



Fig. 27.ª

volta su di una scanalatura praticata su HG, a mantenersi costantemente tangente all'iperbole. Il prodotto dei segmenti tagliati sugli assintoti da questa tangente è allora precisamente l'unità di misura che può prendersi eguale a 10 cm.

Ciò fatto, se attorno al punto E facciamo rotare una riga che passi per l'altro punto f e a cui si faccia descrivere la curva di ordinata $f(x)$, e se col solito parallelogrammo articolato, si fa che il piano della rotella girante si mantenga costantemente parallelo alla direzione Ef, si sarà venuti a costruire l'integrafo che dà l'integrale del prodotto delle due funzioni $f(x)$, $F(x)$.

Un'osservazione si presenta qui immediatamente. Sarà utile nella costruzione di questo apparecchio di fare che la larghezza del rettangolo fondamentale, cioè la

HG sia sensibilmente maggiore di quella degli altri integrafi sopradescritti, e pei quali la larghezza dello strumento avea finora poca importanza. Ciò evidentemente per fare che il perno E abbia una corsa più ampia, e quindi il punto F possa dippiù avvicinarsi a G.

Il rettangolo fondamentale degli integrafi delle altre specie da me fatti costruire ha le dimensioni da cm. 30 × 10 a 30 × 15. Per questo integrafo converrà invece giungere fino a cm. 30 × 25 o 30 × 30.

Avvicinandosi il punto F a G, il perno D si allontana rapidamente, e quindi l'uso dell'apparecchio è limitato a quelle curve F le cui ordinate $F(x)$ sieno tutte positive (o se si vuole anche tutte negative) e non minori di una certa quantità dipendente dalla lunghezza HG.

Ciò però non costituisce una sostanziale limitazione, perchè se la curva F assegnata attraversa l'asse delle x, la si può spostare parallelamente all'asse delle y di una certa quantità α, eseguire la integrazione, e indi dalle ordinate della curva ottenuta togliere quelle dell'altra ottenuta coll'integrazione di $\alpha f(x)$, integrazione che si ottiene dallo stesso apparecchio fissando la punta F all'altezza α sull'asse delle x, e facendo descrivere nuovamente all'altra punta f la curva di ordinate $f(x)$.

§ 16. — *Integrafo pel tracciamento continuo della curva* $y = ce^{\int F(x)dx}$.

Vogliamo utilizzare lo strumento descritto nel § precedente per una applicazione.

Immaginiamo che allo strumento medesimo sia aggiunta una riga girevole sul perno del carrello integrale (v. fig. 27) e che passi con una scanalatura per il perno del carrello differenziale della punta f; questa riga si possa poi fissare con una vite in qualunque posizione attorno al perno del carrello integrale, in modo che col movimento di questo carrello, essa sia costretta a muoversi solo parallelamente a sè stessa.

Se fissiamo questa riga nella posizione iniziale Hf (essendo H il carrello integrale sull'asse delle x che prendiamo anche come asse delle t, ed essendo $fG = c$), se lasciamo inoltre f libero a muoversi sulla sua guida DC, e se facciamo infine percorrere alla punta F la curva di ordinate $F(x)$, la rotella in H, il cui piano, per effetto del solito parallelogrammo articolato, si conserva sempre parallelo ad Ef, descriverà una curva le cui ordinate differiranno costantemente della quantità c da quelle della curva che descrive la punta f, il cui movimento automatico serve poi a sua volta, insieme a quello di F imposto da noi, a far deviare continuamente la direzione della rotella.

La curva descritta dalla punta f (curva che potrà venir disegnata automaticamente se al carrello f congiungiamo, nel solito modo, una matita scrivente) abbia per equazione:

$$y = f(x) ;$$

quella descritta dalla rotella integrale avrà per equazione (in forza di quanto abbiamo detto nel § 15):

$$y_1 = \int_0^x f(x) F(x) dx ,$$

e intanto è:

$$y - y_1 = c\ ,$$

cosicchè è soddisfatta la

$$f(x) = \int_0^x f(x) \mathrm{F}(x) dx + c \tag{90}$$

con

$$f(0) = c\ ,$$

da cui si ha appunto la

$$y = f(x) = ce^{\int \mathrm{F}(x)dx}. \tag{91}$$

Di ciò potrebbero farsi molte applicazioni. Così p. es. se poniamo $c = 1$, ed $\mathrm{F}(x) = -2x$, cioè se alla punta F facciamo percorrere la retta di equazione $y = -2x$, lo strumento descriverà direttamente la *curva delle probabilità* $y = e^{-x^2}$ di cui abbiamo trattato con metodo indiretto e più complesso nel § 10.

§ 17. — *Integrazione dell'equazione differenziale lineare a coefficienti generali.*

Le considerazioni contenute nel § precedente pcssono essere estese per ottenere un altro risultato non privo di interesse.

Abbiamo visto nel § 5 che mediante l'integrafo a riga rettilinea si ottiene la integrazione dell'equazione differenziale lineare ridotta al *tipo canonico*

$$ay' + y = \mathrm{Q}(x)\ .$$

Ma può vedersi ora che con una semplice aggiunta all'apparecchio del § precedente può integrarsi direttamente l'equazione differenziale

$$y' = \mathrm{F}(x)y + \psi(x)\ , \tag{92}$$

senza che vi sia bisogno, come nell'altro caso, di ridurre prima tale equazione alla suddetta forma canonica.

Poniamo, come nella fig. 27, ancora la riga Hf snodabile attorno al perno H del carrello integrale, ma facciamo (v. fig. 28), inserendo al solito modo un parallelogrammo articolato, che questa riga si conservi sempre parallela ad un'altra riga Kφ essendo K il punto medio del lato AB del rettangolo fondamentale e φ il perno di un carrello scorrevole su CD e a cui si faccia descrivere una curva di ordinate $\varphi(x)$.

A differenza della figura precedente, in questa l'iperbole è stata collocata nella parte inferiore dello strumento, al disotto dell'asse delle x, il che può farsi onde evitare complicazioni e sovrapposizioni sia nel disegno che nella costruzione; ciò porterà naturalmente che il carrello F anzichè al disopra stia anch'esso al disotto dell'asse delle x, e che per curva F bisognerà adoperare la simmetrica della data rispetto all'asse delle x. Si avrà così il vantaggio di fare che il movimento del carrello F non inceppa quello degli altri.

È evidente che coll'indicato dispositivo si verrà, precisamente come nel § precedente, a soddisfare una relazione come la (90), in cui alla lunghezza costante c si sia sostituita la data $\varphi(x)$ variabile secondo x.

Si avrà dunque:

$$f(x) = \int_0^x f(x) F(x) dx + \varphi(x) \tag{93}$$

con

$$f(0) = \varphi(0) .$$

Di qui si ha, derivando:

$$f'(x) = f(x) F(x) + \varphi'(x) ,$$

e ponendo:

$$\varphi'(x) = \psi(x)$$

$$f(x) = y ,$$

si ha precisamente la (92).

Data dunque la (92), e cioè le due curve F e ψ, dalla curva ψ si deduca, con

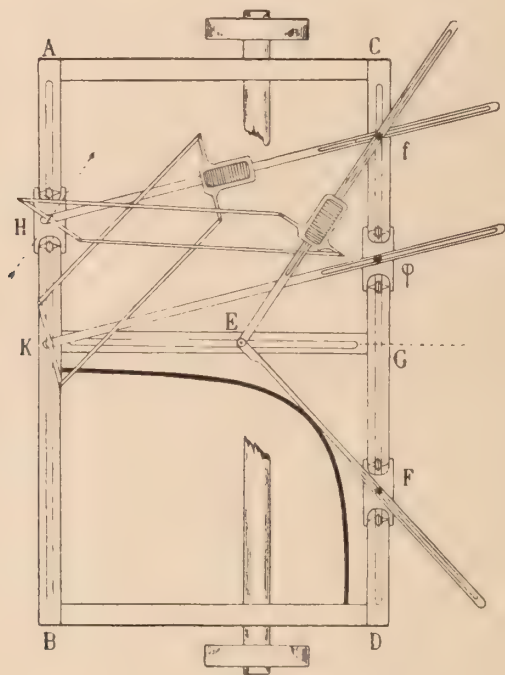



Fig. 28.ª

un integrafo per quadrature, la curva φ, e indi coll'applicazione dello strumento si avrà la curva $y = f(x)$, soluzione della equazione (92). Per $\psi = 0$ e $\varphi = c$, si ritorna al caso del § 16.

§ 18. — *Risoluzione dell'equazione integrale del tipo di Volterra.*

Un'altra, più importante, applicazione dell'apparecchio descritto nel § 15, è quella relativa alla risoluzione dell'*equazione integrale* del tipo di Volterra.

L'operazione analitica rappresentata dalle equazioni integrali è un'operazione di natura più elevata di quelle rappresentate dalle ordinarie equazioni differenziali, giacchè nelle equazioni integrali compare il fenomeno dell'*eredità* che non compare in queste. La *rotella girante*, che, adattata ad un opportuno congegno cinematico, può

servire a risolvere le equazioni differenziali, cioè ad attuare quella *continuità* che è inerente all'operazione rappresentata dall'equazione differenziale stessa (*continuità* che da un certo punto di vista è anch'essa un'*eredità*, sebbene di specie inferiore, perchè le posizioni seguenti della rotella dipendono naturalmente dalle posizioni e dalle direzioni precedenti), la rotella girante, dico, non può più bastare per le equazioni integrali, giacchè per queste (se si vuol tracciarne con movimento continuo le curve che le risolvono) occorre qualcosa che possa cinematicamente attuare il fenomeno più complesso dell'*eredità*.

Ma se invece noi ci contenteremo, adoperando la formola risolutiva delle equazioni integrali del tipo di Volterra, di trovare per approssimazione la curva f per punti, cioè di adoperare uno strumento che ci possa far trovare, per ogni assegnata ascissa, il punto corrispondente di f, allora basterà ancora la rotella girante.

L'equazione integrale che considereremo è la seguente:

$$\int_0^t f(x)\mathrm{F}(t-x)dx = f(t) - \varphi(t) , \tag{94}$$

in cui F è il nucleo, $\varphi(t)$ è una funzione conosciuta ed f è la funzione incognita.

Posto

$$\Phi(t-x) = \mathrm{F}(t-x) + \mathrm{F}_1(t-x) + \mathrm{F}_2(t-x) + \ldots , \tag{95}$$

e

$$\mathrm{F}_n(t) = \int_0^t \mathrm{F}_{n-1}(t-x)\mathrm{F}(x)dx = \int_0^t \mathrm{F}_{n-1}(x)\mathrm{F}(t-x)dx , \tag{96}$$

la formola risolutiva della (94) è, come si sa:

$$f(t) = \varphi(t) + \int_0^t \varphi(x)\Phi(t-x)dx . \tag{97}$$

Immaginiamo allora fissato un valore t_0 di t, e disegnata la curva di ordinate $\mathrm{F}(x)$ e quella di ordinate $\mathrm{F}(-x)$.

Se adattiamo al perno F dell'apparecchio del § 15 una spranghetta mobile perpendicolare a CD e portante una punta che si possa fissare a varie distanze (misurabili su apposita graduazione) da CD verso destra, basterà descrivere con questa punta, fissata alla distanza t_0, la suddetta curva di ordinate $\mathrm{F}(-x)$, per ottenere lo stesso di ciò che si avrebbe lasciando fissa la punta su CD e spostando invece di t_0 verso sinistra la curva stessa sul foglio da disegno.

Facendo descrivere alla punta f dello strumento la curva di ordinate $\mathrm{F}(x)$ e alla punta F, fissata alla distanza t_0, quella di ordinate $\mathrm{F}(-x)$ e prolungando l'integrazione sino a $x = t_0$, si verrà, per effetto di (96) per $n = 1$, ad avere un punto della curva di ordinate $\mathrm{F}_1(x)$ e propriamente il punto corrispondente all'ascissa t_0. Così potrà disegnarsi per punti la curva $y = \mathrm{F}_1(t)$ (l'asse delle t coincide con quello delle x dello strumento d'integrazione).

Quindi coll'applicazione ripetuta della stessa operazione si potranno disegnare prima le curve di ordinate $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots$ (e di queste basterà disegnare solo le prime perchè si sa che nello sviluppo infinito (95) basta limitarsi solo ai primi termini otte-

nendo sufficiente approssimazione, essendo quello sviluppo rapidamente convergente), indi, costruita la curva di ordinate Φ, costruire, mediante (97), la f.

Questa f e le $F_1, F_2, \ldots$ restano costruite per punti e non con movimento continuo, perchè p. es., lo strumento descriverà bensì con continuità la curva di ordinate

$$\int_0^z \varphi(x)\Phi(t-x)dx\ ,$$

per un t fisso, ma di tal curva bisognerà però considerare solo il punto di ascissa $z=t$, e questo è un punto dell'altra curva che si richiede al nostro scopo.

§ 19. — *Integrafo a vettore costante.*

Sopprimiamo la riga su cui scorre il carrello differenziale e lasciamo solo quella AB su cui scorre il carrello integrale e a cui è attaccata la rotella girante (v. fig. 29).

Al perno C di questa fissiamo con un' assegnata direzione (misurabile al solito su apposito quadrante graduato) un'asta graduata L, portante una punta verticale che si possa fissare con una vite P ad una qualunque data distanza da C.

A questa punta si faccia descrivere una curva assegnata di ordinate $Q(x)$; la rotella girante descriverà una curva che è l' integrale di una caratteristica equazione differenziale che ora vogliamo calcolare.

In sostanza questo integrafo non è che una trasformazione del noto *planimetro a scure* di Prytz *), il quale è uno strumento semplicissimo, ma piuttosto rudimentale, che non può certamente essere annoverato fra gli strumenti di precisione.

Questo planimetro è formato di un'asta di acciaio piegata ad angolo retto alle sue due estremità, e di queste due sue appendici (di eguale lunghezza e che insieme all'asta principale stanno in un medesimo piano) una termina a punta e l'altra termina a scure. Facendo percorrere alla punta una curva disegnata sul foglio orizzontale, si può dalla curva che verrà a tracciare la scure sul foglio medesimo, dedurre una determinazione *approssimata* delle aree piane, della posizione del baricentro, e la risoluzione di altri problemi pratici.

Si può calcolare, come ha fatto recentemente il Prof. A. Scribanti **), l' equazione differenziale che lo strumento, lasciato com'è, viene ad integrare; ma colle modificazioni e col dispositivo accennato si viene ad avere qualcosa di ben più generale e completo.

Nell' integrafo a riga rettilinea (v. § 5) è, in tutte le posizioni, costante la proiezione sull'asse perpendicolare a quello dello strumento (sull'asse delle x), della distanza fra le due punte, la differenziale e l'integrale; in questo apparecchio è costante invece la distanza stessa; ecco perchè lo chiameremo *integrafo a vettore costante.*

---

*) E. Pascal, *Il planimetro a scure di Prytz trasformato in integrafo per una notevole equazione differenziale* (Rend. della R. Accad. delle Sc. fis. e mat. di Napoli, (3) v. 19, 1913).

**) A. Scribanti, *Il planimetro a scure considerato come integrafo per equazioni differenziali* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, v. 48, 1912-13); *Ancora intorno al planimetro a scure applicato all' integrazione di equazioni differenziali* (Ibid.). Altri lavori dello stesso Autore sul planimetro a scure sono in Giorn. di mat. di Battaglini, (3) v. 51, 1913, e in Nuovo Cimento, (6) v. 51, 1913.

Calcoliamo ora l'equazione differenziale che lo strumento riesce ad integrare.

Assunto un qualunque asse come asse delle x, e uno ad esso perpendicolare come asse delle y, sia θ l'angolo che il piano della rotella fa coll'asse delle x, sia α l'angolo che lo stesso piano fa coll'asta che va a terminare al punto della curva differenziale, sia l la lunghezza di quest'asta e sia infine:

$$y_1 = Q(x_1) \tag{98}$$

l'equazione della curva differenziale.

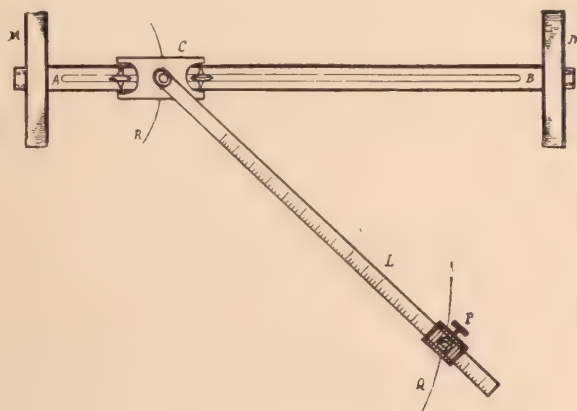



Fig. 29.ª

Se y è l'ordinata del punto della curva integrale si ha:

$$Q(x_1) - y = l \operatorname{sen}(\theta - \alpha)$$
$$x_1 = x + l \cos(\theta - \alpha)$$

donde

$$y + l \operatorname{sen}(\theta - \alpha) = Q(x + l \cos(\theta - \alpha)) \,. \tag{99}$$

Ponendo ora

$$\begin{cases} l \cos\alpha = r \\ l \operatorname{sen}\alpha = s \end{cases} \tag{100}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad , \quad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \quad ,$$

la (99) diventa:

$$y + \frac{ry' - s}{\sqrt{1+y'^2}} = Q\left(x + \frac{r + sy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) , \tag{101}$$

e questa è la richiesta equazione differenziale.

Le costanti r, s sono qualunque, positive o negative; la somma dei loro quadrati è il quadrato della quantità l; date r ed s possono dalle (100) dedursi subito la lunghezza l e l'angolo di deviazione α.

L'equazione (**101**) ha una forma caratteristica; per $s=0$ essa si riduce naturalmente a quella calcolata da Scribanti; inoltre ponendo

$$x'=\frac{1}{y'}=\frac{dx}{dy}\,,$$

la (**101**) può scriversi:

$$y+\frac{ry'-s}{\sqrt{1+y'^2}}=Q\left(x+\frac{rx'+s}{\sqrt{1+x'^2}}\right), \tag{102}$$

ed appare subito una analogia fra la formazione del primo membro e quella dell'argomento di Q.

Mutando segno ad s (il che significa mutar segno alla deviazione del piano della rotella), e indicando con P la funzione inversa di Q, cioè supposto che da (98) si deduca

$$x_1=P(y_1)\,,$$

da (101) si ha:

$$x+\frac{rx'-s}{\sqrt{1+x'^2}}=P\left(y+\frac{r+sx'}{\sqrt{1+x'^2}}\right) \tag{103}$$

che è dello stesso tipo della (**101**) stessa, solo che si è scambiato x con y.

Se $P\equiv Q$, cioè se la equazione (98) è simmetrica in x e y, la (**103**) coincide colla (**101**), salvo lo scambio di x con y, cioè in tal caso le curve integrali ottenute con un angolo di deviazione α, sono le simmetriche, rispetto alla bisettrice dell'angolo degli assi, di quelle ottenute coll'angolo di deviazione contraria $-\alpha$. Poichè è arbitraria la posizione degli assi coordinati (a differenza dell'integrafo a riga rettilinea e degli altri integrati), lo stesso deve verificarsi non solo per una curva di equazione (98) che sia simmetrica in x e y, ma anche per una che, con un cangiamento di assi, possa ridursi ad essere tale.

Dalla arbitrarietà della posizione degli assi coordinati, deriva una importante proprietà della equazione (**101**), ed è che *questa conserva la medesima forma con una qualunque trasformazione delle coordinate ortogonali*, come del resto può agevolmente verificarsi sull'equazione stessa, perchè con una rotazione degli assi

$$x=X\cos\omega-Y\,\mathrm{sen}\,\omega$$
$$y=X\,\mathrm{sen}\,\omega+Y\cos\omega$$

la (**101**) diventa:

$$\left(Y+\frac{rY'-s}{\sqrt{1+Y'^2}}\right)\cos\omega+\left(X+\frac{r+sY'}{\sqrt{1+Y'^2}}\right)\mathrm{sen}\,\omega=$$
$$=Q\left[-\left(Y+\frac{rY'-s}{\sqrt{1+Y'^2}}\right)\mathrm{sen}\,\omega+\left(X+\frac{r+sY'}{\sqrt{1+Y'^2}}\right)\cos\omega\right]$$

dalla quale si ha appunto:

$$Y+\frac{rY'-s}{\sqrt{1+Y'^2}}=\text{funz.}\left(X+\frac{r+sY'}{\sqrt{1+Y'^2}}\right).$$

Facendo percorrere alla punta differenziale una retta, cioè ponendo

$$Q(x_1) = -mx_1 ,$$

si riconosce che con questo integrafo può integrarsi qualunque equazione differenziale del tipo

$$\frac{ay'+b}{\sqrt{1+y'^2}} = y + mx \tag{104}$$

dove a, b, m sieno costanti qualunque.

L'integrazione di siffatte equazioni differenziali si riduce facilmente ad una quadratura, perchè, assumendo la suddetta retta per asse delle x, l'equazione deve ridursi al tipo:

$$y + \frac{ry'-s}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \tag{105}$$

che corrisponde alla quadratura

$$dx = \int \frac{y\sqrt{r^2+s^2-y^2}-rs}{y^2-s^2}\, dy ;$$

la costante di integrazione è quindi *additiva*.

Ne deduciamo che, collocando inizialmente in diverse posizioni la punta integrale, e facendo ogni volta percorrere alla punta differenziale sempre la stessa retta, le curve che lo strumento viene a disegnare devono rappresentare le diverse posizioni di una stessa curva che si muove parallelamente a sè stessa, mentre la suddetta retta striscia su sè stessa.

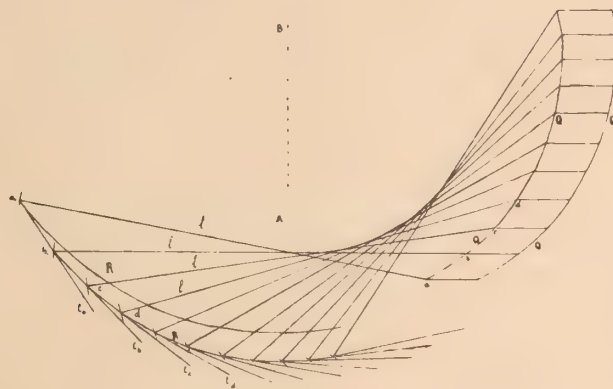



Fig. 30.ª

Dato l'angolo di deviazione α della rotella, la lunghezza l della riga, la curva Q, e la posizione iniziale della punta integrale, si possono naturalmente, come per ogni integrafo, eseguire sul foglio di disegno quelle costruzioni che valgono a far tracciare con maggiore o minore approssimazione la curva integrale R.

Si divida la Q in tanti archetti nei punti $a, b, c \ldots$; indi posto in a_1 la posizione iniziale della curva R, in modo cioè che sia $a_1 a = l$, si tracci la retta t_1 facente l'angolo α con $a_1 a$ e che sarà la tangente alla R in a_1.

Con centro b e raggio l si trovi su t_a il punto b_1 e congiunto b_1 con b si conduca da b_1 la t_b facente l'angolo α con $b_1 b$. Così di seguito, la curva $a_1 b_1 c_1 \ldots$ sarà la curva R con tanta maggiore approssimazione quanto più piccoli sono gli archetti nei quali si è divisa la curva Q.

Questa costruzione ha naturalmente un carattere di discontinuità; non v'è che lo strumento che colla sua rotella girante possa ristabilire la continuità, dando come risultato finale una curva che si differenzia tanto più da quella tracciata con approssimazione, quanto più ci allontaniamo dal punto iniziale.

Il disegno della fig. 30 rappresenta appunto, in scala ridotta, il risultato ottenuto coll'apparecchio e quello ottenuto con un disegno d'approssimazione.

Poichè nell'apparecchio la penna scrivente è ad una distanza fissa, in direzione fissa, dalla rotella girante, così la curva Q che si adopera per disegnare coll'apparecchio la R, non può essere la medesima di quella che si adopera per disegnare per approssimazione la R, ma deve essere questa trasportata di una quantità fissa nella direzione perpendicolare all'asse AB dello strumento che si è adoperato. Ecco perchè nella figura appaiono due curve Q.

§ 20. — *Integrafi a guida curvilinea. — Equazioni differenziali dei tipi* $ay' = Q(x + \varphi(y))$, $\varphi(y)y' + y = Q(x + \varphi(y))$, *e altre più generali* *).

Negli integrafi finora descritti le guide sulle quali scorrono i due carrelli, differenziale e integrale, sono rettilinee e nelle direzioni dei lati AB, CD del rettangolo fondamentale.

Facciamo ora che la guida a sinistra (quella sulla quale scorre il carrello integrale), invece d'essere rettilinea, sia piegata secondo una curva EFB (v. fig. 31).

Riferiamo questa curva a due assi ortogonali; uno sia l'asse delle X che coincida coll'asse delle x del foglio di disegno, e l'altro, mobile collo strumento, sia il lato CD su cui scorre il carrello differenziale; sia $X = \varphi(y)$ l'equazione della curva EFB.

Vediamo la relazione che c'è in ogni istante fra l'ascissa della punta del carrello differenziale e quella del carrello integrale. Indicando con x questa e con x_1 l'ascissa di un punto della curva differenziale (cioè di quella che descrive la punta del carrello a destra), si ha evidentemente:

$$x_1 = x + X = x + \varphi(y) ,$$

se ci si riferisce al medesimo asse y.

Ciò posto, dobbiamo ora stabilire il modo di collegamento dei due carrelli, e qui naturalmente ci si presentano tutte le svariate distinzioni che abbiamo di sopra enumerate per il caso delle guide rettilinee.

In primo luogo i due carrelli G, H sieno collegati con un parallelogrammo articolato in modo che la direzione della rotella girante sia sempre parallela alla

*) E. Pascal, *Sopra alcune classi di integrafi per equazioni differenziali* (Rend. della R. Accad. delle scienze fis. e mat. di Napoli, (3) v. 17, 1911).

congiungente G con un punto fisso (perno) dell'asse delle x, distante della quantità a dalla proiezione di G su x. La tangente alla curva $y = y(x)$ descritta dalla rotella girante avrà allora per coefficiente angolare in ogni istante:

$$a \frac{dy}{dx} = Q(x_1) ,$$

(essendo $Q(x_1)$ l'ordinata della curva differenziale e a l'unità di misura dello strumento) e perciò si verrà ad integrare l'equazione differenziale

$$ay' = Q(x + \varphi(y)) , \tag{106}$$

dove Q è una funzione arbitrariamente data e φ è anche una funzione arbitraria, ma ad ogni φ corrisponde un apparecchio apposito, o meglio una speciale guida curvata, secondo la curva di equazione $X = \varphi(y)$, da adattare alla parte sinistra

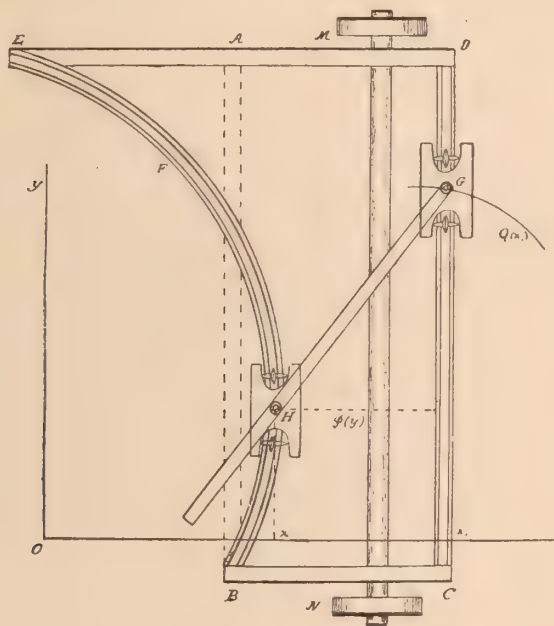



Fig. 31.ª

dell'apparecchio. Può perciò costruirsi un solo apparecchio con parecchie guide di ricambio.

Se ora immaginiamo che alla rotella girante sia unito il solito congegno col quale il piano di essa possa farsi girare e fissare di un angolo $\alpha = \text{arc tg}\, m$ su di una posizione iniziale, si verrà ad integrare l'equazione differenziale più generale

$$y' = \frac{am + Q(x + \varphi(y))}{a - mQ(x + \varphi(y))} . \tag{107}$$

Colleghiamo in secondo luogo i due carrelli, anzichè col parallelogrammo articolato, colla riga rettilinea GH segnata nella figura.

Fissando il piano della rotella a 0°, si verrà ad integrare l'equazione

$$y' = \frac{Q(x + \varphi(y)) - y}{\varphi(y)} , \tag{108}$$

e fissandolo invece all'angolo $\alpha = \operatorname{arc\,tg} m$, si ha l'altra equazione più generale della **(108)** e della **(37)**:

$$y = \varphi(y) \frac{m + y'}{my' - 1} + Q(x + \varphi(y)) \tag{109}$$

che equivale a:

$$y' = \frac{-m\varphi(y) + [Q(x + \varphi(y)) - y]}{\varphi(y) + m[Q(x + \varphi(y) - y]} . \tag{110}$$

Vediamo finalmente quale equazione si viene ad integrare se si collegano i due carrelli con una riga curvilinea, come abbiamo fatto nei §§ **2** e seg.

La curva secondo cui è foggiata tale riga, abbia per equazione in coordinate polari θ, ρ (preso per polo il punto G):

$$\theta = f(\rho) . \tag{111}$$

Possiamo prendere in considerazione la formola **(110)** e supporre ivi variabile la quantità m che è la tangente trigonometrica dell'angolo che la direzione della rotella forma colla congiungente rettilinea dei due punti H e G; nel nostro caso la direzione della rotella è quella della tangente alla curva **(111)**, e quindi m sarà eguale a $\operatorname{tg}\beta$, essendo β l'angolo che la tangente a questa curva in **H** fa col raggio vettore $\rho \equiv GH$; onde

$$m = \operatorname{tg}\beta = \frac{\rho d\theta}{d\rho} .$$

Data la equazione **(111)** si calcola questo valore di m, e si ha:

$$m = F(\rho^2) .$$

D'altra parte si ha:

$$\rho^2 = [Q(x + \varphi(y)) - y]^2 + \varphi^2(y) ,$$

onde infine

$$m = F\{[Q(x + \varphi(y)) - y]^2 + \varphi^2(y)\} ,$$

e sostituendo questo valore in **(110)** si ha l'equazione differenziale richiesta che risulta così del tipo

$$y' = \frac{\psi - \varphi F(\varphi^2 + \psi^2)}{\varphi + \psi F(\varphi^2 + \psi^2)} , \tag{112}$$

se si pone

$$\psi = Q(x + \varphi(y)) - y$$
$$\varphi = \varphi(y) .$$

La Q è la funzione arbitraria la cui curva rappresentativa si intende tracciata sul foglio di disegno e seguita dalla punta del carrello differenziale; la φ è la fun-

zione che ha relazione colla curva secondo cui è foggiata la riga su cui scorre il carrello integrale, ed F è la funzione che dipende dalla forma della riga che congiunge i perni dei due carrelli.

Data una funzione F, la curva secondo cui deve essere foggiata questa riga ha per equazione

$$\theta = \int \frac{F(\rho^2)}{\rho} d\rho \,. \tag{113}$$

§ 21. — *Integrafo per l'equazione differenziale* $y' = f(x + \varphi(y))F(x)$.

Torniamo per un momento alle considerazioni fatte nel § 15 e supponiamo che nello strumento ivi descritto, la guida del carrello integrale (cioè a sinistra) anzichè rettilinea come ivi si suppone, sia curvilinea come quella degli apparecchi considerati nel § precedente.

È evidente allora che si verrà ad integrare un' equazione come la (106), ma in cui a sia variabile, e propriamente il suo valore sia sempre eguale all'inversa aritmetica dell'ordinata di una funzione $F(x)$, rappresentata da una curva sul foglio di disegno.

Mutando Q in f, abbiamo allora con questo nuovo semplice dispositivo, l'integrazione di ogni equazione del tipo

$$y' = f(x + \varphi(y))F(x) \,, \tag{114}$$

in cui φ dipende dalla forma della guida, ed f e F sono rappresentate da due curve tracciate arbitrariamente sul foglio di disegno.

Val la pena di osservare che nel tipo (114) rientra la trasformata dell'equazione generale dell'odografo pel movimento di un proiettile in un mezzo comunque resistente, di cui abbiamo trattato nel § 13.

Infatti se nella (75) mutiamo x con y e $f(x)$ con $-\varphi(y)$, abbiamo:

$$\frac{dy}{dx} = [x + \varphi(y)] \frac{1}{1 - x^2} \tag{115}$$

che rientra nel tipo (114).

L'apparecchio di questo § può dunque risolvere un'altra volta il problema di cui abbiamo trattato nel § 13; ma la nuova soluzione, rispetto all'antica, ha però l'inconveniente che la funzione di resistenza $\varphi(y)$ non è qui rappresentata da una curva tracciata comunque sul foglio di disegno, come era nel § 13, ma dalla curva secondo cui è foggiata la guida a sinistra dello strumento e quindi per ogni funzione di resistenza bisogna mutare lo strumento e adattarvi una diversa guida.

PARTE II.

INTEGRAFI POLARI

§ 22. — *Preliminari. — Descrizione dell'apparecchio a riga rettilinea. Le quadrature polari* *).

La base schematica di tutti gli integrati di cui abbiamo trattato nella Parte I è un rettangolo i cui lati sono paralleli agli assi coordinati delle x e y cui si riferiscono le curve che lo strumento disegna. La base di questo nuovo strumento è invece, come indica la fig. 32, un settore circolare AOB, i cui tre punti d'appoggio sul foglio orizzontale di disegno sieno: una ruota M scorrevole sul piano, un

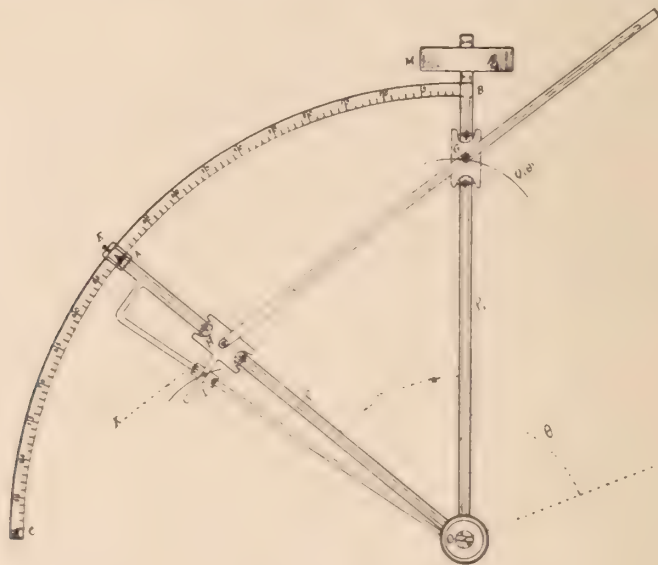



Fig. 32.ª

perno O intorno a cui può rotare tutto l'apparecchio e l'orlo della rotella girante del carrello integrale H.

Sulla guida OB scorre nel solito modo un carrello (differenziale) G, e sulla guida OA scorre il carrello integrale.

---

*) E. Pascal, *Di un nuovo integrafo per quadrature ed equazioni differenziali* (Rend. della R. Acc. delle sc. fis. e mat. di Napoli, (3) t. 17, 1911); *Il mio integrafo polare e le sue applicazioni* (Giorn. di mat. di Battaglini, (3) t. 50, 1912).

L'asta OA può fissarsi, mediante una vite E, in qualunque punto del quadrante graduato BC; l'angolo ω che essa viene a formare con OB, e che si misura sul quadrante è una delle *costanti dello strumento*, variabile però, se si vuole, caso per caso.

Rigidamente connessa all'asta OA è unita un'altra asta OL, su cui scorre un carrello L che porta una matita scrivente, e il cui movimento è sollecitato da un'asticella HL fissata rigidamente nel centro del carrello H in maniera da formare angoli eguali coi due lati HO, LO. In tal modo la curva descritta dalla matita L è la stessa di quella che descrive la rotella girante situata sotto H, salvo che è rotata intorno ad O di un angolo costante LOA, angolo che è un'altra delle *costanti*, ma *fissa, dello strumento*.

I due carrelli possono ora riunirsi o con una riga *rettilinea* GH o con una riga *curvilinea* o con qualunque altro congegno cinematico, a simiglianza di quanto si è detto nella Parte I.

Noi però ci limiteremo a trattare diffusamente solo il caso della *riga rettilinea*, tralasciando tutti gli altri.

Una tal riga deve essere connessa rigidamente in H al perno del carrello integrale in maniera da formare un angolo costante α col piano della rotella girante e da muoversi insieme a questa, mentre il perno G si muove in una scanalatura praticata lungo la riga stessa.

Supposta dunque la riga rettilinea ed $\alpha = 0$, calcoliamo la curva descritta da H in corrispondenza ad una curva arbitraria descritta da G, la cui equazione in coordinate polari col polo in O e coll'asse polare Ox, sia:

$$\rho_1 = Q(\theta) . \tag{116}$$

L'angolo polare della curva descritta da H è $\theta + \omega$, e la tangente a tale curva è nella direzione HG.

L'angolo φ che la tangente HK alla curva (tangente condotta nel senso dell'angolo polare crescente) forma colla perpendicolare al raggio vettore $\rho = OH$ (perpendicolare condotta nel senso dell'angolo polare crescente), è dato da:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{d\rho}{\rho d(\theta + \omega)} = \frac{d\rho}{\rho d\theta} , \tag{117}$$

mentre d'altra parte dal triangolo HOG si deduce:

$$\operatorname{sen}(GHO) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \mp \varphi\right) = \cos\varphi = \frac{\rho_1 \operatorname{sen}\omega}{HG} = \frac{\rho_1 \operatorname{sen}\omega}{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos\omega}}$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\rho - \rho_1 \cos\omega}{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos\omega}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\rho - \rho_1 \cos\omega}{\rho_1 \operatorname{sen}\omega} , \tag{118}$$

onde infine con (116) e (117) si ha:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho^2}{\operatorname{sen}\omega \cdot Q(\theta)} - \rho \cdot \operatorname{ctg}\omega \ , \tag{119}$$

e questa, in cui Q *è una funzione arbitraria di* θ, *e* ω *è costante, è l'equazione differenziale che si viene ad integrare col dispositivo assegnato, quando cioè la linea* HG *sia una retta, e la rotella girante sia nella direzione di* HG. La (119) è del tipo detto di Bernoulli, trasformabile in una equazione lineare.

Supponiamo ora, più generalmente, che la rotella girante sia disposta in modo da formare con HK un angolo costante α.

Indicando allora sempre con φ l'angolo che la tangente alla curva descritta dalla rotella girante in H forma colla perpendicolare al raggio vettore OH, e con φ_1 l'angolo che HK forma colla stessa perpendicolare, si ha:

$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \alpha \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{d\rho}{\rho d\theta} \\ \operatorname{tg}\varphi_1 &= \frac{\rho - Q(\theta)\cos\omega}{Q(\theta)\operatorname{sen}\omega} \end{aligned}\right. \tag{120}$$

e quindi, eliminando φ e φ_1, si ha (posto $\operatorname{tg}\alpha = m$):

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho^2 + \rho Q(\theta)(m\operatorname{sen}\omega - \cos\omega)}{Q(\theta)(m\cos\omega + \operatorname{sen}\omega) - m\rho} \tag{121}$$

ovvero (indicando con ρ' la derivata di ρ):

$$\frac{\rho^2 + m\rho\rho'}{\rho'(m\cos\omega + \operatorname{sen}\omega) + \rho(m\operatorname{sen}\omega - \cos\omega)} = Q(\theta) \ , \tag{122}$$

e questa è un'altra equazione (più generale della precedente) che resta integrata dal nostro apparecchio, quando l'asta HG *è rettilinea.*

Per $\alpha = 0$ dalla (122) si ha naturalmente la (119), e per $\alpha = -\omega$ si ha:

$$\frac{d\rho}{d\theta} - \operatorname{ctg}\omega \cdot \rho = -\frac{1}{\operatorname{sen}\omega} Q(\theta) \ , \tag{123}$$

cosicchè la (122) contiene anche come caso particolare direttamente l'equazione lineare; per $\alpha = 90°$ si ha:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\operatorname{sen}\omega \cdot Q(\theta) \cdot \rho}{\cos\omega\, Q(\theta) - \rho} \ . \tag{124}$$

Facendo ora in (119) e (124) $\omega = 90°$, si hanno le equazioni:

$$\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\theta} = -\frac{1}{Q(\theta)}, \tag{125}$$

e

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -Q(\theta) \tag{126}$$

che corrispondono a delle *quadrature polari* della funzione Q o della sua inversa aritmetica.

Il nostro apparecchio può dunque, solo col mutamento di angoli, servire indifferentemente per *quadrature*, per *equazioni differenziali lineari*, per *equazioni di Bernoulli*, o infine per altre più complicate equazioni differenziali.

§ 23. — *Prime operazioni che si fanno coll'integrafo polare a riga rettilinea.*

L'apparecchio suddescritto è stato costruito da qualche anno per conto del mio Gabinetto di Analisi Superiore dell'Università di Napoli ed è rappresentato in due diverse posizioni dalle fotografie qui intercalate (v. fig. 33 e 34).

Nella pratica di un siffatto apparecchio è utile e interessante potere avere il mezzo di costruire coll'*apparecchio stesso*, senza uso di altri strumenti, tutte le altre

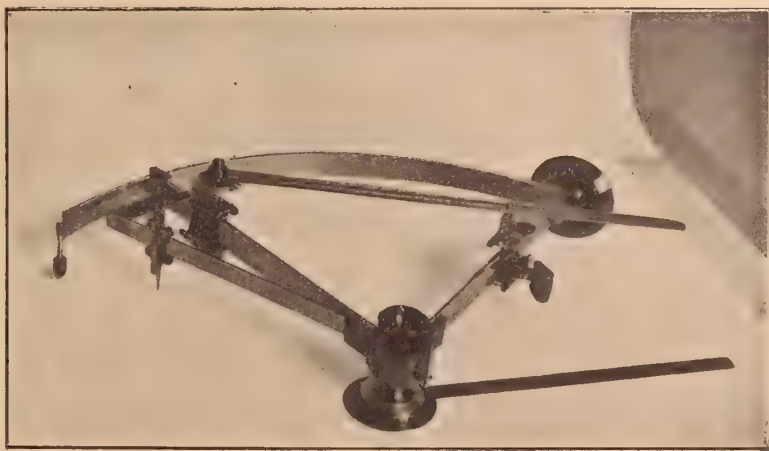



Fig. 33.ª

curve elementari sussidiarie, quali rette, cerchi, etc. e tutti quegli altri elementi fondamentali, quali misure di segmenti, di angoli, etc., che possono occorrere pel disegno, in modo cioè che l'apparecchio possa bastare il più possibile a sè stesso.

Mostriamo perciò quali operazioni preliminari possano eseguirsi collo strumento prima che sia adoperato come apparecchio integratore.

Prima di tutto possono evidentemente disegnarsi le rette convergenti in O (v. fig. 35). Basta stringere la vite della ruota M (v. fig. 32), indi sollevato leggermente il punto E in modo che la rotella girante non poggi più sul foglio di dise-

gno, fare scorrere il carrello **H** sulla sua guida; la matita **L** disegnerà una retta convergente in O.

Il carrello H può fissarsi con una vite; stretta questa vite, sollevato leggermente il punto E, e fatto rotare tutto lo strumento intorno ad O, la matita L descri-

Fig. 34.ª

verà un cerchio di centro O. Colla graduazione esistente sulla riga OA (fig. 32) si può misurare un segmento di retta convergente in O e colla graduazione del quadrante si può misurare un angolo al centro, facendo opportunamente scorrere, dopo allargata la vite **E**, l'estremo **A** della riga **OA** sul quadrante.

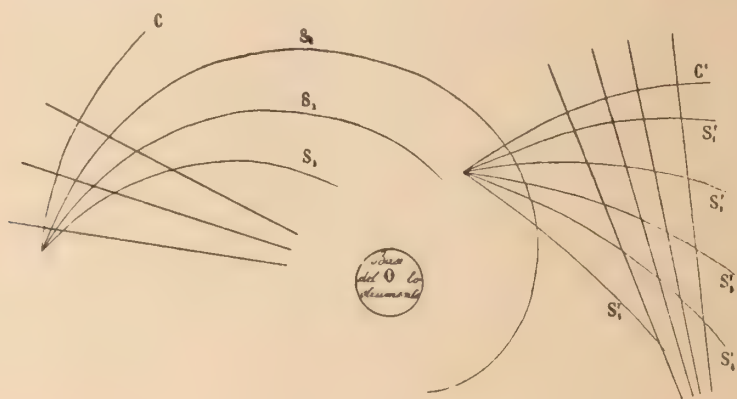



Fig. 35.ª

Alla base O dello strumento è congiunta una piccola staffa rettilinea graduata nella direzione OB; su questa si può fissare a distanza variabile da O un perno, sul quale si può adattare la scanalatura della riga HG, staccata che sia stata questa dal carrello G. Questo piccolo accessorio è necessario pel fatto che per ragioni ma-

teriali di costruzione non può farsi che G si avvicini, al disotto di un certo limite (che nel mio modello è di 7 cm.), ad O, il che per certi problemi sarebbe un inconveniente.

In tal modo può anche farsi che la riga HG passi per O, e allora, posto l'angolo α a 90°, e facendo rotare l'apparecchio, si ha un altro mezzo per fare che la matita L descriva un cerchio di centro O.

Posto invece l'angolo α a 75°, 60°, ... si hanno in tal modo le spirali logaritmiche $S_1, S_2, S_3, \ldots$ della fig. 35.

Ma si possono anche descrivere rette, cerchi, spirali col centro in un punto qualunque P.

Si disponga la punta del carrello G sopra P (fig. 32), e indi, fissato il carrello G su OB si giri lo strumento di un angolo negativo eguale a LOH che è stato costruito di 15°. Ciò fatto, si renda fisso lo strumento stringendo la vite della ruota M, e indi si rallenti la vite E e si faccia scorrere A sul quadrante. Secondochè l'angolo α è uguale a 0° o a 15°, 30°, ... 90°, la matita L disegnerà rette convergenti in P, o spirali logaritmiche $S'_1, S'_2, \ldots$ di polo P, o infine cerchi di centro P (fig. 35).

Il procedimento ora indicato può servire assai bene per un'altra utile applicazione.

Supponiamo che si vada descrivendo una curva integrale qualunque, corrispondente cioè ad un angolo α e ad un angolo ω qualunque.

Se, giunti ad un punto P della curva si arresta il movimento dello strumento, si stringe la vite della ruota M, e, rallentata la vite E, si fa scorrere A sul quadrante dopo aver rimesso a 0° l'angolo α, la matita L descriverà *una retta che sarà evidentemente inclinata di un angolo α alla tangente in* P *alla curva integrale*.

Se quindi l'angolo α era già 0°, la retta che si viene così a tracciare è proprio la *tangente* alla curva; se era $\alpha = 90°$, si viene così a tracciare invece la *normale*.

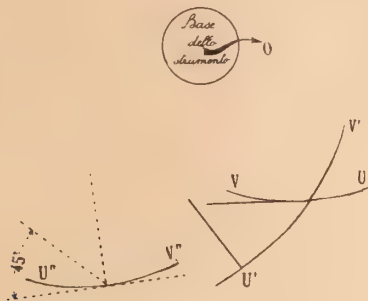



Fig. 36.ª

Nella fig. 36 (che riproduce il disegno originale a circa $^1/_6$ dal vero) queste operazioni sono state eseguite, e si è così tracciata la tangente alla curva UV, che era l'integrale di un'equazione (121) in cui era $\alpha = 0°$; è tracciata la normale alla curva U'V' cui corrispondeva un angolo $\alpha = 90°$; ed infine è tracciata così la retta inclinata di 45° alla tangente della curva U''V'', trovata come integrale di un'equazione (121) in cui era $\alpha = 45°$.

Un'equazione differenziale lineare di 1° ordine in coordinate rettangolari, ha la proprietà, da noi già rilevata nel § 5, che le corde degli archi delle curve di tutti gli integrali particolari di una medesima equazione e intercetti fra due rette fisse parallele all'asse delle ordinate, passano per un punto, il che porta che i segmenti intercetti sulle due rette dal fascio delle curve degli integrali particolari, sieno proporzionali.

Per un'equazione differenziale lineare in coordinate polari, come è la (123), questa proprietà porta evidentemente a ciò che *le corde degli archi delle curve degli integrali particolari, archi intercetti fra due raggi fissi* RS , R'S' (v. fig. **37**), *devono inviluppare una parabola tangente ai due raggi medesimi*, e ciò per una nota ed

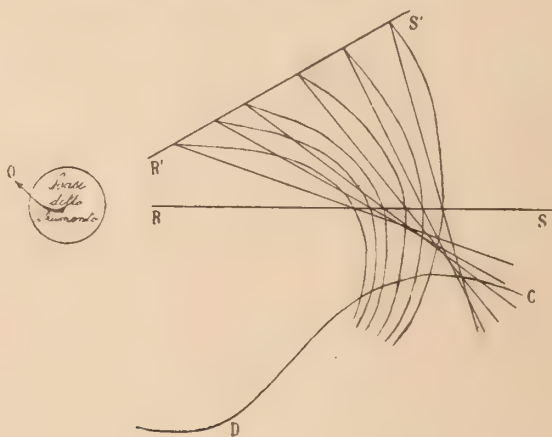



Fig. 37.ª

elementare proprietà dei segmenti intercetti da una tangente variabile su due tangenti fisse di una parabola.

Nella fig. **37** sono stati disegnati sei integrali particolari (questa figura è la riproduzione a circa $^1/_6$ dal vero del disegno originale) dell'equazione lineare (**123**), integrata col porre nell'apparecchio $\alpha = -\omega = -30°$, e facendo che la funzione $Q(\theta)$ sia quella rappresentata dalla curva CD.

§ 21. — *Curve fondamentali e più semplici tracciate dall'apparecchio polare a riga rettilinea.*

La equazione differenziale (**123**) ha per integrale generale:

$$\rho = e^{\operatorname{ctg}\omega.\theta}\left[-\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\int e^{-\operatorname{ctg}\omega.\theta}Q(\theta)\,d\theta + C\right] \tag{127}$$

che, per $Q(\theta) = \text{cost.} = a$, dà:

$$\rho = Ce^{\operatorname{ctg}\omega.\theta} + \frac{a}{\cos\omega}\,. \tag{128}$$

La curva rappresentata da questa equazione è *una concoide della spirale logaritmica*, cui si ridurrebbe per $a = 0$, cioè quando il carrello differenziale G fosse

in O. Essa è rappresentata dalla curva A della fig. 38 ed è stata disegnata dall'apparecchio ponendo $\omega = 60°$, $\alpha = -60°$, $Q(\theta) = a = 20$ cm. (Notiamo una volta per sempre, che tutte le figure sono state riprodotte dai disegni originali a circa $^1/_6$ dal vero).

Lo stesso apparecchio può disegnare un'altra curva che per $a = 1$, cioè assunta a come unità di misura, è *l'inversa* della precedente.

Poniamo $\alpha = 0°$, e allora dall'integrale generale di (119) che è

$$\frac{1}{\rho} = e^{\operatorname{ctg}\omega \cdot \theta}\left[-\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\int \frac{e^{-\operatorname{ctg}\omega \cdot \theta}}{Q(\theta)}\, d\theta + C\right] \tag{129}$$

si ha, per $Q(\theta) = a = \text{cost.}$:

$$\frac{1}{\rho} = C e^{\operatorname{ctg}\omega \cdot \theta} + \frac{1}{a \cos\omega} \tag{130}$$

e questa per $a = 1$ è la inversa di (128).

Essa è rappresentata, per $\omega = 60°$ e $a = 20$ cm., dalla curva B della fig. 38,

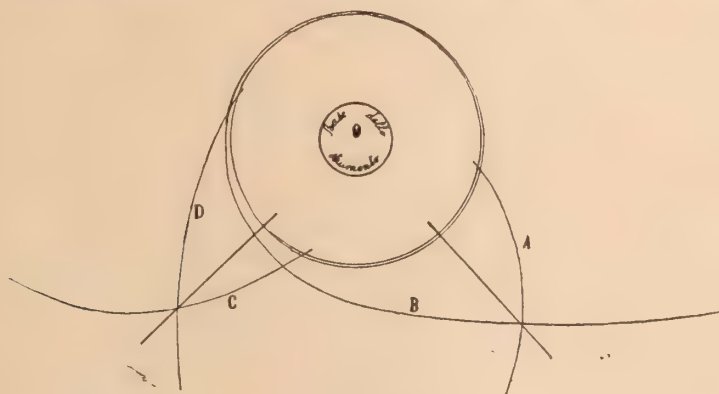



Fig. 38.ª

gira assintoticamente intorno ad un cerchio di centro O e di raggio $a \cos\omega$ che nel nostro caso è uguale a $\frac{1}{2}$, cioè 10 cm.

Passiamo ora alle curve C e D della medesima figura.

Per $\omega = 90°$, $\alpha = 90°$, e $Q(\theta) = \text{cost.} = a$, l'apparecchio, come risulta da (126), descrive la curva:

$$\rho = -a\theta + C, \tag{131}$$

che è *una spirale d'Archimede*, e che è rappresentata dalla curva C; e se infine poniamo $\omega = 90°$, $\alpha = 0°$, e $Q(\theta) = a = \text{cost.}$ abbiamo la curva (integrale di (125)):

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\theta}{a} + C \tag{132}$$

che è *la trasformata di una spirale iperbolica*, e per $a = 1$ è *l'inversa* della precedente. Essa è rappresentata dalla curva D.

§ 25. — *Costruzione grafica di π, e sezione di un angolo.*

L'integrafo polare si presta, meglio dell'integrafo di Abdank-Abakanowicz, *alla costruzione grafica di π*. Con quest'ultimo strumento infatti, per costruire il π, bisogna far scorrere la punta differenziale lungo il contorno di una circonferenza; coll'integrafo polare invece basta fissare coll'apposita vite il carrello differenziale in un punto della sua riga, e indi, dopo aver messo a 90° gli angoli α e ω, far girare semplicemente tutto lo strumento sul suo perno, di un angolo commensurabile con un angolo retto, p. es. dell'angolo di 45°, o di quello di 60°, etc.

La punta integrale descriverà la spirale (131), e l'incremento che riceverà il raggio vettore ρ sarà commensurabile con π.

Il raggio a del cerchio descritto dalla punta differenziale potrà assumersi come unità di misura.

Nella parte a destra della fig. 39 sono tracciate (debitamente ridotte, al solito, ad $^1/_6$ dal vero) le curve che si ottengono colle tre diverse unità di misura di 10,

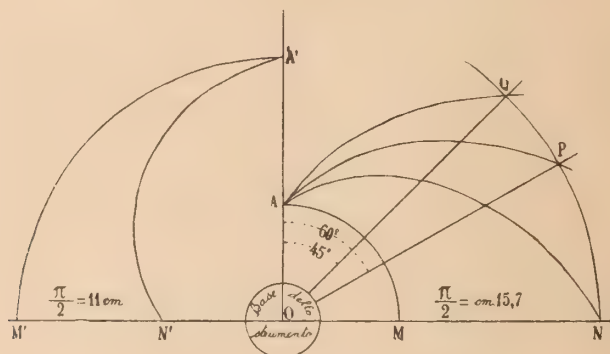



Fig. 39.ª

15, 20 cm., partendo dal medesimo punto e girando rispettivamente degli angoli di 90°, 60°, 45°.

Alla fine dell'operazione la punta integrale deve trovarsi sempre alla medesima distanza da O, e la variazione subita da tale distanza è precisamente $\frac{\pi}{2} =$ cm. 15,7.

Nella parte a sinistra della medesima fig. 39, la stessa costruzione è stata eseguita adoperando l'unità di misura di 7 cm. che è la minima che si può raggiungere coll'apparecchio da me usato (senza adoperare la staffa di cui è parola nel § 23) e girando di 90° nel senso positivo degli angoli. Disegnando poi col medesimo apparecchio il cerchio di centro O e passante per il punto iniziale della spirale, si viene a costruire sull'asse principale passante per O, il segmento $\frac{\pi}{2} = 11$ cm.

Nella fig. 40 è adoperato, con doppio metodo, lo strumento per risolvere graficamente il problema della *sezione di un angolo in parti proporzionali a date quantità* $m, n, p, \ldots$.

Nella parte a sinistra della figura, dato l'angolo AOA', si è descritto prima il cerchio AA' per A, indi con una qualunque unità di misura a, si è descritta, a

partire da A, la stessa spirale (131) che serve per il precedente problema, finchè abbia incontrato in B l'altro lato dell'angolo. Diviso indi A'B in parti proporzionali alle date quantità, e descritto per i punti di divisione le circonferenze di centro O, i punti di incontro di queste colla spirale hanno determinato i lati delle sezioni richieste.

Nella parte a destra della fig. 40, lo strumento è adoperato in modo diverso. Si scelgano tante unità di misura a, b, c,... che stieno fra loro come

$$\frac{1}{m+n+p+\dots} : \frac{1}{n+p+\dots} : \frac{1}{p+\dots} : \dots ;$$

indi pel punto A si descriva prima l'arco di cerchio AA', e poi la spirale con unità a finchè incontri in B l'altro lato dell'angolo dato.

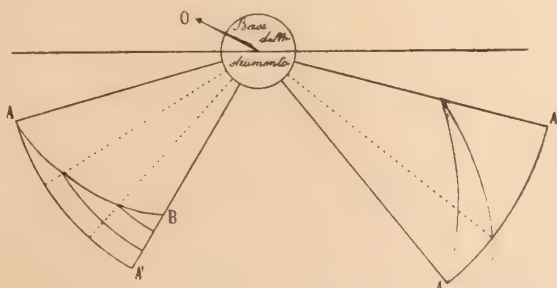



Fig. 40.ª

Da B si traccino poi le altre spirali colle unità b, c, ... Queste taglieranno l'arco AA' nei punti che, congiunti con O, danno le rette che risolvono il problema.

Nel disegno si è assunto $m=1$, $n=2$, e la prima spirale è stata descritta con unità eguale a 10 cm., mentre la seconda con unità eguale a 15 cm. $\left(10:15=\frac{1}{1+2}:\frac{1}{2}\right)$.

§ 26. — *Le curve per gli integrali ellittici di 1ª specie.*

L'integrafo polare si presta naturalmente assai bene per le quadrature di funzioni di un variabile che abbia il significato di *angolo*. E quindi in particolare per gli integrali ellittici di 1ª e 2ª specie.

Nella fig. 41 sono tracciate, nel modo che ora spiegheremo, le curve per gli integrali ellittici di 1ª specie.

Assunta un'unità di misura OA = 10 cm. si sono disegnate con un compasso ellittico le ellissi AA_1, AA_2, ... AA_7 di equazioni

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{1-k^2\text{sen}^2\theta}}, \tag{133}$$

corrispondenti ai valori $1, \frac{9}{10}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$, 0 di k che sono indicati dai segmenti segnati sull'asse perpendicolare ad OA.

Queste ellissi hanno tutte per semiasse minore OA, e per semiasse maggiore $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$; la facile costruzione dell'estremo di tale semiasse maggiore è indicata nella figura. Facendo p. es. centro in $k=\frac{3}{5}$, con raggio 1 si taglierà l'asse OA in un punto la cui distanza da O sarà $\sqrt{1-k^2}$, e congiunto tal punto col punto $k=1$, e indi da A condotta la parallela a tale congiungente, l'intersezione col-l'asse perpendicolare ad OA determinerà l'estremo del semiasse maggiore dell'ellisse corrispondente a $k=\frac{3}{5}$.

La prima e l'ultima di tali ellissi sono rispettivamente una retta e un cerchio.

Si ponga la base dell'integrafo polare nel centro O, e fatto $\omega=90°$, $\alpha=90°$, si integrino consecutivamente queste ellissi partendo ogni volta dal punto F (che è

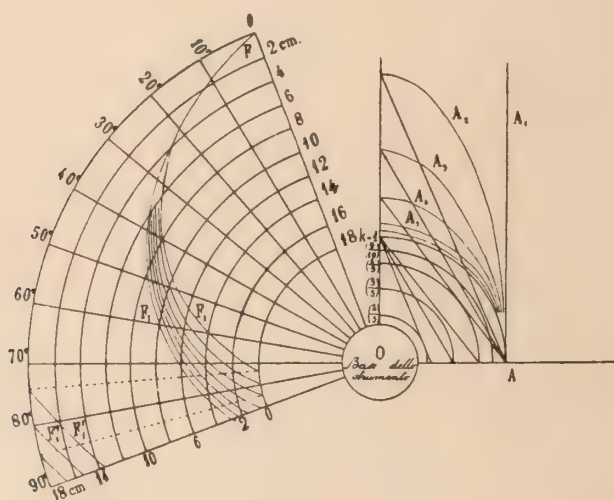



Fig. 41.ª

il punto di massima distanza del carrello integrale da O); si ha allora un fascio di curve $F_1, F_2, \ldots F_7$ ognuna delle quali corrisponde ai valori dell'integrale ellittico di 1ª specie

$$F(k,\theta)=\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}}. \tag{134}$$

Propriamente possiamo dire (trovandoci nel caso dell'equazione (126)) che i valori di questo integrale sono rappresentati dalle distanze, contate sui raggi vettori, del punto della curva dal cerchio passante per F; perciò nella figura sono state disegnate tutte le circonferenze di raggi differenti fra loro di 2 cm., e queste con tutti i raggi vettori formanti fra loro angoli di 10°, sono venute a costituire una rete colla quale si può riconoscere approssimativamente *il valore dell'integrale per un dato* k *e per un dato* θ.

Il nostro apparecchio può dunque servire a costruire in modo meccanico quel-

l'*abaco* per leggere i valori degli integrali ellittici che può rendere dei buoni servigi in più di un problema pratico *).

Per le limitazioni imposte dalla costruzione dello strumento, alcune delle curve $F_1, F_2 \ldots$ non hanno potuto raggiungere il raggio inclinato di $\theta = 90°$ al raggio OF, giacchè il carrello integrale ha raggiunto la sua minima distanza da O prima che lo strumento sia stato girato di 90°.

Ma in tal caso, per continuare la curva, non c'è da fare altro che fermare lo strumento colla vite che frena la ruota M (v. fig. 32), rimettere il carrello integrale alla sua massima distanza da O, e far ripigliare allo strumento il suo cammino. In tal modo si ha p. es. dopo il primo ramo della curva F_2, il ramo F'_2 terminante all'angolo θ di 90°.

Il valore dell'integrale ellittico corrispondente ad un punto di questo secondo ramo si calcola aggiungendo al numero che misura la distanza del punto della curva dal cerchio passante per F, il numero costante che è la differenza fra i raggi dei due cerchi passanti per le posizioni di minima e massima distanza da O del carrello integrale. Si intende poi naturalmente che queste lunghezze bisogna calcolarle in decimetri, essendo il decimetro l'unità di misura scelta per la costruzione delle ellissi.

Se poniamo invece a 90° l'angolo ω, e a 0° l'angolo α, e integriamo le stesse ellissi precedentemente descritte otteniamo le curve di equazione

$$\frac{1}{\rho} = -\int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \mathrm{sen}^2\theta} \cdot d\theta + \mathrm{cost.}\,, \tag{135}$$

la costante dipendendo dal punto iniziale in cui poniamo il carrello integrale.

L'integrale del secondo membro è l'integrale ellittico di 2ª specie

$$\mathrm{E}(k, \theta) = \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \mathrm{sen}^2\theta} \cdot d\theta\;; \tag{136}$$

ma questo meglio potrà calcolarsi per via più diretta, come diremo nel § seguente.

§ 27. — *Le curve per gli integrali ellittici di 2ª specie.*

Le spiegazioni date nel § precedente ci dispensano dall'entrare in molti altri particolari sulla costruzione della fig. 42.

In questa, invece di disegnare le ellissi fondamentali della fig. 41, abbiamo disegnate le curve di equazione

$$\rho = \sqrt{1 - k^2 \mathrm{sen}^2\theta} \tag{137}$$

prendendo un'unità di misura eguale a 16 cm. e per valori di k, i valori 1, $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, 0.

---

*) v. p. es. Benedicks, *Constructions graphiques des fonctions elliptiques de Jacobi*, I, II, (Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. 7, 1912).

Il tracciamento per punti delle curve (137) è dei più semplici.

Si traccino i raggi vettori facenti fra loro angoli eguali, p. es. di 10 in 10 gradi, e i cerchi di centro O e coi raggi k.

Dal punto d'incontro del cerchio di raggio k col raggio vettore corrispondente all'angolo scelto, si conduca la perpendicolare OA (che sarà eguale a $k \operatorname{sen} \theta$), e da A si tagli sulla circonferenza di diametro OA un arco di corda eguale a tale perpendicolare; la distanza dell'estremo di tale arco da O sarà $\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}$, e per-

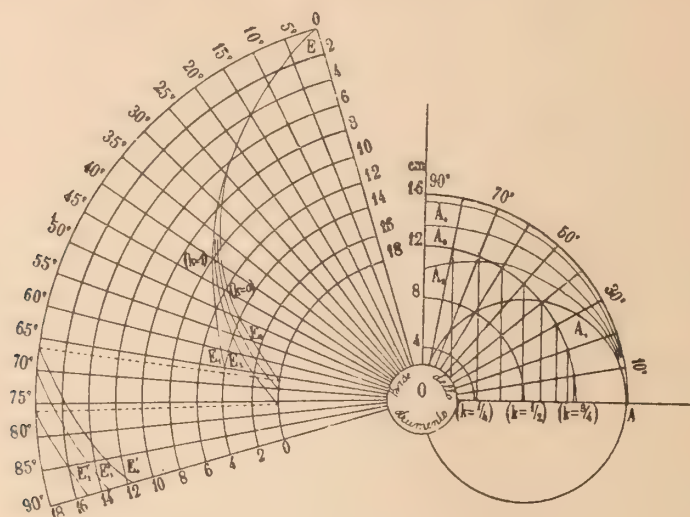



Fig. 42.ª

ciò la circonferenza di centro O e passante per tale estremo, taglierà il raggio vettore nel punto della curva richiesta.

Restano così disegnate le curve A_1 (che è la circonferenza di diametro OA), A_2, A_3, A_4, A_5, la quale ultima è a sua volta la circonferenza di centro O e raggio $1 \equiv OA$.

Posta allora in O la base dello strumento, e gli angoli ω e α a 90°, si integrino le curve A, prendendo ogni volta le mosse dal medesimo punto E, e si ha il fascio di curve $E_1, E_2, \ldots E_5$, di cui si disegneranno i secondi rami collo stesso metodo illustrato nel § precedente.

Queste curve rappresenteranno, al solito modo, gli integrali ellittici di 2ª specie.

§ 28. — *Calcolo di alcuni integrali che servono in Balistica.*

L'integrafo polare serve assai bene al calcolo degli integrali del tipo

$$B_n = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^n x}, \tag{138}$$

che si presentano in una quistione di Balistica, e propriamente nel calcolo del movimento di un proiettile in un mezzo resistente proporzionalmente alla n^{ma} potenza della velocità.

Nei Trattati di Balistica vi sono delle tavole in cui sono calcolati i valori di questi integrali per varii valori di n, e propriamente per $n = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}$ *).

La fig. **43** rappresenta l'*abaco* ottenuto dal nostro strumento e relativo ai valori del suddetto integrale pei citati valori di n.

Le curve AA_n di equazione

$$\rho = \frac{1}{\cos^n \theta} \tag{139}$$

sono facili a costruire per punti; quella per $n = \mathbf{1}$ è la retta AA_1 perpendicolare ad OA nel punto A distante da O di **10** cm. (cioè dell'unità di misura).

Per costruire le altre conduciamo per O tanti raggi vettori, e troviamo su ciascuno di questi, i punti delle varie curve (**139**).

Uno dei raggi vettori, p. es. OBD, taglia AA_1 in un punto B; si riporti con un arco di cerchio il punto B in C sopra OA, e da C si conduca la parallela ad

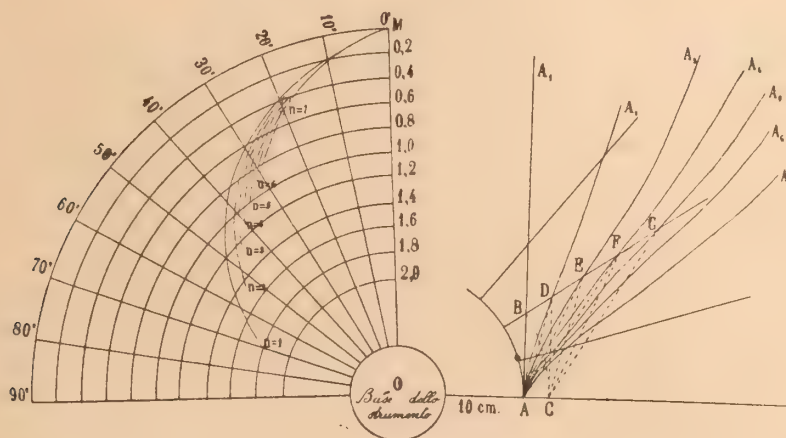



Fig. 43.ª

AB; questa taglia il raggio vettore in D che è un punto della curva AA_2; si congiunga ora D con A, e da C si conduca la parallela ad AD; si ha così il punto E della curva AA_3, e così di seguito, si può facilmente, su ogni raggio vettore, costruire la successione dei punti delle varie curve $AA_1, AA_2, \ldots AA_7$.

Applicata in O la base dello strumento, e integrate le precedenti curve dopo avere, al solito, fissati a **90°** gli angoli ω e α, si ha il fascio di curve uscenti dal punto M le quali si arrestano dopo aver girato di angoli θ minori di **90°** e sempre più piccoli. Ciò dipende dal fatto che, come si vede dalla parte a destra della fig. **43**, le curve, al crescere di n, tendono a piegarsi verso l'asse OAC, e quindi la punta differenziale, seguendo una di queste curve, raggiungerà la sua posizione estrema, compatibile colla costruzione dello strumento, dopo aver girato di un angolo sempre più piccolo.

---

*) v. p. es. Cranz, *Lehrbuch der Ballistik*, Band IV: *Atlas für Tabellen, Diagramme und photograph. Momentaufnahmen*, (Leipzig, 1910), Tabelle Nr. 10.

§ 29. — *Risoluzione delle equazioni algebriche.*

Il nostro apparecchio, eseguendo l'integrazione polare (quando si pongono a 90° gli angoli ω e α), si presta assai bene alla risoluzione delle *equazioni algebriche*; la radice sarà rappresentata da un angolo, che dovrà intendersi naturalmente misurato prendendo per unità di misura il *radiante* cioè l'angolo di 57°17'44".

Bisogna però cercare la maniera di applicare lo strumento a questo problema, perchè non può certamente presumersi di costruire (come si fa coll'integrafo di Abdank-Abakanowicz) la curva di equazione $\rho = f(\theta)$ e cercare indi i valori di θ per cui è $\rho = 0$. Lo strumento non può avvicinarsi ai punti in cui è $\rho = 0$, perchè il carrello integrale non può avvicinarsi alla base O dello strumento per più di una certa lunghezza che nel nostro modello è di 9,6 cm.

Cercheremo allora di disegnare due curve, una di equazione:

$$\rho = f(\theta) + \varphi(\theta) \tag{140}$$

e l'altra di equazione:

$$\rho = \varphi(\theta) \,, \tag{141}$$

le quali colla loro intersezione determineranno il valore di θ per cui è:

$$f(\theta) = 0 \,. \tag{142}$$

Data l'equazione algebrica (**142**) di cui si vogliano determinare le *radici reali positive*, sarà bene trasformarla in modo che tutte le sue siffatte radici sieno minori di 1, e ciò perchè basti, per trovarle tutte, girare lo strumento di un angolo di circa 57°. Per far ciò evidentemente basta eseguire la trasformazione $\vartheta = \frac{\theta}{A}$, essendo A un limite superiore delle radici reali positive dell'equazione, limite che si trova coi metodi elementari e semplici dell'Algebra.

Possiamo ora ideare un doppio procedimento per risolvere il nostro problema.

Noi ricordiamo che, come risulta dalla (**126**), l'integrazione polare che viene ad eseguirsi, girando di un angolo θ nel senso positivo della rotazione degli angoli (cioè nel senso opposto a quello del movimento dell'indice dell'orologio), ha il segno negativo; girando quindi lo strumento nel senso opposto, l'integrazione risulta positiva.

Se $f(\theta)$ è:

$$f(\theta) = a_0\theta^n + a_1\theta^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\theta + a_n \,, \tag{143}$$

si formino le successive derivate:

$$\left\{\begin{array}{ll} f'(\theta) & = n\,a_0\theta^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \\ \ldots & \ldots \\ f^{(n-1)}(\theta) & = n!\,a_0\theta + (n-1)!\;a_1 \\ f^{(n)}(\theta) & = n!\,a_0 \,, \end{array}\right. \tag{144}$$

e si integri il cerchio:

$$\rho = n!\, a_0 \,, \tag{145}$$

cioè si ponga la punta differenziale alla distanza $n!\, a_0$ dal centro O, e si faccia girare lo strumento in un senso o in un altro scegliendo, nel modo che diremo più sotto, la posizione iniziale del carrello integrale.

Nella fissazione dell'unità di misura per calcolare la distanza $n!\, a_0$ c'è una arbitrarietà; si sceglierà un'unità così piccola che tutti i numeri

$$n!\, a_0 \,,\ (n-1)!\, a_1 \,,\ (n-2)!\, a_2 \,, \ldots ,\ 1!\, a_{n-1} \,,\ a_n$$

risultino minori di quello che misura la lunghezza del cammino che, sulla sua guida, può fare il carrello integrale.

Se così facendo la lunghezza $n!\, a_0$ risulta minore di 7 cm. che è la minima possibile distanza del carrello differenziale da O, per eseguire la prima integrazione si fisserà il perno differenziale a distanza $n!\, a_0$ da O mediante la staffa cui abbiamo accennato nel § 23.

Ciò fatto, *consideriamo prima il caso in cui si voglia girare lo strumento in senso negativo*, e sia A la posizione di *minima* distanza a del carrello integrale da O.

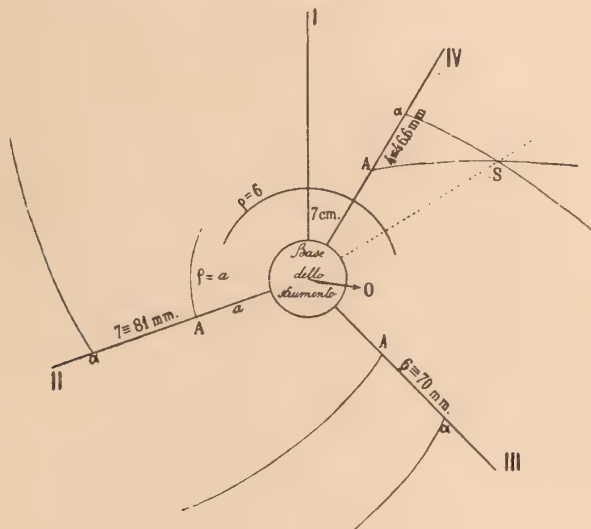



Fig. 44.ª

Si ponga la posizione iniziale del carrello integrale in un punto α (sul raggio vettore II) distante da A di $(n-1)!\, a_1$, se a_1 è positivo, e in A se a_1 è negativo, e si giri.

Si verranno a descrivere le curve:

$$\rho = n!\, a_0 \theta + (n-1)!\, a_1 + a \qquad (\textit{nel 1º caso}) \tag{146}$$

o

$$\rho = n!\, a_0 \theta + a \qquad (\textit{nel 2º caso}) \tag{147}$$

e insieme a queste si immagini descritto il cerchio di centro O e di raggio a nel primo caso, o di raggio $a + (n-1)!\, |a_1|$ nel secondo. Questo cerchio lo chiame-

remo *curva satellite* della curva (146) o (147), e lo stesso nome daremo alle curve ottenute successivamente da esso con integrazioni, come diremo più sotto.

Si giri ora lo strumento sino a porre la punta differenziale sul punto iniziale della curva ottenuta, si integri questa ponendo inizialmente la punta integrale (sul raggio III) in α distante di $(n-2)!\,a_2$ da A se a_2 è positivo, e in A se a_2 è negativo; e indi si integri la corrispondente curva satellite, ponendo la punta integrale reciprocamente in A o in α, (sul raggio vettore III) secondo i due casi.

Le equazioni delle curve ottenute saranno (se a_1 e a_2 sono positivi)

$$(148)\quad \begin{cases} \rho = \frac{n!}{2} a_1 \theta^2 + (n-1)!\, a_1 \theta + (n-2)!\, a^2 + a\theta + a & \textit{(curva principale)} \\ \rho = \theta + a & \textit{(curva satellite)} \end{cases}$$

ovvero (se a_1 è positivo e a_2 è negativo):

$$(149)\quad \begin{cases} \rho = \frac{n!}{2} a_0 \theta^2 + (n-1)!\, a_1 \theta + a\theta + a & \textit{(curva principale)} \\ \rho = a\theta + a - (n-2)!\, a_2 & \textit{(curva satellite)} \end{cases}$$

Similmente si procederà per gli altri casi.

È chiaro che il punto d'intersezione delle due curve (148) o delle due (149)

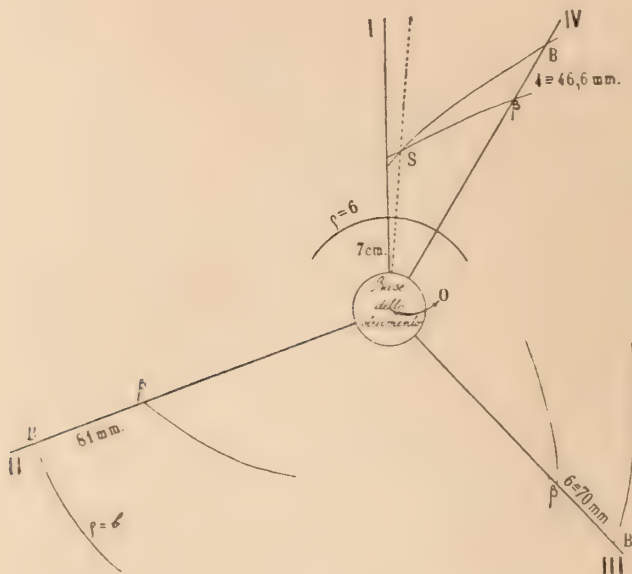



Fig. 45.ª

corrisponde sempre esattamente a quell'angolo θ per cui è zero la $(n-2)^{ma}$ equazione derivata di $f=0$.

Seguitando quindi sempre coll'indicato procedimento *veniamo a trovare le radici reali positive dell'equazione data.*

Il secondo procedimento, cui abbiamo di sopra accennato, è fondato *sulla rotazione dello strumento in senso positivo*, anzichè in senso negativo.

Il procedimento è il medesimo, solo che invece di contare i segmenti dal punto A di *minima* distanza da O, li conteremo dal punto B di *massima* distanza b da O; inoltre la legge relativa ai punti iniziali delle curve principali e delle curve satelliti in rapporto al segno dei coefficienti di f, non è costante, ma *alternata*.

In altri termini nella prima integrazione (quella che dà le curve analoghe alle (146) o (147)) si cominci bensì la curva integrale da un punto β distante da B (verso O) della quantità $(n-1)!\, a_1$ (se a_1 è positivo) o da B (se a_1 è negativo), mentre si comincino le curve satelliti rispettivamente da B o da β; ma nella seconda integrazione il punto iniziale della curva principale dovrà essere invece B se a_2 è positivo, o un altro punto β distante da B di $(n-2)!\, |a_2|$, se a_2 è negativo, mentre la curva satellite deve cominciare rispettivamente da β o da B; la legge precedente resta cioè invertita per la seconda integrazione.

Nella terza integrazione si ritornerà poi alla legge precedente, e così seguitando, in tutte le integrazioni di ordine pari la legge resta invertita, e resta la stessa in quelle di ordine dispari. La ragione di ciò è facile riconoscere nel fatto che girando lo strumento in senso *positivo* l'integrazione risulta mutata di segno.

Nelle fig. **44** e **45** è stata eseguita *col doppio metodo* l'integrazione dell'equazione cubica

$$\theta^3 + \frac{7}{2}\theta^2 + 6\theta - 4 = 0\,, \tag{150}$$

che ha una radice reale eguale ad $\frac{1}{2}$, che infatti si è ritrovata molto esattamente rappresentata dall'angolo di 28°38′52″ da ambo le parti, del raggio IV. Nel disegno si è assunta per unità di misura cm. $1 + \frac{1}{6}$; si è fatto cioè che la minima distanza del carrello differenziale da O, che è di 7 cm., rappresenti il numero 6.

Errata-Corrige

p. 4, riga 22:	relativo all'*equazione*	*si legga:*	per l'*equazione*
p. 36, riga 5 da sotto:	Ma dopo	»	Ma l'Autore, dopo
p. 39, riga 10:	poggiata	»	foggiata.
p. 40, riga 2 da sotto:	oC	»	OC
p. 43, riga 7:	FG	»	HG
p. 44, riga 8:	il perno D	»	il perno E
p. 53, riga 4:	$a\frac{dy}{dx} = Q(x_1)$	»	$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x_1)}{a}$
p. 61, riga 17-18:	applicacazione	»	applicazione
p. 62, riga 5:	sieno	»	sono.
p. 63, riga 12:	Essa è	»	Essa che è
p. 64, riga ultima:	una qualunque,	»	un'arbitraria
p. 65, riga 3:	descritto	»	descritte
p. 65, riga 9 da sotto:	un variabile	»	una variabile
p. 65, riga 2 da sotto:	di k che	»	di k, valore che
p. 68, riga 4 da sotto:	$\cos^n x$	»	$\cos^n \theta$.
p. 72, riga 9:	a^2	»	a_2

INDICE

PARTE II. — **Integrafi polari**

finito di stampare il dì 21 Novembre 1913

SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE SECONDA

VOL. XV.

CON 25 TAVOLE

NAPOLI
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE
DIRETTA DA B. DE RUBERTIS FU MICHELE
1914